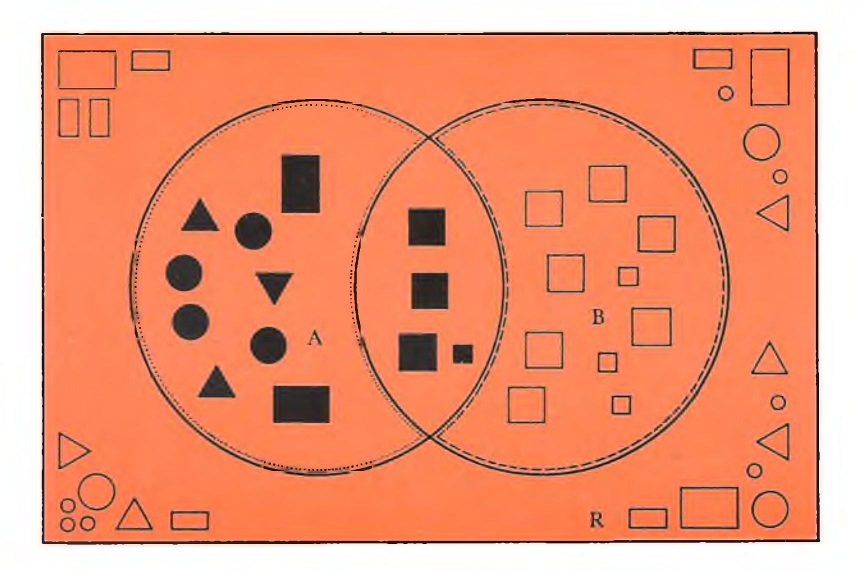
Jean-Paul Collette

Historia de las matemáticas II

4a. edición




siglo
veintiuno
editores

Traducción de

ALFONSO CASAL PIGA

HISTORIA DE LAS MATEMATICAS. II

por

JEAN-PAUL COLLETTE





siglo veintiuno editores, sa de cv
CERRO DEL AGUA 248, DELEGACIÓN COYOACÁN, 04310 MÉXICO, D.F.

primera edición en español, 1985
cuarta edición en español, 2000
© siglo xxi editores, s.a. de c.v.
en coedición con
© siglo xxi de españa editores, s.a.
isbn 968-23-1361-9 (obra completa)
isbn 968-23-1363-5 (tomo2)

primera edición en francés, 1979
© éditions du renouveau pédagogique, montréal
título original: *histoire des mathématiques*

derechos reservados conforme a la ley
impreso y hecho en méxico/printed and made in mexico

INDICE

Prefacio XI

PRIMERA PARTE: EL SIGLO XVII

LAS MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVII 3

1. LAS MATEMÁTICAS EN LA ÉPOCA DE DESCARTES Y DE FERMAT 7

Introducción, 7.—Descartes, 8.—Los primeros trabajos científicos de Descartes, 9.—La geometría de Descartes, 10.—Sistema de coordenadas, 17.—Método de las tangentes, 18.—Descartes y el análisis, 20.—Fermat, 21.—El *Isagoge* de Fermat, 22.—Paralelismo entre las geometrías de Descartes y Fermat, 26.—El método de máximos y mínimos de Fermat, 27.—Fermat y el método de las tangentes, 29.—La integración en Fermat, 32.—Fermat y la teoría de números, 32.—Fermat y la teoría de probabilidades, 35.—Roberval, 36.—Su geometría de los indivisibles, 38.—Roberval y la cicloide, 39.—El método de las tangentes de Roberval, 40.—La geometría analítica de Roberval, 42.—Torricelli, 42.—Torricelli y el análisis, 43.—Sus trabajos sobre la tangente, 45.—Pascal, 50.—El *Ensayo sobre las cónicas,* 52.—La máquina aritmética de Pascal, 53.—Pascal y las probabilidades, 54.—Pascal y el análisis infinitesimal, 56.—Désargues, 58.—El *Borrador,* 60.—*Bibliografía,* 63.—*Ejercicios,* 66.

2. PERIODO DE TRANSICIÓN 67

Introducción, 67.—Lenta asimilación de la geometría analítica, 68.—Van Schooten, 69.—Bartholin, 69.—Hudde, 70.—De Witt, 71.—De Sluse, 74.—La Hire, 75.—Mohr, 77.—Saint-Vincent, 79.—Mengoli, 80.—Huygens, 81.—Wallis. 83.—Rectificación de curvas, 87.—Gregory, 88.—Mercator, 91.—Barrow, 92.—*Bibliografía,* 96.—*Ejercicios,* 98.

3. NEWTON Y LEIBNIZ 100

Introducción, 100.—Newton, 101.—El teorema del binomio, 104.—El *De analysi,* 107.—El método de las fluxiones, 108.—El *De quadratura curvarum,* 112.—Los *Principia,* 114.—Leibniz, 117.—Las notas manuscritas sobre el cálculo, 121.—La *Nova methodus pro maximis et minimis,* 127.—Otros trabajos de Leibniz, 128.—La célebre controversia entre Newton y Leibniz, 132.—*Bibliografía,* 133.—*Ejercicios,* 135.

SEGUNDA PARTE: EL SIGLO XVIII

LAS MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVIII 139

4. LOS DISCÍPULOS DE LEIBNIZ Y NEWTON Y LAS PRIMERAS DIFICULTADES DEL ANÁLISIS 143

Introducción, 143.—La familia Bernoulli, 144.—Jakob Bernoulli, 144.—Sobre las series infinitas, 145.—Sobre problemas populares, 146.—El *Ars conjectandi,* 148.—Johann Bernoulli, 150.—De L'Hospital, 151.—*Análisis de los infinitamente pequeños* de L'Hospital, 152.—Contribuciones matemáticas de Johann Bernoulli, 155.—Nikolaus III, 156.—Daniel Bernoulli, 157.—Los otros Bernoulli, 159.—De Moivre, 160.—De Moivre y las probabilidades, 162.—De Moivre y la trigonometría, 163.—Cotes, 164.—Stirling, 165.—Maclaurin, 166.—Maclaurin y la geometría, 168.—Maclaurin y el análisis, 169.—Maclaurin y el álgebra, 170.—Cramer, 171.—Taylor, 171.—Algunos matemáticos italianos, 174.—Primeras dificultades del nuevo análisis, 179.—*Bibliografía,* 182.—*Ejercicios,* 184.

5. LA ÉPOCA DE EULER 186

Introducción, 186.—Euler, 187.—La noción de función en Euler, 191.—Las notaciones de Euler, 193.—Las ideas de Euler sobre los fundamentos del cálculo, 195.—El logaritmo y el número complejo en Euler, 197.—Euler y las series infinitas, 200.—Los trabajos de Euler en teoría de números, 203.—Otras contribuciones matemáticas de Euler, 206.—D'Alembert, 212.—Clairaut, 216.—Goldbach, 220.—Waring, 220.—Lambert, 221.—Buffon, 222.—*Bibliografía,* 224.—*Ejercicios,* 226.

6. LAS MATEMÁTICAS EN LA ÉPOCA DE LA REVOLUCION FRANCESA 228

Introducción, 228.—Lagrange, 229.—Los trabajos matemáticos de Lagrange en Turín, 233.—La actividad matemática de Lagrange en Berlín, 235.—Las contribuciones matemáticas de Lagrange durante la Revolución, 238.—Condorcet, 240.—Monge, 242.—La geometría descriptiva de Monge, 246.—Los trabajos de Monge en geometría analítica, 248.—Algunos otros trabajos matemáticos de Monge, 250.—Laplace, 251.—La teoría de las probabilidades de Laplace, 253.—Legendre, 257.—La geometría y el postulado de las paralelas, 258.—Teoría de números de Legendre, 259.—Otras contribuciones de Legendre, 260.—Carnot, 261.—Los trabajos matemáticos de Carnot, 263.—Wessel, 266.—Dudas sobre el futuro de las matemáticas a fines del siglo XVIII, 268.—*Bibliografía,* 269.—*Ejercicios,* 271.

TERCERA PARTE: LOS SIGLOS XIX Y XX

LAS MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XIX 275

Idea somera de las contribuciones matemáticas, 275.—Condiciones nuevas del progreso, 279.—Principales centros de actividad matemática, 280.—Las revistas y sociedades matemáticas, 282.

7. LA ÉPOCA DE GAUSS Y CAUCHY 285

Introducción, 285.—Gauss, 286.—Gauss, el hombre de ciencia, 292.—El teorema fundamental del álgebra, 293.—*Disquisitiones arithmeticæ,* 294.—Otros resultados de Gauss en teoría de números, 301.—Los trabajos geométricos de Gauss, 302.—Algunos otros trabajos matemáticos de Gauss, 305.—Cauchy, 308.—Cauchy y el rigor en el análisis, 311.—Cauchy y las series infinitas, 316.—Las funciones de variable compleja en Cauchy, 317.—Otras contribuciones matemáticas de Cauchy, 320.—Dirichlet, 322.—Abel, 324.—Jacobi, 327.—Bolzano, 330.—Poisson, 334.—Green, 336.—Ostrogradsky, 337.—*Bibliografía,* 338.—*Ejercicios,* 340.

8. LA ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS 342

Introducción, 342.—Liberación del concepto de función, 343.—Fourier, 344.—Riemann, 349.—Weierstrass, 354.—Creación de los números reales, 357.—Números algebraicos y trascendentes, 358.—Liouville, 358.—Trascendencia de e y π,

360.—Teoría de los números irracionales, 361.—Hamilton, 361.—Trabajos de Hamilton sobre los números irracionales, 362.—Méray, 364.—Weierstrass y su teoría de los números irracionales, 365.—Cantor, 367.—Teoría de los números irracionales de Cantor-Heine, 369.—Dedekind, 371.—Teoría de los números irracionales de Dedekind, 372.—Teoría de conjuntos, 376.—La teoría de conjuntos de Cantor, 378.—*Bibliografía,* 382.—*Ejercicios,* 384.

9. EL NACIMIENTO DEL ÁLGEBRA MODERNA 386

Introducción, 386.—Teoría de la resolubilidad de las ecuaciones, 387.—Galois, 388.—Teoría de la resolubilidad de Galois, 391.—El álgebra y la Analytical Society de Cambridge, 394.—Woodhouse, 395.—Peacock, 396.—Las concepciones algebraicas de De Morgan, 400.—El álgebra de las parejas de Hamilton, 401.—Los cuaterniones de Hamilton, 403.—Grassman, 407.—Maxwell, 413.—El análisis vectorial, 415.—La teoría de determinantes, 417.—Sylvester, 417.—Otras contribuciones a la teoría de determinantes, 419.—La teoría de matrices, 420.—Cayley, 421.—La teoría de matrices de Cayley, 422.—Las álgebras de dimensión finita, 426.—Los primeros trabajos de lógica matemática, 428.—Los trabajos en lógica de De Morgan, 428.—Boole, 431.—Los trabajos de lógica después de Boole, 434.—*Bibliografía,* 437.—*Ejercicios,* 439.

10. LA RENOVACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN EL SIGLO XIX 441

Introducción, 441.—Renovación de la geometría sintética, 444.—Brianchon y Dupin, 444.—Poncelet, 445.—Chasles, 451.—Gergonne, 454.—Steiner, 455.—Von Staudt, 457.—La renovación de la geometría analítica, 460.—Los predecesores de Plücker, 460.—Lamé y Bobillier, 460.—Möbius, 463.—Plücker, 465.—Los sucesores inmediatos de Plücker, 471.—Las geometrías no euclídeas, 472.—Los coinventores de las geometrías no euclídeas, 473.—Progresos posteriores de las geometrías no euclídeas, 479.—*Bibliografía,* 480.—*Ejercicios,* 482.

11. LOS ALBORES DE LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XX 483

Introducción, 483.—Klein, 484.—La génesis del programa de Erlangen, 486.—El contenido del programa de Erlangen, 491.—Klein y la topología, 495.—Peano, 497.—Los trabajos de análisis de Peano, 497.—Los fundamentos de las matemáticas en

Peano, 502.—La lógica matemática de Peano, 503.—Frege, 507.—Su *Begriffsschrift,* 508.—Los *Grundgesetze der Arithmetik,* 514.—Los fundamentos de la aritmética de Frege, 518.—Poincaré, 524.—Poincaré, científico universal, 525.—Teoría de las funciones fuchsianas, 526.—El método del barrido, 529.—Teoría de los problemas de contorno, 531.—La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, 531.—Teoría de las series asintóticas, 534.—La topología combinatoria, 537.—Otras contribuciones de Poincaré, 539.—La obra filosófica de Poincaré, 540.—La creación matemática, 544.—Los fundamentos de las matemáticas, 550.—Las paradojas de la teoría de conjuntos, 552.—La axiomatización de la teoría de conjuntos, 557.—Las escuelas de pensamiento en matemáticas, 561.—La escuela logística, 562.—Russell y Whitehead, 563.—Los *Principia mathematica,* 564.—La escuela intuicionista, 570.—La escuela formalista, 577.—Hilbert, 577.—El formalismo de Hilbert, 580.—*Bibliografía,* 586.—*Ejercicios,* 590.

Indice de autores 593
Indice temático 603

PREFACIO

Esta obra es el complemento natural de nuestro tomo I, porque cubre todo el período que se extiende desde el comienzo del siglo XVII hasta las grandes escuelas del pensamiento del siglo XX. Se trata de iniciar al lector en la historia de las matemáticas y, para ello, hemos creído conveniente, una vez más, presentar un manual de historia de las matemáticas más que un tratado, con el fin de exponer, sobre todo, la vida de los matemáticos y las nociones históricas comúnmente aceptadas por los historiadores, con el fin manifiesto de facilitar la comprensión de su contenido.

Está dividida en once capítulos repartidos en tres grandes períodos: el siglo XVII, el siglo XVIII, y el XIX y comienzos del XX. Se encontrará en la introducción a cada período un estado de la evolución de las matemáticas en la época correspondiente, así como un balance sumario de las realizaciones principales. Los once capítulos presentan el contenido en orden cronológico y cada capítulo comprende una introducción que pone de manifiesto los puntos importantes y las principales ideas que se tratan en él; el desarrollo que sigue se presenta bajo la forma de parágrafos señalados con un título, nombre propio o tema particular, y el capítulo se termina con una bibliografía abundante y ejercicios de recapitulación.

Se encontrará también al final de la obra un índice de los principales nombres de autores, y un índice de los temas tratados.

Si recurrir a la historia es adquirir perspectivas nuevas y atrayentes, adecuadas para iluminarnos sobre la naturaleza enormemente abstracta de las matemáticas, esperamos entonces que el contenido de esta obra será una fuente de motivación para el estudiante, el profesor y el lector, en donde podrán beber a voluntad para explotar sus riquezas y sus caminos prometedores.

El autor

PRIMERA PARTE

EL SIGLO XVII

LAS MATEMATICAS EN EL SIGLO XVII

Tras haber tomado contacto con la ciencia antigua a mediados del siglo XV, los matemáticos europeos manifestaron durante cerca de dos siglos una innegable voluntad de creación en ramas tales como la teoría de ecuaciones, la trigonometría y el álgebra simbólica. Durante este período, produjeron más de lo que los griegos habían realizado durante cerca de diez siglos, porque la educación europea se extendió lo suficiente como para promover el desarrollo de matemáticos, principalmente en Francia, en Inglaterra, Alemania, Holanda e Italia. Pero en el siglo XVII asistimos a una eclosión de una ciencia nueva, llamada a desarrollos considerables en el curso de los siglos siguientes y que está en el origen de la ciencia «moderna».

Aunque todavía percibían mal numerosos hechos científicos fundamentales, los pioneros de esta nueva ciencia tenían que encontrar sus fundamentos, y lo consiguieron. A pesar de su carácter evidente de complejidad, el porqué histórico que está en el origen de esta revolución puede ser asociado al «milagro griego». En efecto, los pensadores de la Grecia antigua habían rechazado, contrariamente a sus predecesores, el aspecto empírico del conocimiento para elaborar teorías matemáticas con un rigor poco reprochable. Si algunos vieron en esta aproximación antigua una especie de milagro, no podemos dejar de comprobar que tal aproximación está en el origen de la nueva ciencia «moderna». Del mismo modo que los griegos, los sabios del siglo XVII, al innovar en sus procedimientos, supieron mirar el mundo con ojos nuevos e inventar principios que permanecerían eficaces y útiles en lo sucesivo.

El genio del siglo XVII se revela no sólo en la expansión considerable de las actividades científicas, sino también en el enriquecimiento aportado a los temas clásicos y en la creación impresionante de nuevas ramas de las matemáticas. Fermat, por ejemplo, con su estudio sobre Diofanto, aporta resultados originales y revela aspec-

tos nuevos de un campo bien establecido. Por otra parte, la interpretación original de la geometría por Désargues ilustra bien el nacimiento de una nueva rama de las matemáticas; la fusión del álgebra y la geometría (geometría analítica), los comienzos de la geometría proyectiva, el desarrollo fulgurante del cálculo diferencial e integral, son otros tantos ejemplos para ilustrar las contribuciones fundamentales de este siglo.

La ciencia nueva, como se recuerda, fue creada en primer lugar en las obras de científicos aislados, y se desarrolló muy frecuentemente al margen de la ciencia oficial detentada por las universidades, cuyo conservadurismo y dogmatismo, controlados por la religión oficial, contribuyeron en gran medida a frenar la creación y la difusión del conocimiento.

Antes de 1550, el desarrollo de las matemáticas reposaba esencialmente en el trabajo individual de aficionados. Los resultados, comunicados oralmente en general, no eran conocidos más que en círculos muy restringidos, y los raros textos manuscritos circulaban penosamente de una persona a otra. A pesar del futuro prometedor que presentaba la invención de la imprenta en el siglo XV, la difusión de los conocimientos matemáticos estaba frenada por diversos problemas ligados a la débil demanda de textos científicos, la escasez de buenos impresores, la comercialización, evidentemente basada en la rentabilidad de las operaciones, etc. No es extraño, pues, que el científico se encerrara en un secreto prudente, que trabajara aislado del resto del mundo y que comunicara, en la medida de lo posible, sus resultados a sus amigos utilizando el anagrama para ocultarse de las miradas indiscretas o de las filtraciones desafortunadas.

Afortunadamente, a comienzos del siglo XVII, un número cada vez mayor de científicos participaron en el desarrollo de las matemáticas e intentaron comunicarse con los demás, con el fin legítimo de intercambiar, confrontar ideas y, de rebote, estimular su propia motivación para hacer avanzar esta ciencia. Además, esta actividad casi secreta y reservada condujo, en ausencia de revistas científicas, a la edificación de encrucijadas de correspondencia y a la fundación de sociedades científicas. El P. Marin Mersenne, por su parte, se distinguió facilitando el intercambio de correspondencia entre varios matemáticos conocidos, como Fermat, Descartes, Désargues, Pascal, Torricelli, etc. Las sociedades científicas se constituyen a

partir de reuniones de científicos y, desde 1603 en Italia, se asiste al nacimiento de la *Academia dei Lincei,* de la que Galileo formará parte en 1611. Después surgen otras academias a partir de agrupaciones naturales constituidas en Inglaterra, Francia, Alemania y Rusia. La Academia de Mersenne, y después la de Le Pailleur, quien le sucedió, son buenos ejemplos de ello. Sociedades tales como la *Académie Royale des Sciences* (carta de 1666), la *Royal Society of London* (carta de 1662), la *Academia de Ciencias de Berlín* (carta de 1700), no sólo favorecieron los contactos entre los científicos y los intercambios de ideas, sino que contribuyeron también directamente a la edición de revistas científicas. En 1665, el *Journal des Savants* se publica por primera vez, y esta fecha marca el comienzo de la aparición de revistas científicas, que no han dejado de crecer desde entonces en número y en calidad.

1. LAS MATEMATICAS EN LA EPOCA DE DESCARTES Y DE FERMAT

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 del tomo I, tratamos de las contribuciones importantes de los principales matemáticos de principios del siglo XVII. Se trataba, en efecto, de poner de relieve los rasgos dominantes de los trabajos originales de una época de transición que nos ha legado

1) Un álgebra literal heredada de los trabajos de la escuela italiana y de Vieta, y una notación algebraica fijada;
2) Tablas de funciones trigonométricas cada vez más precisas y aportes nuevos a la trigonometría plana y esférica;
3) Los elementos fundamentales que permitieron, en el siglo XVII, la eclosión de una teoría de las ecuaciones algebraicas;
4) Un cálculo logarítmico capaz de decuplicar los métodos de cálculo de los astrónomos;
5) El método de los indivisibles de Cavalieri y una técnica análoga de Kepler que marcan un nuevo enfoque del cálculo integral.

La muerte prematura de Torricelli impidió probablemente a Italia continuar ocupando el primer puesto en el desarrollo de nuevas ramas de las matemáticas. Fue así como, durante el segundo tercio del siglo XVII, los Descartes, Fermat, Désargues, Roberval y Pascal permitieron a Francia convertirse en el centro indiscutible de las actividades matemáticas.

Esta época está marcada principalmente por el desarrollo de la geometría analítica, el nacimiento del cálculo de probabilidades y de la geometría proyectiva, una contribución algebraica importante a las bases del cálculo diferencial e integral, la aparición de métodos eficaces de integración y de diferenciación, aportes nuevos y originales en el campo de la teoría de números y sobre temas específicos,

tales como la inducción matemática, las combinaciones, la rectificación y representación gráfica de curvas particulares, la mecanización del cálculo aritmético, etc.

El período que nos interesa aquí es también fértil en controversias que enfrentan a los matemáticos en polémicas a veces vivas y personales. Estas nacen, en general, de ataques que aspiran a poner en duda bien la veracidad de los resultados obtenidos, bien la paternidad de la invención o incluso el valor objetivo de los métodos utilizados.

DESCARTES

René Descartes (1596-1650), uno de los fundadores de la biología, físico de talento, matemático por accidente, fue uno de los primeros grandes filósofos modernos. Nacido el 31 de marzo de 1596 en el pueblo de La Haye, en Turena, pertenecía a una familia de la pequeña nobleza, originaria de la región de Poitou. Desde 1606 hasta 1614, fue alumno de los jesuitas en el colegio de la Flèche, donde imperaban los manuales de Clavio; a continuación estudió derecho y medicina en la universidad de Poitiers. Después de haber recibido sus títulos de bachiller y licenciado en derecho en 1616, Descartes empleó «el resto de su juventud en viajar, ver cortes y ejércitos». Así, en 1617, se enrola como voluntario en el ejército de Mauricio de Nassau y durante nueve años alterna el servicio en algún ejército como simple soldado con viajes y tiempos de estudio.

El 10 de noviembre de 1619 es una fecha memorable en la vida de Descartes porque, habiéndose retirado a Alemania para pasar allí el invierno, descubrió ese día los fundamentos de una «ciencia admirable». Descartes no dice cuál es esa ciencia, pero se puede suponer razonablemente que descubrió, en primer lugar, un método para resolver todos los problemas de geometría, método que, por generalización, podía aplicarse a todas las cosas susceptibles de ser reconocidas. En el curso de este período de viajes, conoció a varios científicos eminentes en diferentes partes de Europa y se interesó de cerca por las matemáticas, así como por la teoría y la construcción de instrumentos de óptica.

En el otoño de 1628, se sintió por fin maduro para realizar su propósito; se instaló en Holanda para poder trabajar en paz, al

abrigo de cualquier molestia. Vivió allí durante cerca de veinte años redactando sus célebres obras y manteniendo a la vez una correspondencia importante con científicos del resto de Europa. En 1649, la reina Cristina de Suecia invita a Descartes a su Corte. Tentado por los honores duda, pero acaba por aceptar. Cae enfermo poco después de su llegada a Suecia y muerte de una neumonía en Estocolmo, el 18 de febrero de 1650.

Los primeros trabajos científicos de Descartes

La primera contribución matemática de Descartes se remonta al comienzo de su período de viajes y se refiere al descubrimiento de la fórmula, atribuida generalmente a Euler,

$$s + f = a + 2$$

donde s, f y a representan, respectivamente, el número de vértices, de caras y de aristas en un poliedro simple.

En 1628 escribe su primer tratado, *Regulae ad directionem ingenii;* a continuación una obra de cosmología titulada *El mundo* o *Tratado de la luz,* que estaba ya en manos del impresor cuando sobrevino la condena de Galileo. Se abstuvo, pues, de publicar su física, con el fin de no exponerse a polémicas y quizá, incluso, a persecuciones. Sin embargo, se vio obligado, para completar su obra científica, a recurrir a los poderes públicos para obtener del Estado créditos suficientes. Es también el fin que persigue publicando, en 1637, su célebre *Discurso del método* y algunos de sus descubrimientos científicos.

Publicado sin el nombre del autor en Leiden en 1637, el *Discurso* servía como prefacio a tres tratados científicos, *Geometría, Dióptrica* y *Meteoros.* La *Geometría,* que fue la única obra de Descartes sobre matemáticas, contiene sus ideas sobre la geometría de coordenadas y el álgebra. Pueden encontrarse sus restantes contribuciones matemáticas en diversas cartas dirigidas a sus correspondientes.

El contenido del *Discurso* es descrito por Descartes en estos términos:

Si este discurso parece demasiado largo para ser leído todo de una vez, se podrá dividir en seis partes. En la primera se encontrarán diversas conside-

raciones que se refieren a las ciencias. En la segunda, las principales reglas del método que el autor ha buscado. En la tercera, algunas de las reglas de la moral que ha extraído de este método. En la cuarta, las razones mediante las que demuestra la existencia de Dios y del alma humana, que son los fundamentos de su metafísica. En la quinta, el orden de las cuestiones de física que ha investigado y, en particular, la explicación del movimiento del corazón y de algunas otras dificultades pertenecientes a la medicina, y también la diferencia que existe entre nuestra alma y la de los animales. En la última, qué cosas cree que se requieren para ir más allá en la investigación de la naturaleza de lo que ha ido, y qué razones le han hecho escribir.

En resumen, el *Discurso del método* contiene las soluciones aportadas por Descartes a los principales problemas de la filosofía, y su valor biográfico es tal que nos revela la evolución de su mente y menciona acontecimientos de su vida en la medida en que explican la formación de su pensamiento. En una palabra, Descartes se revela en él por entero, y podemos ver, cómo se forma y desarrolla una vocación filosófica.

Para Descartes, el conocimiento matemático es el modelo de todo conocimiento verdadero y, si se deben estudiar las matemáticas, es para acostumbrar al espíritu a «alimentarse de verdades» y a «no contentarse en absoluto con razones falsas». Por otra parte, al ser concebida la verdad sobre el modelo matemático, lo probable queda excluido de la ciencia. En sus *Reglas para la dirección de la mente,* Descartes deduce de su método matemático los principios que aseguran el conocimiento exacto de toda actividad científica. Así, cualquiera que sea el campo de investigación, el científico no debe ocuparse de ningún objeto del que no pueda tener una certeza igual a la de las demostraciones de la geometría, y no debe tener en cuenta más que conocimientos tan ciertos y evidentes como los de los geómetras.

La geometría de Descartes

En una carta escrita a Isaac Beeckmann en 1628 encontramos el origen de la geometría analítica de Descartes. Subrayaba en esta carta que los progresos realizados en aritmética y en geometría en los últimos nueve años eran tales que ya no estaba interesado en

proseguir estudios en esos campos. Y justificaba esta afirmación dando la regla para construir todas las cúbicas y las cuárticas por medio de una parábola. Mediante este enfoque geométrico, se situaba en la prolongación directa de los trabajos de Vieta, ya que la construcción de las raíces de las ecuaciones algebraicas determinadas había sido uno de los principales temas de estudio de éste último. Así, este esfuerzo por utilizar la geometría para resolver ecuaciones algebraicas ilustraba bien el enfoque fundamental que desarrollaría en su *Geometría.* Había descubierto, según parece, que las interrelaciones entre el álgebra y la geometría resultaban más inteligibles mediante el uso de coordenadas en el estudio de las ecuaciones con dos incógnitas, y su método, esencialmente nuevo, consistía en utilizar la representación gráfica de las ecuaciones indeterminadas.

Descartes comprobó el valor de su método cuando resolvió en poco tiempo el problema de lugar de Pappus con tres y cuatro rectas, propuesto por Golius. Aunque tenía la impresión de que los antiguos no habían podido resolver este problema, se dio cuenta de las posibilidades que ofrecía su enfoque y, consecuentemente, dio a conocer la geometría analítica a sus contemporáneos con su célebre tratado.

La *Geometría* de Descartes está dividida en tres libros: el primero trata de los problemas que se pueden construir empleando sólo circunferencias y rectas. El segundo se refiere a la naturaleza de las curvas, mientras que el tercero abarca la construcción de «problemas sólidos o más que sólidos».

La geometría cartesiana, en el sentido de Descartes, perseguía un fin muy diferente de nuestra geometría analítica moderna. En efecto, en el primer párrafo de la *Geometría,* puede leerse:

> Todos los problemas de geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales que no hace falta más que conocer la longitud de algunos segmentos rectos para construirlos.

No se trata, pues, de reducir necesariamente la geometría al álgebra, sino más bien de realizar una construcción geométrica. Así, desde las primeras páginas del libro I, Descartes proporciona una base geométrica al álgebra mostrando que las cinco operaciones aritméticas corresponden a construcciones sencillas con la regla y el

compás. Por ejemplo, la raíz cuadrada, que es la quinta operación aritmética, se ilustra como sigue:

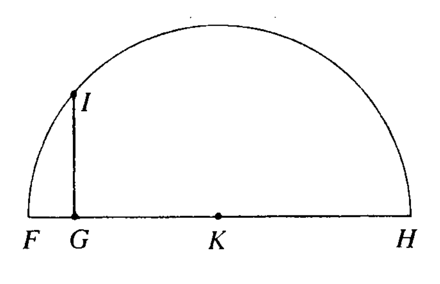


FIGURA 1.1

«Si hace falta extraer la raíz cuadrada de *GH,* le añado en línea recta *FG,* que es la unidad; entonces, dividiendo *FH* en dos partes iguales en el punto *K,* desde el centro *K* trazo el círculo *FIH;* después, trazando desde el punto *G* una línea recta hasta *I,* con ángulos rectos con respecto a *FH, GI* es la raíz buscada.»

Después, Descartes introduce su notación algebraica, y en particular su notación exponencial para las potencias. Resalta a continuación el hecho de que las potencias tales como a^2, b^2, b^3, a^2b, etc., se interpretan geométricamente como segmentos simples y no, según los griegos, como cuadrados o cubos; en esto rompe con la tradición griega. Para la resolución de un problema en geometría, Descartes indica cómo se debe proceder:

Se debe, en primer lugar, considerarlo como ya hecho, y dar nombres a todas las líneas que aparecen necesarias para construirlo, tanto las que son desconocidas como las otras. Después, sin considerar ninguna diferencia entre las líneas conocidas y desconocidas, se debe recorrer la dificultad, según el orden que muestre más naturalmente en qué medida dependen mutuamente unas de otras, hasta que se haya encontrado el medio de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se llama una ecuación.

Como dice tan acertadamente Boyer, este pasaje caracteriza un enfoque analítico de la geometría, pero no representa la geometría de coordenadas en su uso habitual. Descartes afirma a continuación que, si un problema puede ser resuelto mediante la «geometría de

líneas rectas y circulares trazadas sobre una superficie plana» —geometría de la regla y el compás—, la ecuación final contendrá «un cuadrado desconocido» y este segmento se encuentra fácilmente. Porque, prosigue, si tengo por ejemplo $z^2 = az + bb$

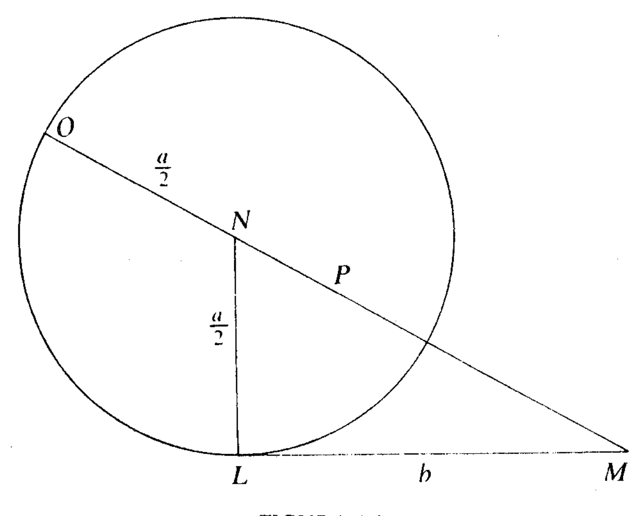


FIGURA 1.2

construyo un triángulo rectángulo NLM con el lado LM igual a b, la raíz cuadrada de la cantidad conocida b^2, y el otro lado, LN igual a $\frac{a}{2}$, la mitad de la otra cantidad conocida que está multiplicada por z, la cual es el segmento desconocido por hipótesis. Prolongando MN, la hipotenusa de este triángulo, hasta O, de manera que NO sea igual a NL, el segmento OM es la línea z buscada. Esto se expresa de esta forma[1]:

$$z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

[1] Descartes escribió esta expresión así:

$$z \propto \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} + bb}$$

donde $\propto$ era equivalente a nuestro signo =. Notemos que $aa = a^2$.

Descartes aplica su método a otras ecuaciones de segundo grado y subraya a continuación que las raíces obtenidas en estos ejemplos podían encontrarse por otros métodos, y que los matemáticos antiguos no parecían haber descubierto un método tan eficaz para el mismo género de problemas. Lo enlaza a continuación con el célebre problema de lugar de Pappus y, después de una larga exposición sobre el tema, intenta demostrar que su método le permite resolver el problema, incluso si el número de rectas es mayor de seis u ocho.

El libro II es el que se acerca más a nuestra concepción moderna de la geometría analítica. Después de una exposición crítica sobre las distinciones aportadas por los griegos en el tema de la clasificación de las curvas —curvas planas, sólidas y lineales— propone una nueva clasificación que reposa esencialmente sobre «la exactitud del razonamiento». Las curvas geométricas como la recta, la circunferencia y las cónicas, son curvas algebraicas descritas exactamente, por oposición a las curvas mecánicas como la cuadratriz y la espiral logarítmica, que son más bien curvas trascendentes descritas inexactamente. La clasificación de Descartes permitió abrir el campo de las curvas admisibles, que era muy restringido entre los griegos, y preparar el camino de una clasificación de las curvas basada en parte en la existencia de ecuaciones algebraicas.

Después de haber obtenido una clasificación general de las curvas, Descartes emprende la demostración de la solución del problema de Pappus para el caso de cuatro rectas. Propone los datos del problema como sigue:

Tomemos los cuatro segmentos *AB, AD, EF* y *GH* dados más arriba y tratemos de encontrar otro segmento en el cual se encuentren una infinidad de puntos como *C*, desde el que, habiendo trazado los cuatro segmentos *CB, CD, CF* y *CH,* con ángulos dados respecto de los segmentos dados, *CB* multiplicado por *CF* produzca un resultado igual a *CD* multiplicado por *CH.*

Descartes denota *AB* mediante x y *BC* mediante y. Expresa las distancias *CD, CF* y *CH* como expresiones lineales en x y en y, con coeficientes determinados por las distancias fijas y por los ángulos determinados entre los segmentos. Mediante consideraciones geo-

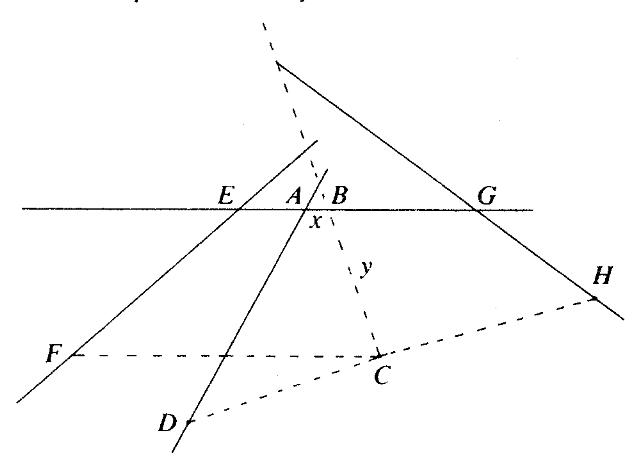


FIGURA 1.3

métricas y el uso de abreviaturas apropiadas, llega a una ecuación de la forma

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2.$$

Esta ecuación general representa una cónica que pasa por el origen de coordenadas pero, para Descartes, los coeficientes literales deben ser considerados como positivos. Indica a continuación las condiciones que hace falta imponer a los coeficientes para que la cónica se convierta en una recta, una parábola, una elipse o una hipérbola.

A propósito del problema de Pappus, subrayamos este caso particular: cuando las cuatro rectas son paralelas y están a igual distancia *a*, y la quinta es perpendicular a las otras, el lugar correspondiente es una cúbica que Newton llamó «parábola cartesiana» o tridente

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = axy$$

El trazado de esta curva, aunque aparece frecuentemente en su *Geometría*, es esbozado solamente por Descartes, porque su interés por esta curva estaba motivado sobre todo por el propósito de

1) obtener su ecuación como un lugar de Pappus;

2) mostrar su generación mediante el movimiento de curvas de grado inferior;

3) utilizarla a su vez para construir raíces de ecuaciones de grado superior.

Se encuentran también en el libro II lugares llamados «óvalos de Descartes», que son muy útiles en óptica. En efecto, sirven para generar la superficie que separa dos medios tales que los rayos luminosos que salen de un punto del primer medio encuentran la superficie, y que después de su refracción en el medio converjan en un punto. La definición moderna de esta curva es el lugar de puntos M que satisfacen la condición $FM + kF'M = 2a$ donde F y F' son dos puntos fijos, $2a$ es cualquier número real mayor que FF' y k es un número real cualquiera. Por ejemplo, si $k = 1$, la curva es una elipse.

El libro III de la *Geometría* vuelve al tema desarrollado en el libro I, es decir, la solución de problemas de construcciones geométricas y, en particular, la construcción de raíces de ecuaciones determinadas. Descartes resuelve así problemas de construcciones geométricas en los que las longitudes desconocidas (raíces) satisfacen ecuaciones de tercer grado y grado superior. Nos dice que «para la construcción de cada problema hace falta tener cuidado de escoger siempre la más sencilla de aquellas mediante las que es posible resolverlo»; se debe, pues, conocer bien la naturaleza de las raíces de las ecuaciones a estudiar y saber, en particular, cuándo una ecuación es reductible.

Este último libro constituye una exposición elemental de la teoría de ecuaciones, escrita en un lenguaje y con una notación que se parecen mucho a los de nuestros libros modernos. Se encuentran en él reglas para combinar, factorizar, transformar y resolver ecuaciones. También se muestra cómo descubrir las raíces racionales cuando existen, disminuir el grado de una ecuación cuando se conoce una raíz, aumentar y disminuir las raíces, cambiar su signo, determinar el número posible de raíces positivas y negativas —verdaderas y falsas en el lenguaje de Descartes— mediante la célebre «regla de los signos», etc.

En la búsqueda de la solución de problemas de construcciones geométricas, Descartes no recurre al método gráfico apropiado a un sistema de coordenadas. Utiliza esencialmente la construcción geo-

métrica, el conocimiento de una longitud desconocida que satisface una ecuación y las propiedades geométricas de las cónicas. Su solución ofrece un aspecto puramente algebraico, y se sirve de las ecuaciones de las cónicas para deducir hechos referentes a las curvas y a su construcción geométrica. Su clasificación de los problemas reposa sobre el grado de las ecuaciones algebraicas obtenidas a partir de la formulación algebraica de los problemas de construcción. Es así como una construcción realizada por medio de rectas y circunferencias se formula en términos de una ecuación de primero o de segundo grado. Los grados tres y cuatro de una ecuación implican la utilización de las secciones cónicas. En particular, Descartes afirma, de manera incidental, que la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo son de grado tres, porque las rectas y las circunferencias no bastan para su construcción. Si el grado de una ecuación es superior a cuatro, se pueden necesitar curvas más complicadas que las secciones cónicas para asegurar su construcción geométrica.

El grado de la ecuación de una curva resulta ser, en Descartes, una especie de medida de su simplicidad. Nos recuerda, por otra parte, al final de su libro, que ha presentado las construcciones más sencillas posibles para problemas de diferentes clases, lo que significa que ha utilizado el grado menor posible para resolver un problema de construcción.

Sistema de coordenadas

En lo que se refiere a las expresiones «sistema de coordenadas cartesianas» y «producto cartesiano», podemos decir que son anacronismos. En efecto, Descartes no elaboró un sistema de coordenadas que le habría permitido localizar puntos como pudiera hacerlo un geógrafo, de la misma manera que sus coordenadas no son consideradas como parejas de números. Lo que Descartes hizo, fue utilizar una recta (AG en la figura 1.3) como una línea de base con un origen en el punto A. Los valores de x son entonces longitudes medidas sobre esta recta, mientras que los valores de y son longitudes medidas desde la recta AG y que forman un cierto ángulo constante con esta última. Esto era, de hecho, recurrir a coordenadas oblicuas para situar puntos en el plano, pero Descartes prefirió

insistir en la idea misma de coordenadas en lugar de servirse de ellas para trazar las curvas. Oresme representaba una ley trazando el gráfico de la función correspondiente, y la curva obtenida ilustraba geométricamente esta relación de dependencia entre dos variables. A Descartes no le interesaban los lugares de puntos que satisfacen una ecuación dada, sino la posibilidad de construir estos puntos. Por otra parte, en la *Geometría* no se encuentra ninguna curva trazada directamente a partir de su ecuación. En lo que se refiere a la utilización de cantidades negativas, aunque sabía que los segmentos negativos están dirigidos en el sentido opuesto a los segmentos positivos, no se preocupó de establecer un principio general aplicable en un sistema de coordenadas.

Método de las tangentes

Descartes abordó el problema de las tangentes en 1637 intentando determinar la «normal» a la curva de un punto *M* dado:

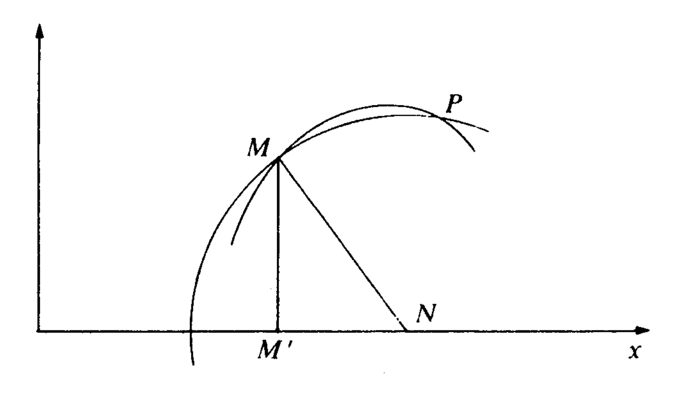


FIGURA 1.4

Si N es el punto donde la normal (perpendicular) corta al eje de las x, la circunferencia descrita con este punto como centro, con radio NM, será tangente en M a la curva. Pero si N no coincide exactamente con el pie de la normal, el radio NM cortará a la curva en un segundo punto P que se aproximará indefinidamente a M, cuando N

se aproxime indefinidamente al punto que coincide con el pie de la normal. Este método está fundado en el principio siguiente: una línea cualquiera variable que corta a una curva dada en un punto fijo *M* dado y en un segundo punto *P* variable que se aproxima indefinidamente a *M*, llega a ser tangente a esta curva cuando los dos puntos de intersección coinciden.

Consideremos el ejemplo de la parábola

$$y^2 = 2mx;$$

la normal *AM*, de coordenadas (x, y), pasa por el centro de la circunferencia, de abscisa x_1, cuya ecuación es

$$(x - x_1)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

La intersección de la curva con la circunferencia proporciona

$$(x - x_1)^2 + 2mx - r^2 = 0$$

y, desarrollando

$$x^2 - 2(x_1 - m)x + x_1^2 - r^2 = 0$$

Si se quiere que los puntos *M* y *P* coincidan, hace falta que el discriminante de esta última ecuación se anule, de donde la raíz doble será

$$x = x_1 - m$$

Conociendo la abscisa x del punto de tangencia y el valor m de la parábola dada, se encuentra x_1, y conociendo el centro de la circunferencia se conocerán la normal y la tangente.

Este primer método de las tangentes apareció en el libro II de la *Geometría,* y fue seguido de otros dos métodos propuestos por Descartes para apoyar su argumentación en la polémica que le enfrentó a Fermat. El segundo método consistía en «determinar la tangente a una curva considerándola como la posición particular de una secante que gira en torno al pie de la tangente, hasta que dos de sus puntos de intersección con la curva llegan a coincidir». Fue propuesto como respuesta a las modificaciones y correcciones hechas por Descartes a la regla de los máximos de Fermat. El último método de Descartes, que dio a conocer algunos días después del segundo, expresa el punto de vista generalmente adoptado ahora: la tangente está determinada por una recta que gira alrededor del

punto de contacto dado, hasta que el otro punto en el que aquélla corte a la curva venga a coincidir con el primero. Volveremos sobre esta polémica de las tangentes con ocasión de la presentación de los trabajos de Fermat sobre esta cuestión.

Descartes y el análisis

Aunque Descartes manifestara antes de 1637 un cierto interés por los métodos infinitesimales, no participó en su desarrollo porque sus trabajos matemáticos, hay que recordarlo, no representan más que un episodio en el desarrollo de su filosofía. Sin embargo, con motivo de la polémica con Fermat, puso de manifiesto su interés matemático en el problema de las tangentes. Descartes se dio cuenta plenamente de la importancia de este problema en los siguientes términos:

Por esto creeré haber puesto aquí todo lo que se requiere para los elementos de las líneas curvas, cuando haya ofrecido, en general, la manera de trazar líneas rectas que formen ángulos rectos en aquellos de sus puntos que se quiera escoger. Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general, no sólo que yo sepa, sino incluso que yo haya deseado jamás conocer en geometría.

Hay que señalar que el método de Descartes es puramente algebraico y no recurre a conceptos de límite o de infinitésimo. Sin embargo, queriendo corregir la regla de los máximos y mínimos de Fermat, utiliza un procedimiento que es prácticamente equivalente a definir la tangente como límite de la secante. Descartes evitó el uso de métodos infinitesimales a causa de los riesgos que presentaban y debido a la ausencia de bases teóricas para el razonamiento infinitesimal. Se oponía así a un movimiento importante de su época.

Aplicó el método de las tangentes a problemas difíciles y, en particular, a una curva cúbica llamada «folio de Descartes» (óvalo), que tiene por ecuación

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Propuesta desde 1638 por Descartes, esta curva fue representada en un principio por una hoja situada en el primer cuadrante.

Descartes se sirvió de ella no para ilustrar su propia geometría, sino más bien como un desafío al método de los máximos y mínimos de Fermat.

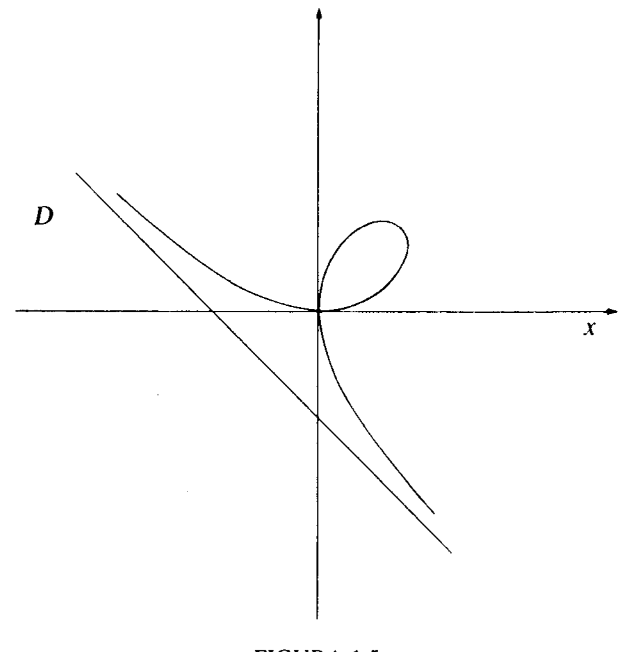


FIGURA 1.5

En resumen, el área de la hoja vale $\frac{3a^2}{2}$, lo que es igual también al área comprendida entre la curva y la asíntota, cuya ecuación es $x + y + a = 0$.

FERMAT

Pierre Fermat (1601-1665) nació en 1601 en Beaumont-de-Lomagne, cerca de Montauban. Su padre, comerciante de cueros, después de haberle dado una instrucción sólida en su familia, le envió a estudiar Derecho a Toulouse. Allí pasó toda su vida, ejerciendo Derecho; después, a partir de 1631, fue consejero en el

Parlamento, y murió en Castres en 1665. Fermat tuvo una carrera apacible, caracterizada por un cuidado ejemplar de hacer bien su tarea y, en sus momentos de ocio, supo crearse ocupaciones literarias y apasionarse por las matemáticas.

Fermat publicó rara vez sus descubrimientos; apenas algunas notas como apéndices a tratados escritos por otros. Como trabajaba para entretenerse, sus resultados más bellos aparecen en los márgenes de estos tratados, y un gran número de sus trabajos se han perdido. Mantuvo correspondencia con todos los científicos de su época; su reputación de matemático competente fue inmensa, y la estima en la que se le tuvo fue general. Pascal confesó que era «aquel a quien tengo por el gran geómetra de toda Europa», y este personaje tan atrayente, de un carácter constante, afable, poco susceptible, sin orgullo, contribuyó ampliamente a la evolución de las matemáticas en campos tan variados como la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, la teoría de números y la teoría de probabilidades. Los principales escritos de Fermat fueron publicados, después de su muerte, por su hijo Samuel en 1679, bajo el título de *Varia opera mathematica.* Aunque esta publicación no encierra más que una parte de su producción, basta por sí sola para clasificar al célebre habitante de Toulouse como el más importante matemático francés del siglo XVII.

El Isagoge *de Fermat*

El trabajo de restauración de los grandes clásicos de Alejandría emprendido por sus predecesores interesó a Fermat después de 1621 hasta tal punto que se propuso reconstruir los dos libros de Apolonio sobre los *Lugares planos* a partir de informaciones contenidas en la *Colección matemática* de Pappus. Este trabajo le condujo al problema de las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas de Apolonio, que generalizó en términos de esferas tangentes a cuatro esferas dadas. Esta primera actividad matemática de Fermat le llevó en 1629, a la edad de 28 años, a un estudio analítico de los máximos y los mínimos. Luego, algún tiempo después, aplicó el análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos y, en un corto ensayo titulado *Ad locos planos et solidos isagoge,* que data como mucho de 1636, presentó en un estilo moderno, con las

notaciones de Vieta, los principios fundamentales de la geometría analítica.

Esta obra, muy corta, como todos sus ensayos, comienza con una alusión al hecho de que los estudios sobre lugares geométricos han podido hacer que en ciertos casos los antiguos parezcan difíciles a causa de su incapacidad de enunciar el problema en una forma general. Es así como se propone someter la teoría de los lugares geométricos a un análisis que indique el camino hacia un estudio general de los problemas de lugares.

Prosigue, a continuación, enunciando el principio fundamental de la geometría analítica:

> Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva.

Según Boyer, esta proposición constituye uno de los enunciados más significativos de la historia de las matemáticas. En efecto, introduce no sólo la geometría analítica, sino también la muy útil idea de variable algebraica. En la terminología de Vieta la cantidad desconocida representaba una magnitud determinada, mientras que en Fermat el extremo de una de las variables puede ocupar diversas posiciones consecutivas, de manera que represente una línea.

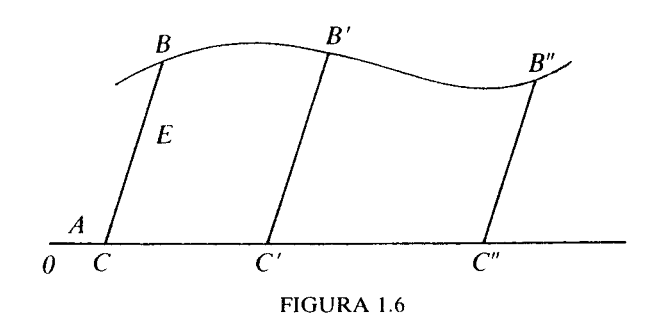


FIGURA 1.6

El extremo de E (nuestra y) es fijo (B) cuando la longitud de A (nuestra x) está determinada a partir de un punto O, que se toma como origen, y hasta el punto C. Así, Fermat utiliza coordenadas

oblicuas, aunque el eje de las *y* no exista explícitamente y aunque no emplee coordenadas negativas. Estas cantidades desconocidas *A* y *E* son verdaderas variables que utiliza en ecuaciones algebraicas que representan lugares. Subrayemos que ni Descartes ni Fermat utilizaron el término «sistema de coordenadas» o la idea de dos ejes, y que Fermat se limitó a hacer representaciones geométricas en el primer cuadrante solamente.

En su presentación, introduce la división clásica de los lugares en tres tipos —plano, sólido y lineal— de la manera siguiente: si el extremo de *E* describe una línea recta o una circunferencia, tenemos un lugar plano; si describe una parábola, una hipérbola o una elipse, es un lugar sólido; para todas las demás curvas, el lugar correspondiente es un lugar lineal *(locus linearis)*. Según Fermat, las ecuaciones pueden visualizarse fácilmente cuando las dos cantidades desconocidas son tales que forman un ángulo dado, que ordinariamente es recto.

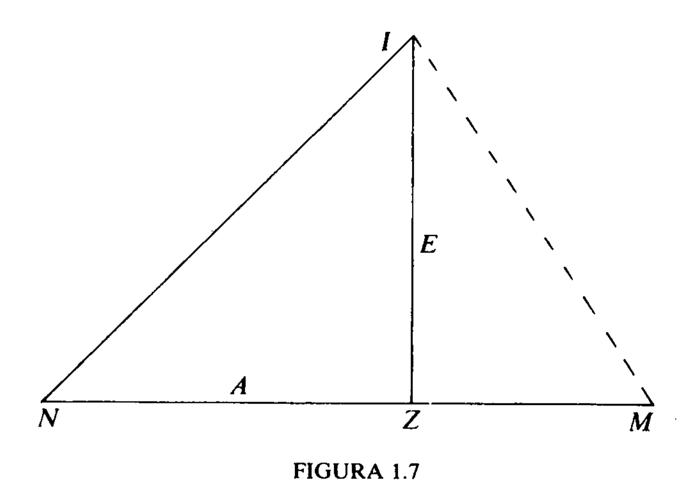


FIGURA 1.7

Fermat introduce el estudio de la ecuación lineal utilizando las vocales (*A* y *E*) para representar, como lo había hecho Vieta, las cantidades desconocidas. Partiendo de una recta *NZM* donde *N* es fijo, toma *NZ* como la cantidad desconocida *A* y el segmento *ZI*,

aplicado sobre la recta con un ángulo *NZI*, como igual a la otra cantidad desconocida *E*. Cuando

«*D* in *A* æquatur *B* in *E*»

es decir, $DA = BE$ donde *D* y *B* son constantes, el punto *I* describirá un lugar geométrico representado por la semirrecta *NI*.

La ecuación lineal más general de la forma

$$Dx + By = c^2, \text{ donde } x = A \text{ e } y = E$$

corresponde a la recta *MI* con $MZ = c^2/D - A$. Fermat enuncia que todas las ecuaciones de primer grado representan líneas rectas. Subrayemos que los coeficientes literales, así como las coordenadas, son positivos, tendencia que persistirá a lo largo de todo el siglo. Afirma que todos los problemas de lugares que incluyen una recta pueden ser descritos por esta ecuación lineal, en particular la séptima proposición del libro I de Apolonio sobre los *Lugares planos* y una «proposición muy bella» que él, Fermat, ha descubierto gracias a su método.

El segundo tipo de ecuación que presenta Fermat corresponde a la forma

«*A* in *E* æquatur *Z pl*»

y es la ecuación de la hipérbola $xy = k^2$. Después vienen las ecuaciones que comprenden los cuadrados de las incógnitas, comenzando por $x^2 = y^2$. Esta ecuación y todas las que son homogéneas en x y en y representan una línea recta. Fermat demuestra también que $x^2 = By$, $y^2 = Dx$ y $b^2 \pm x^2 = By$ son parábolas. Después de haber demostrado que

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2By = b^2$$

es una circunferencia, Fermat pretende haber llegado a reconstruir todas las proposiciones del libro II de Apolonio. Finalmente, habiendo demostrado que $b^2 - x^2 = ky^2$ es una elipse y que $b^2 + x^2 = ky^2$ es una hipérbola, Fermat se ve inducido a estudiar la ecuación más difícil de todas, la que contiene no sólo x e y, sino también xy. Analiza el caso

$$b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$$

que, como demuestra, representa una elipse. El tratado se termina con la proposición siguiente:

«Dados dos puntos *N* y *M*, encontrar el lugar de puntos tal que la suma de cuadrados de *IN*, *IM* esté en una razón dada con el triángulo *INM*» (véase la figura 1.7).

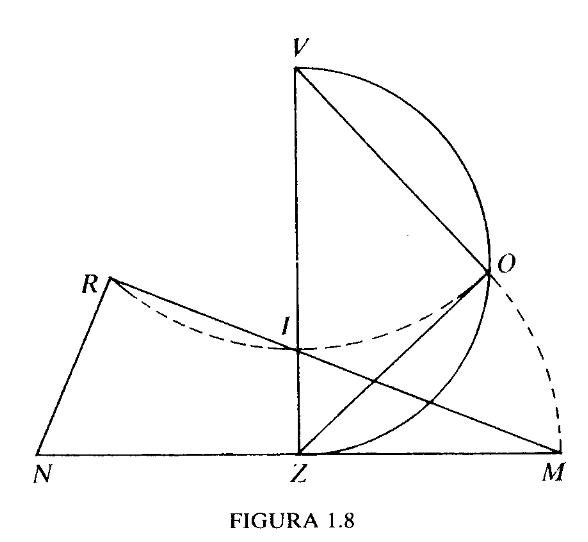


FIGURA 1.8

En el apéndice del *Isagoge*, se encuentra «La solución de problemas sólidos mediante lugares», texto en el que Fermat hace patente su método para demostrar que todos los problemas de ecuaciones cúbicas y cuárticas pueden construirse mediante una parábola y una circunferencia. Por ejemplo, la ecuación $x^4 - z^3x + d^4 = 0$ se resuelve mediante la intersección de la parábola $\sqrt{2by} = x^2 - b^2$ y de la circunferencia $2b^2x^2 + 2b^2y^2 = z^3x + b^4 + d^4$.

Paralelismo entre las geometrías de Descartes y Fermat

Muchos autores se han ocupado de los trabajos de Descartes y Fermat, y sus apreciaciones parecen diferir en varios puntos. Por eso nos contentaremos con poner en claro brevemente algunos

hechos y ciertas características que se deducen de sus geometrías, dejando a los especialistas la tarea de proseguir la discusión.

Ni Descartes ni Fermat inventaron el uso de las coordenadas o de métodos analíticos, y ni uno ni otro fueron los primeros en aplicar el álgebra de la geometría o en representar gráficamente las variables. La contribución independiente de cada uno reposa esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas. Además, si se añaden a esto los métodos algorítmicos desarrollados por cada uno para unir estrechamente la ecuación y la curva correspondiente, todo ello bastará para atribuirles el mérito de ser los fundadores de la geometría analítica.

Los dos autores continuaron los trabajos de Vieta en direcciones algo diferentes. Descartes adopta el objetivo de Vieta, la construcción geométrica de las raíces de ecuaciones algebraicas, pero continuándolo en conjunción con un simbolismo algebraico mucho más apropiado. Fermat conserva la notación de Vieta, pero la aplica a un campo nuevo, el estudio de los lugares geométricos.

Fermat pone de relieve la idea fundamental de la ecuación de una curva de una manera más esclarecedora que Descartes. Por otra parte, Descartes cubre un campo más amplio y general que el de las ecuaciones de primero y segundo grado de Fermat. Este último ofrece una exposición sistemática más accesible que la de Descartes, cuyas proposiciones da la impresión de que ha evitado clarificar. Se percibe mejor en Fermat que la ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva. Mientras que Descartes sugiere clases de curvas generadas por movimientos simples, Fermat introduce grupos de curvas dadas por ecuaciones algebraicas.

En general, se puede decir que Descartes comienza con un problema de lugar geométrico a partir del cual obtiene una ecuación del lugar, mientras que Fermat se preocupa más de partir de una ecuación y de deducir las propiedades de su curva.

El método de máximos y mínimos de Fermat

En 1629, Fermat había desarrollado su geometría analítica y, poco tiempo después, hizo dos descubrimientos importantes estrecha-

mente ligados a sus trabajos sobre los lugares. El más importante es, sin duda, una regla para la determinación de los extremos de las funciones algebraicas que sería descrita, sin demostración, en un pequeño tratado titulado *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* escrito en 1637.

Se puede enunciar su método de la manera siguiente: se trata de buscar el máximo o el mínimo de la función f cuya variable es A; reemplacemos A por $A + E$ (donde E desempeña el papel de nuestro x habitual) en f, y hagamos $f(A + E) \approx f(A)$, dividamos cada término por E y, finalmente, eliminemos todos los términos que contengan E. La ecuación resultante se anula para uno o varios valores de la variable A, y estos valores corresponden a máximos o mínimos.

Apliquemos su método al problema de dividir un número en dos partes de forma que el producto sea máximo. Sea N el número conocido y A la cantidad desconocida. Tendremos

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2.$$

Hace falta hacer f máximo, por consiguiente

$$f(A + E) = (A + E)N - (A + E)^2 =$$
$$= AN + EN - A^2 - 2AE - E^2$$

y como

$$f(A) = A(N - A)$$

se tiene

$$AN - A^2 = AN - A^2 + EN - 2AE - E^2$$

de donde, dividiendo por E y después de simplificar, obtenemos

$$2A - \mathrm{N} - \mathrm{E} = 0.$$

Finalmente, haciendo $E = 0$ en la última igualdad, tendremos

$$2A = N.$$

Es decir, f es máximo cuando

$$A = \frac{\mathrm{N}}{2}$$

Es importante señalar que este método algorítmico es equivalente a calcular

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(A+E)-f(A)}{E}$$

aunque Fermat no poseía el concepto de límite. Sin embargo, el cambio de variable de A a $A + E$ y los valores próximos utilizados por Fermat constituyen la esencia del análisis infinitesimal. Subrayemos además que el método de Fermat no permite distinguir entre un máximo y un mínimo.

Fermat y el método de las tangentes

Hacia 1632, Fermat aplica su método de los extremos a la determinación de las normales y tangentes o, más precisamente, de las subtangentes a una curva. Utiliza la parábola para ilustrar su método:

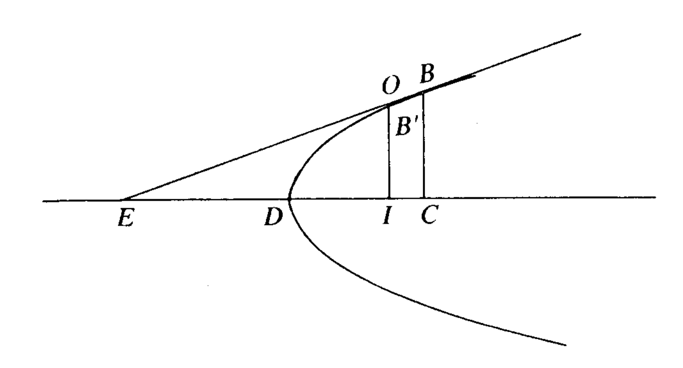


FIGURA 1.9

Sea D el vértice de la parábola, B el punto tangente a la curva parabólica, C el pie de la ordenada de B, E el punto donde la tangente corta al eje. Hagamos $CD = b$, $CE = s$, $CI = e$, y elevemos una ordenada en el punto I que corte la parábola en B' y la tangente en O.

Para todos los puntos de la parábola, cuya ecuación es $y^2 = px$, la razón del cuadrado de la ordenada a la abscisa es constante; se tiene, pues, como afirma Fermat

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}} = \frac{\overline{B'I}^2}{\overline{DI}}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}} > \frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}}$$

Si el punto O se desplaza sobre la tangente, la razón $\frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$ será mínima cuando este punto esté en B. Ahora bien, según el método de los extremos, Fermat debe igualar $\frac{\overline{OI}^2}{\overline{DI}}$ a $\frac{\overline{BC}^2}{\overline{DC}}$, y a continuación, reemplazando los cuadrados de OI y de BC por cantidades proporcionales, dependientes solamente de los segmentos situados sobre el eje, obtiene

$$\frac{\overline{EI}^2}{\overline{DI}} = \frac{\overline{EC}^2}{\overline{DC}}$$

o

$$\frac{(s - e)^2}{d - e} = \frac{s^2}{d}$$

y, eliminando denominadores, encuentra por reducción que

$$s = 2d.$$

En este caso, la incógnita CE es el doble de la abscisa del punto de contacto. Fermat añade que su método es general. Una vez más, el método de las tangentes de Fermat se reduce a mostrar que el valor del

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(A + E) - f(A)}{E}$$

es la pendiente de la curva en el punto de abscisa $x = A$. Desgraciadamente, las explicaciones dadas por Fermat no eran suficientes y Descartes consideró que la distancia del pie E de la tangente a los diferentes puntos de la parte convexa de la parábola debía ser máxima. Ahora bien, aplicando la regla de Fermat a este pretendido máximo, Descartes llegó a un resultado absurdo. Sacó, pues, la

conclusión de que había un defecto en esta regla, y propuso modificaciones. La discusión había comenzado, y uno y otro intentaron justificar su método, adoptando cada uno un punto de vista diferente: Descartes consideraba que líneas rectas o curvas que tienen dos puntos comunes y que se aproximan indefinidamente se convierten en tangentes cuando estos dos puntos coinciden, mientras que Fermat llevaba la cuestión de la tangente a su método de máximos y mínimos. En particular, Descartes desafió a Fermat para que aplicara su método a la curva que lleva su nombre

$$x^3 + y^3 = cxy$$

donde y es una función implícita de x.

Sustituyamos x por la variable $x + E$ e y por $y(1 + \frac{E}{a})$ (obtenida mediante triángulos semejantes, es decir, $\frac{y}{a} = \frac{\text{ordenada}}{(a + e)}$. Se tiene

$$(x + E)^3 + y^3(1 + \tfrac{E}{a})^3 - cy(x + E)(1 + \tfrac{E}{a}) = 0$$

y

$$E(3x^2 + \tfrac{3y^2}{a} - \tfrac{cxy}{a} - cy) + E^2(3x + \tfrac{3y^3}{a^2} - \tfrac{cy}{a}) + E(1 + \tfrac{y}{a^2}) = 0$$

Dividiendo por E, se tiene

$$3x^2 + \tfrac{3y^3}{a} - \tfrac{cxy}{a} - cy + E(3x + \tfrac{3y^2}{a^2} - \tfrac{cy}{a}) + E^2(1 + \tfrac{y}{a^2}) = 0$$

Basta ahora eliminar E y aislar a

$$3x^2 + \tfrac{3y^2}{a} - \tfrac{cxy}{a} - cy = 0$$

y se obtiene

$$a = \frac{3y^2 - cxy}{cy - 3x^2}$$

Conscientes uno y otro de que sus métodos no podían aplicarse así más que a las curvas «geométricas», Descartes y Fermat intentaron poner remedio a esta situación cada uno a su manera. Descartes lo intentó una sola vez con éxito al tratar de obtener las tangentes a la cicloide. Asimismo, Fermat estableció el principio de que es posible sustituir las ordenadas de las curvas por las de las tangentes y los arcos de curvas por las porciones de tangente que tengan la misma proyección sobre el eje, aplicando su método a la ruleta. Llegó así a determinar las tangentes de varias curvas trascendentes.

La integración en Fermat

El método de integración llamado de los indivisibles de Cavalieri (véase el tomo I, p. 314) muestra principalmente que

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para todas las potencias enteras positivas. Sin embargo, después de la publicación de este resultado en 1635, no proporcionó ninguna demostración completa más que para $n = 4$.

En 1635, Fermat demostró rigurosamente este resultado general y, en la misma época, consiguió extenderlo a las potencias fraccionarias positivas por medio de parábolas generales de la forma $y^m a^n = b^m x^n$. Además, encontró las cuadraturas y los centros de gravedad de estas parábolas. Se interesó por la cruadratura de la hipérbola fraccionaria aplicando una técnica equivalente a la que se utiliza para el cálculo de la integral definida: división del área bajo la curva en pequeños elementos, estimación de la suma de los elementos del área mediante rectángulos y de la ecuación analítica de la curva, procedimiento utilizado por Fermat para expresar el equivalente de lo que se obtiene sirviéndose del límite de la suma. Según Boyer, Fermat llegó a reconocer todos los aspectos de la integral salvo el de la integral misma. El procedimiento utilizado por Fermat, prosigue Boyer, consiste en encontrar una cuadratura, es decir, en resolver un problema geométrico específico. Subrayemos, finalmente, que la rectificación de curvas atrajo la atención de Fermat, que efectuó la de la parábola semicúbica.

Fermat y la teoría de números

Fue sobre todo en la teoría de números, inaugurada por Diofanto en la Antigüedad, donde Fermat se reveló sin rival, como Pascal atestigua en una carta:

> Buscad en otra parte quien os siga en vuestras invenciones numéricas; os confieso que me superan con mucho; no soy capaz más que de admirarlas.

Los trabajos de Fermat en teoría de números están contenidos en sus «observaciones», escritas en los márgenes de su ejemplar del Diofanto de Bachet[2] y en su «correspondencia». Para hacerse una idea más exacta de las contribuciones de Fermat a la reina de las ciencias matemáticas, según Gauss, hay que tener en cuenta sus dos fuentes: la correspondencia aporta un complemento precioso a sus observaciones.

Los primeros estudios de Fermat en teoría de números se remontan a 1636, año en el que consigue dilucidar el problema siguiente:

«Sea $x^2 + 2(a + b)x = a^2 + b^2$, donde a y b son racionales. Demostrar que si x es raíz, entonces es una diferencia de dos números inconmensurables.»

Después, viene el período más fecundo, que se extiende desde 1638 hasta 1644, en el que Fermat demuestra su verdadero talento. En efecto, da a conocer las proposiciones siguientes:

1) Ningún triángulo rectángulo tiene por área un cuadrado.
2) Las ecuaciones $x^4 + y^4 = z^4$ y $x^3 + y^3 = z^3$ son irresolubles en términos de números racionales, así como $x^2 + y^2 = z^2$.
3) Ningún número de la forma $8k - 1$ es cuadrado o suma de dos o tres cuadrados.
4) Todo número es la suma de tres números triangulares o más, de cuatro números cuadrados, de cinco números pentágonos, etc.

Las proposiciones 1, 2 y 4 fueron demostradas, según parece, por su método de «descenso infinito», que está fundado en una especie de inducción inversa. En efecto, si se supone que un número goza de una propiedad específica, y se puede probar que un número inferior goza también de esta propiedad, por iteración se llega a la conclusión del absurdo de la suposición, porque los números no pueden decrecer indefinidamente.

Ilustremos este método aplicándolo a la demostración de que $\sqrt{3}$ no es racional:

---

[2] Claude-Gaspard de Bachet (1591-1639) editó en 1621 la *Aritmética* de Diofanto.

Supongamos que $\sqrt{3} = \frac{p_1}{q_1}$, donde p_1 y q_1 son enteros positivos, tales que $p_1 > q_1$. Como $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, aislemos el $\sqrt{3}$ del numerador y reemplacemos el otro por $\frac{p_1}{q_1}$. Se tiene

$$\sqrt{3} = \frac{3q_1 - p_1}{p_1 - q_1}.$$

Es evidente que $3q_1 - p_1$ y $p_1 - q_1$ son enteros positivos en virtud de la desigualdad

$$\frac{3}{2} < \frac{p_1}{q_1} > 2$$

Sean p_2 y q_2 cada uno, respectivamente, inferior a p_1 y q_1, y tales que $\sqrt{3} = \frac{p_2}{q_2}$. Por iteración, se obtiene un «descenso infinito» en el cual p_n y q_n son enteros todavía más pequeños tales que $\sqrt{3} = \frac{p_n}{q_n}$.

Esto lleva a la conclusión de que siempre existen enteros positivos más pequeños. Por lo tanto, la premisa de que $\sqrt{3}$ es un cociente de enteros debe de ser falsa.

Fermat revela otros resultados de este período en su correspondencia con Mersenne, Frénicle y Roberval:

5) $2^n - 1$ es compuesto si n es compuesto; si n es primo, es congruente con 1 módulo $2n$, y sus divisores primos son de la forma $2nk + 1$.
6) $a^{p-1} \equiv 1$ mód p, si p es primo.
7) Cuando $n = p^2 + q^2$, con p y q primos entre sí, n no tiene ningún divisor de la forma $4k - 1$ (demostrado por descenso infinito).

Según Itard, Fermat crea durante esta época la teoría de las formas cuadráticas, al menos para la forma $x^2 + y^2$, y enuncia teoremas de factorización parcialmente erróneos, además de dar a conocer, en 1643, el procedimiento de factorización por diferencia de dos cuadrados.

Durante cerca de diez años, Fermat guarda silencio sobre la teoría de números, y es en una carta dirigida a Pascal donde reafirma el carácter de primo de $2^{2n} + 1$, para cualquier n. Después, en una segunda carta, enuncia una sucesión de proposiciones que se refieren casi todas a números primos. Después de un nuevo silencio

de más de dos años, lanza un desafío a los matemáticos ingleses y, en esta ocasión, vemos aparecer la ecuación de Pell: $nx^2 + 1 = y^2$.

A propósito de dos proposiciones de Fermat, sabemos ahora que:

1) $a^{p-1} \equiv 1$ mód p, si a es primo con p y si p es primo.
2) $2^{2n} + 1$ (llamado número de Fermat) no es primo si $5 < n \leqslant 16$.

En cuanto al célebre «gran teorema de Fermat» sobre la ecuación $x^n + y^n = z^n$, no aparece en ninguna parte en su correspondencia, en opinión de Itard. Aunque hubiera demostrado este teorema para $n = 3, 4$, por medio del método de descenso infinito, y hubiera mencionado en un margen de su ejemplar de Diofanto —el ejemplar no ha sido encontrado— estar en posesión de una prueba maravillosa, demasiado larga para escribirla en el margen, todas las tentativas para demostrarlo han resultado vanas hasta el momento. Quizás el gran Fermat se equivocó realmente por una vez.

Fermat y la teoría de probabilidades

En 1494, Luca Pacioli (1445-1514) publica su *Summa de arithmetica*, en la que discute los juegos de azar y sugiere el célebre problema de los puntos, que consiste en repartir equitativamente la apuesta entre jugadores cuya destreza es igual, y que convienen en dejar la partida antes de que ésta termine, con la condición de que, para ganar la partida, el primero debe alcanzar un número dado de puntos, diferente para cada uno de los jugadores. Durante el siglo XVI, dos científicos italianos estudiaron sobre todo las probabilidades en relación con el juego de los dados. En su manual del jugador titulado *Liber de ludo aleae*, publicado en 1663, Jerónimo Cardano (1501-1576) enuncia ciertas reglas válidas para resolver problemas de dados y hace una relación de las precauciones a tomar para evitar las trampas en los juegos de azar. Según Ore, Cardano formuló correctamente los principios fundamentales y comprendió en cierta medida la ley de los grandes números, además de obtener en su forma casi general la ley de sucesos repetitivos. Por su parte, Galileo

Galilei (1564-1642) resolvió el problema siguiente: con tres dados, demostrar que el número 10 aparece más frecuentemente que el 9. Así, en los 216 casos posibles, Galileo encuentra que 27 son favorables al número 10, contra 25 favorables al número 9.

A principios del siglo XVII, el simpático Johann Kepler (1571-1630), autor de las tres célebres leyes del movimiento planetario, afirma, a propósito de la aparición súbita de una estrella en 1605, que tales acontecimientos, como los del juego de dados, no pueden producirse fortuitamente. Con esta afirmación, Kepler demuestra no ser ajeno al campo de las probabilidades. Sin embargo, el cálculo de probabilidades nace verdaderamente en 1654, de un intercambio de correspondencia entre Blaise Pascal y Pierre de Fermat. Mientras Pascal vivía una actividad matemática muy intensa, el caballero de Méré, su amigo, le sugirió dos problemas que se hicieron célebres: el problema de la partida, enunciado por Pacioli, y el de los dados. Siguió una correspondencia entre Pascal y Fermat sobre estos problemas y los dos eminentes científicos franceses llegaron a soluciones originales, ligadas esencialmente al análisis combinatorio. En particular, la solución de Fermat al problema de los puntos era válida para un número de jugadores superior a dos. Subrayemos el hecho de que Fermat encuentra, antes de 1636, la fórmula

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

Ni uno ni otro publicaron sus resultados sobre el cálculo de probabilidades, y fue Huygens quien, al corriente de esta correspondencia, se interesó por ella hasta el punto de reunir los problemas ya resueltos y añadir algunos nuevos, cinco de ellos de Fermat y uno de Pascal; el conjunto fue publicado en un pequeño tratado, el primero que haya aparecido sobre el tema, en 1657.

ROBERVAL

Gilles Personne de Roberval (1602-1675), nació el 10 de agosto de 1602 en el pueblo de Roberval, cerca de Beauvais, de padres agricultores. Al parecer fue el único de sus hermanos o hermanas que recibió una educación elevada y un día, siendo joven, provisto de un buen bagaje científico y de buenos conocimientos de latín e

incluso de griego, Gilles Personne dejó su pueblo y su familia y recorrió el reino de Francia. En esta vida errante vivió, según se dice, de clases particulares, al tiempo que se instruía en el campo de las matemáticas. En 1627 estuvo en el sitio de La Rochelle, y a partir de 1628 se afincó en París.

Roberval no tardó en relacionarse con los científicos parisinos, y Mersenne, religioso de la orden de los mínimos, impresionado por la viva inteligencia de su joven amigo, le propuso la resolución del célebre problema de Arquímedes. Pero, después de examinarlo, Gilles Personne estimó que esta cuestión era superior a sus fuerzas y durante seis años se consagró más bien a un profundo estudio de las obras de Arquímedes en general. En 1632 obtuvo una cátedra de filosofía en el colegio de Maistre Gervais; estableció allí su domicilio y preparó las oposiciones a la cátedra de Ramus en el Colegio Real de Francia. Triunfó en las oposiciones de 1634 y fue titular de esta cátedra hasta su muerte, acaecida el 27 de septiembre de 1675. Fue miembro de la Academia de Ciencias desde su fundación en 1666.

El reglamento del Colegio Real exigía que el puesto de titular de una cátedra fuera sometido, cada tres años, a una oposición preparada por el titular del momento, debiendo recaer el puesto en el que fuese declarado vencedor. Por ello, Roberval fue siempre candidato y, para conservar cierta superioridad sobre sus rivales, tuvo que ocultar los resultados de sus trabajos para servirse de ellos cada tres años, en cada oposición. No hay, pues, que sorprenderse de que no publicara casi nada mientras vivió, y se le ha atribuido injustamente una reputación de hombre taimado. Sin embargo, a lo largo de su vida, perdió el crédito asociado a la mayoría de sus descubrimientos y, poseyendo además un carácter íntegro, se vio envuelto en numerosos litigios de prioridad.

Aunque hizo añadir a su apellido el de su pueblo, este título nobiliario no le convirtió en hombre de mundo. Soltero impenitente, se dice que hablaba con brutalidad y violencia, sin cuidarse de ser cortés cuando defendía sus ideas y, falto de una educación básica, se le conocía en París por sus maneras groseras y pedantes. Descartes y Roberval no estuvieron de acuerdo nunca, ni en el plano personal ni al nivel de las ideas que profesaba cada uno. Señalemos que Mersenne fue toda su vida amigo de Roberval y compartió a menudo sus ideas.

Su geometría de los indivisibles

Los métodos de los indivisibles utilizados por los geómetras del siglo XVII traducían concepciones procedentes de consideraciones sobre la constitución de la materia y sobre la cuestión del continuo. Unos sostenían que la materia podía dividirse infinitamente en partículas cada vez más pequeñas, sin poder asignar un fin a esta descomposición. Además, cada partícula infinitamente pequeña conservaba las propiedades de la materia sin ninguna alteración. Esta concepción, transportada al campo de las matemáticas, caracteriza el método de los indivisibles de Roberval.

Otros filósofos escolásticos pensaban que la descomposición de la materia era limitada, estando compuesta de partículas indivisibles (átomos), cuya naturaleza difiere de la de la materia. La materia estaba, pues, constituida por la aglomeración de estos átomos indivisibles, y el método de los indivisibles de Cavalieri traducía esta última concepción (véase tomo I, pp. 314-317).

En una carta a Torricelli, en 1647, Roberval declara haber utilizado los «indivisibles» cinco años antes de la publicación de la *Geometría* de Cavalieri, pero atribuye a éste último la invención de «esta sublime doctrina». Sin embargo, Roberval señala que su propio método no compara los heterogéneos, porque considera estos indivisibles como elementos infinitamente pequeños comparables entre sí, ya que un segmento, por ejemplo, está compuesto de segmentos indefinidos en números, y lo mismo una superficie, un sólido, etc.

Su método de los indivisibles se basa esencialmente en el de los antiguos geómetras —circunscritos e inscritos— y en la utilización de la doble desigualdad.

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + a^n > \frac{a^{n+1}}{n+1} > 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (a-1)^n$$

Este método le permitió, entre otras cosas, integrar las funciones de una potencia entera, «cuadrar» todas las parábolas en el infinito, resolver problemas sobre la hipérbola, el conoide hiperbólico y la concoide de circunferencia (área del caracol), y demostrar que un espacio infinito puede ser igual a un dominio finito. Fue capaz de demostrar la equivalencia de $\int_a^b \operatorname{sen} x dx = \cos a - \cos b$. Roberval fue, probablemente, el maestro de la integración en su época.

Roberval y la cicloide

La cuestión de la cicloide (llamada trocoide por Roberval) proviene del estudio infructuoso de la paradoja de Aristóteles: ¿por qué dos circunferencias concéntricas, una de ellas de diámetro inferior al de la otra, recorren una distancia igual si se las hace girar según una circunferencia, y por qué una vez separadas recorren distancias proporcionales a sus diámetros?

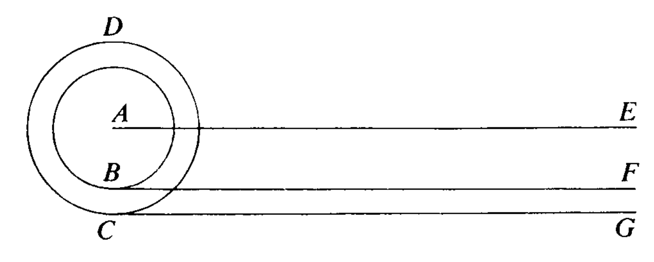


FIGURA 1.10

Mientras el punto *C* recorre en una revolución la distancia *CG*, *A* recorre *AE*, de manera que $CG = AE$.

Hemos dicho ya que Gilles Personne fracasó en su tentativa de encontrar la forma y calcular la cuadratura de la cicloide, problema que le planteó Mersenne a su llegada a París. Pero en 1634 Roberval consiguió determinar la forma de la curva y, entre 1634 y 1637, encontró la cuadratura y el volumen engendrado por la rotación de un arco de la curva alrededor de su base, además de explicar la manera de construirla por puntos. En esta ocasión, el profesor del Colegio Real inventó la sinusoide o, para él, la «compañera de la trocoide».

Mersenne informó de estos resultados a Fermat y también a Descartes, en particular en una carta fechada el 28 de abril de 1638, pero Descartes no parece haberse impresionado demasiado, a juzgar por su respuesta, vejatoria como poco. Después de algunas dudas, Fermat justificó a Roberval frente a la censura demasiado precipitada de sus proposiciones sobre la «ruleta» (nombre de la cicloide según Descartes y Pascal). A su vez, Descartes y Fermat ofrecieron sus propias soluciones a la cuadratura de un arco de

cicloide y, en ese mismo año, encontraron un método algebraico para determinar la tangente a la ruleta, mientras que Roberval utilizaba un procedimiento mecánico.

El método de las tangentes de Roberval

El método de las tangentes de Roberval se encuentra en un manuscrito que fue impreso con varias otras obras en las *Memorias de la Academia de Ciencias* en 1693 y cuyo contenido fue expuesto, según parece, en el Colegio Real en 1636.

Su célebre principio de invención se basa en la afirmación de «que en todas las demás líneas curvas, cualesquiera que sean, su tocante en cualquier punto es la línea de dirección del movimiento que tiene en ese mismo punto el móvil que la describe». Y su principio se formula así:

> La dirección del movimiento de un punto que describe una línea curva es la tocante de la línea curva en cada posición de ese punto.

A continuación, es la siguiente regla la que permite, según Roberval, trazar esta tangente a una curva dada:

> Por las propiedades específicas de la línea dada (que os serán dadas) examinad los distintos movimientos que tiene el punto que la describe en el lugar en el que queráis trazar la tocante: de todos estos movimientos compuestos en uno solo, trazad la línea de dirección del movimiento compuesto; tendréis la tocante de la línea curva.

Ilustremos el método de Roberval para la determinación de la tangente a la parábola:

Sea la parábola de la figura, en la que F es el foco, d la directriz y S el vértice; unamos F con S y prolonguemos FS hacia A; hagamos $SA = SF$. Consideremos el punto E de la parábola por el cual queremos trazar la tangente a la curva. Prolonguemos FE hacia D, y EI perpendicular a AF, y después tracemos HE paralela al eje ASI. El movimiento del punto E que describe la curva se compone de dos movimientos rectos e iguales, uno sobre la recta FE y otro sobre la recta HE, con una velocidad igual porque $FE = AI$. La bisectriz de

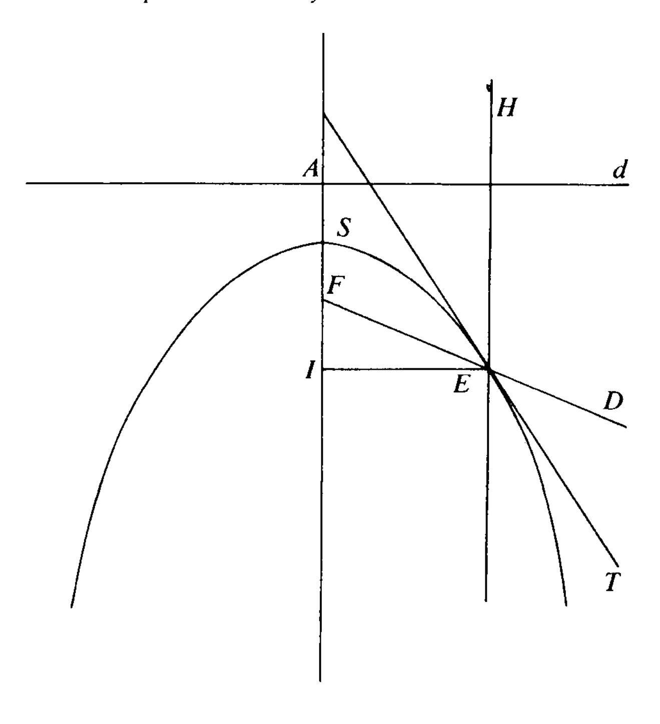


FIGURA 1.11

FEH es la diagonal de un rombo, dirección del movimiento compuesto de otros dos *HE* y *FE;* será, pues, la tocante buscada.

Con este método, Roberval consiguió trazar las tangentes a las cónicas y a las concoides, y a diferentes curvas como la cuadratriz, la cisoide, la espiral y la cicloide. Con motivo de la determinación de la tangente a la concoide, Roberval planteó la cuestión del punto de inflexión, pues había detectado dos puntos por los que no se podían trazar tangentes. Estos son los puntos de inflexión que constituyen, por otra parte, el tema de una carta dirigida a Fermat el 22 de noviembre de 1636.

La geometría analítica de Roberval

Roberval nos dejó dos tratados de geometría analítica. El *De recognitione aequationum* es una teoría de ecuaciones emparentada con los trabajos de Vieta y de Descartes. En efecto, Roberval utiliza el convenio de Vieta para designar las cantidades conocidas e incógnitas, y sustituye la palabra «aequatur» de este último por el signo de igualdad de Descartes. En particular, se puede subrayar que Roberval ordena los términos de una ecuación haciéndolos pasar todos a un miembro, contrariamente a Vieta y, en un ejemplo, no tiene en cuenta la existencia de raíces imaginarias.

En su segunda obra, titulada *De geometrica planarum et cubicarum aequationum resolutione,* el único matemático profesional de su época trata de la geometría analítica en el sentido de Descartes. Se interesa por dos problemas: la representación de los lugares (geométricos) mediante ecuaciones y el recurso a la intersección de lugares para resolver ecuaciones.

Roberval es también el autor de un tratado de geometría elemental, redactado según un programa de enseñanza destinado al parecer a los alumnos del colegio de Maistre Gervais.

TORRICELLI

Evangelista Torricelli (1608-1647), físico y matemático italiano, nació el 15 de octubre de 1608 en Faenza, cerca de Ravena. Estudió primero en el colegio de los jesuitas de su ciudad natal. Después, a los veinte años, fue enviado a Roma, donde recibió una formación matemática. En 1638, Torricelli entró en contacto con los trabajos de Galileo y se sintió profundamente impresionado. En 1641, atrajo la atención de Galileo por un trabajo sobre el movimiento de los cuerpos pesantes, y este último le invitó a Florencia. Torricelli se apresuró a responder a esta invitación, y se convirtió a la vez en secretario y amigo de Galileo durante tres meses. Sucedió a Galileo como matemático del gran duque de Toscana. Torricelli mantuvo una correspondencia importante con los matemáticos de su época, en particular con Roberval y Mersenne. La publicación, en 1644, de su *Opera geometrica* fue el origen de una larga polémica que le afectó mucho. Murió el 25 de octubre de 1647 en Florencia.

Torricelli y el análisis

Torricelli conocía bien los trabajos de Arquímedes, de Galileo y el método de los indivisibles de Cavalieri.

Sabemos que Cavalieri se había preocupado poco por el rigor matemático de los indivisibles y por las dificultades lógicas con que tropezaba su método. Por el contrario, su joven amigo Torricelli, alumno de Galileo, parece haber sido consciente de esas dificultades y haberse dado cuenta plenamente de las ventajas e inconvenientes del método. Por eso, no satisfecho de las demostraciones por el método de Cavalieri, elaboró otras pruebas a la manera de Arquímedes (método de exhaustión) a guisa de suplemento a estas demostraciones. Así, por ejemplo, en su *De dimensione parabolae,* Torricelli presentó veintiuna demostraciones de la cuadratura de la parábola, diez de ellas elaboradas por el método de los antiguos, y

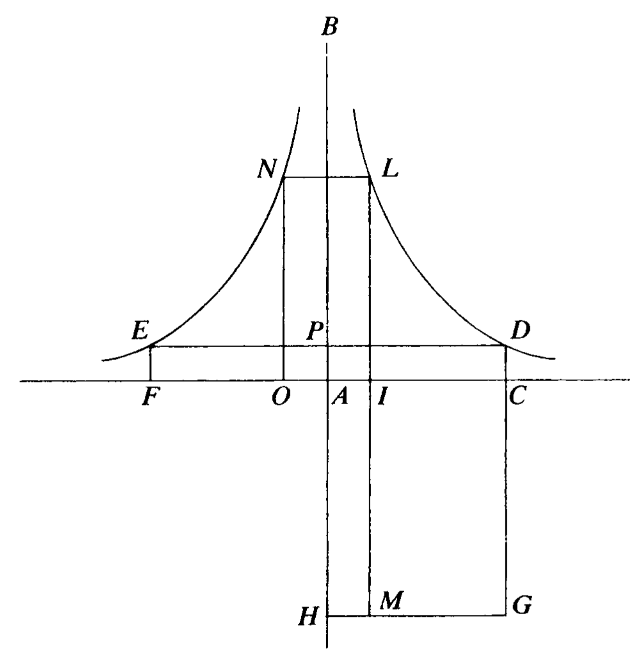


FIGURA 1.12

otras once utilizando los indivisibles. Además, Torricelli y Cavalieri sabían perfectamente que el método de los indivisibles conducía a veces a resultados absurdos, y estos dos discípulos de Galileo imaginaron incluso algunos ejemplos de esta naturaleza con el fin de refutar los que otros habían encontrado, o de profundizar aún más en la cuestión. Sin ningún género de dudas, Torricelli sobrepasó netamente a su maestro Cavalieri en flexibilidad y en perspicacia en el uso de los indivisibles para realizar nuevos descubrimientos.

En 1641, Torricelli contribuyó de manera original al desarrollo del cálculo integral demostrando que la rotación de sólidos de longitud infinita engendraba un volumen finito. Torricelli creía erróneamente haber sido el primero en descubrir un resultado de esta naturaleza, porque Oresme, Fermat y Roberval habían previsto resultados semejantes. He aquí su demostración para un sólido hiperbólico «agudo».

Consideremos una hipérbola cuyas asíntotas *AB, AC* forman un ángulo recto. Desde un punto arbitrario *D* sobre la hipérbola, trazamos *DC* paralela a *AB,* y *DP* paralela a *AC.* Entonces la rotación de la figura entera alrededor del eje *AB* engendra el sólido hiperbólico *EBD* y el cilindro *FEDC* que tiene la misma base que el sólido. Prolonguemos *BA* hacia *H* y, sobre el diámetro *AH* imaginamos una circunferencia (en el plano) construida perpendicularmente a la asíntota *AC.* Sobre la base *AH* reposa el cilindro *ACGH,* de altura *AC,* la cual es el radio del sólido «agudo». Torricelli afirma que el conjunto *FEBDC,* a pesar de su longitud infinita, es igual al cilindro *ACGH.*

Si se escoge el punto *H* de manera que $AH = 2IL$, se tiene que el área lateral del cilindro *ONLI* es igual al área de la sección del cilindro *ACGH* por *IM.* La primera, cuando *A* se mueve hasta *C,* genera el volumen de revolución, y la segunda, también cuando *A* se mueve hasta *C,* genera el volumen del cilindro *ACGH.* En consecuencia, ambos volúmenes son iguales.

Torricelli subraya que esta demostración, a pesar de su claridad y del hecho de que ha sido suficientemente confirmada por los ejemplos que la preceden, será repetida más adelante por el método de los antiguos, con el fin de satisfacer a los que tienen dudas sobre los indivisibles. Pero, para él, esta demostración no es más cierta que la elaboración por el método de los indivisibles.

Esta demostración, precedida de cinco lemas y seguida de veinti-

nueve corolarios, forma parte de un tratado incluido en las *Opere* que se titula «De solido hyperbolico acuto».

En su tratado «De infinitis hyperbolis» (*Opere,* vol. I, parte II, pp. 231-274), encontramos el primer teorema general del cálculo, enunciado en una terminología geométrica, que es equivalente a

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para todos los valores racionales de n, salvo para $n = -1$. Torricelli demostró implícitamente esta célebre fórmula a partir del resultado de que si $y^p = kx^q$, donde p y q son enteros positivos, entonces

$$\frac{ydx}{xdy} = \frac{p}{q}$$

Sabemos que Cavalieri demostró ese resultado para valores enteros de n. La generalización para n racional cualquiera, salvo $n = -1$, parece haber sido realizada de manera independiente por Fermat y Torricelli, aunque los historiadores estén divididos sobre esta cuestión de prioridad. La principal dificultad de interpretación proviene, evidentemente, del hecho de que Fermat no publicó, prácticamente, sus descubrimientos durante su vida.

Sus trabajos sobre la tangente

Torricelli se interesó por el problema de la cicloide, tanto en su correspondencia con Mersenne como por los trabajos de Galileo. En 1643, Mersenne recibe de Torricelli la cuadratura de la cicloide, y en 1644 este resultado, acompañado de la construcción de las tangentes, es publicado en un texto incluido en sus *Opere.*

Al principio, Torricelli basa la búsqueda de las tangentes en la definición antigua: una línea que toca a la curva sólo en un punto. Descubre que, si *PT* es tangente en *P,* punto cualquiera de la hipérbola de la figura 1.13, entonces *TE* es a *EA* como la razón de las potencias *AB* y *AE.*

Si la hipérbola, por ejemplo, es $x^q y^p = c$, la razón de la subtangente a la abscisa es $\frac{p}{q}$ (véase *supra*). Torricelli demostró también que la recta *PT,* determinada por la razón anterior, no es tangente

en P (intercepta la hipérbola en otro punto diferente de P). Esto conduce a una contradicción.

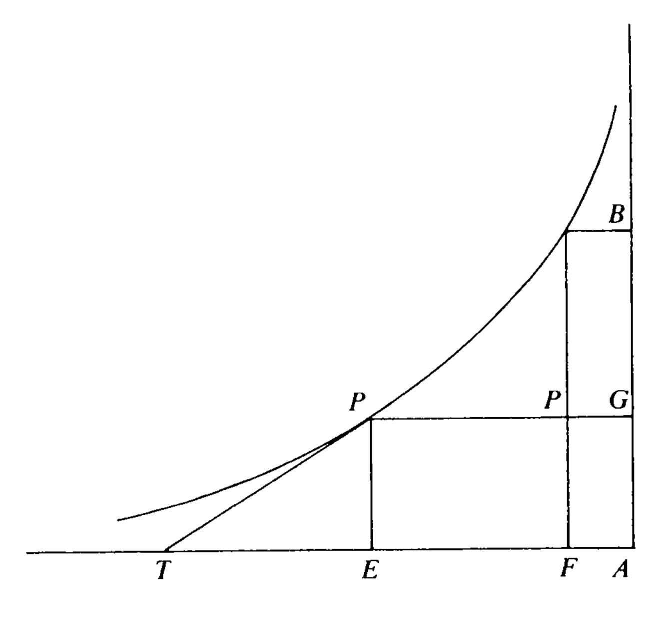


FIGURA 1.13

El método de las tangentes de Torricelli se basa esencialmente en una concepción dinámica de la tangente, la cual resulta de la composición de dos movimientos de un punto móvil que traza la curva. Trazar la tangente a una curva descrita por el movimiento de un punto que resulta de la composición de dos movimientos consiste, pues, en determinar la resultante de las velocidades de los dos movimientos que, a su vez, reposa sobre la tangente de la curva en este punto móvil.

Torricelli no mencionaba en su exposición que Roberval había obtenido resultados completamente análogos antes que él, y según un principio mecánico prácticamente idéntico. Roberval, en 1646, acusó a Torricelli de plagio, y así se originó una polémica. Indiscutiblemente, Roberval descubrió el método antes que el matemático italiano, pero éste último publicó sus descubrimientos antes que el profesor del Colegio Real. Sin embargo, los dos autores utilizaron la

composición de movimientos, que recuerda la tangente a la espiral de Arquímedes. Por otra parte, la composición de movimientos fue utilizada por Arquímedes, Galileo, Descartes y otros. Además, Torricelli aplicó este principio a la cicloide y a otras curvas.

En su *De infinitis spiralibus,* Torricelli estudió sistemáticamente las propiedades fundamentales de la espiral logarítmica (llamada por él geométrica), el trazado de cada uno de sus arcos, y la cuadratura de la superficie limitada por la curva.

Torricelli consideró las curvas generadas por un punto que se mueve a lo largo de una línea en rotación uniforme, con una velocidad que no es necesariamente uniforme, sino que es más bien una función de su distancia a un punto fijo alrededor del cual está en rotación la línea. En particular, la espiral logarítmica se obtiene cuando la velocidad es tal que en cada intervalo de tiempo igual las distancias del punto móvil al punto fijo están en proporciones continuas.

En coordenadas polares, la ecuación de la espiral logarítmica es $r = a \cdot e^{\theta \operatorname{cotg} \alpha}$. Aunque Torricelli no trató estas curvas analíticamente, consiguió, mediante consideraciones geométricas y mecánicas, determinar las tangentes y efectuar la rectificación de esta curva en 1645. Mencionemos también que el célebre físico italiano se

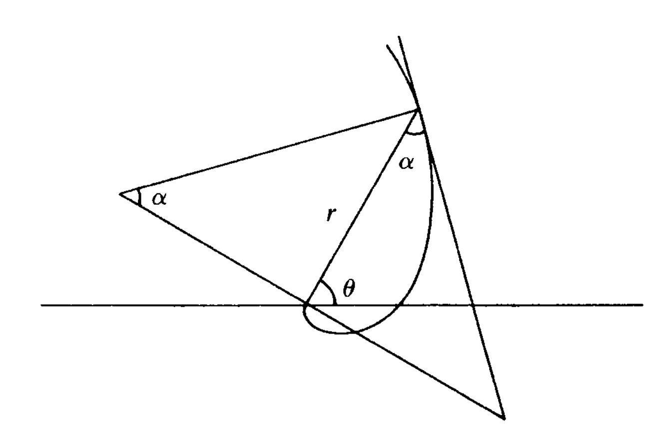


FIGURA 1.14

interesó por la función logarítmica y, poco antes de su muerte, trazó la gráfica de la función $x = \log y$, consiguió determinar el área limitada por la curva, sus asíntotas, y el volumen del sólido obtenido por rotación del área alrededor del eje horizontal.

Sirviéndose del antiguo método de exhaustión de los antiguos, del método de los indivisibles de Cavalieri y, probablemente, de la composición de movimientos de Galileo, Torricelli llegó a un cierto número de anticipaciones notables en el cálculo. Mencionemos los numerosos teoremas sobre las cuadraturas y las tangentes y algunas rectificaciones de curvas. Sin embargo, hablamos de anticipaciones, a propósito del cálculo diferencial e integral, porque debía franquearse todavía otra etapa antes de poder afirmar que el cálculo estaba bien fundamentado. Aludimos, evidentemente, al teorema fundamental del cálculo integral que expresa la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración. Sin embargo, algunos matemáticos casi llegaron a elucidar esta relación fundamental antes que Newton y Leibniz.

Torricelli reconoce, según parece, esta relación de reciprocidad desde un punto de vista mecánico en un manuscrito que data de

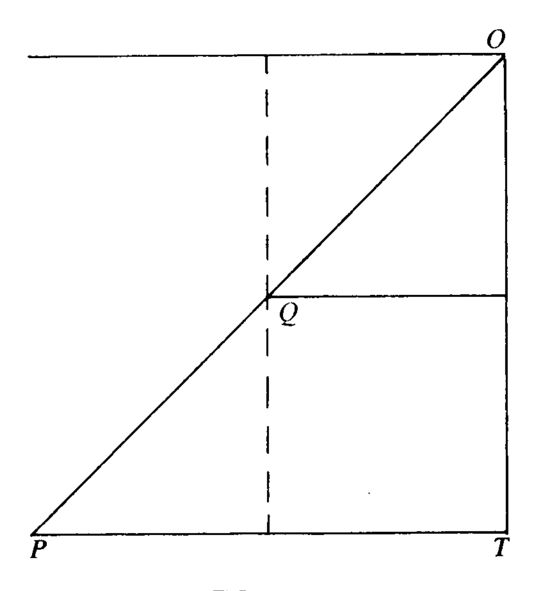


FIGURA 1.15

1647, y que no fue publicado hasta 1919. Es en los trabajos de Galileo publicados en su célebre *Discorsi e dimostrazione matematiche intorno a due nuove scienze* donde Torricelli busca la inspiración para sus propias investigaciones sobre esta cuestión.

En su *Discurso,* Galileo representa el movimiento uniformemente acelerado mediante un diagrama en el que el tiempo t está como abscisa y la velocidad v como ordenada.

Si O es el origen, P el punto correspondiente al instante t, y T la proyección sobre el eje de t, el espacio s recorrido desde el instante $t = 0$ hasta el instante t se mide con el área del triángulo OTP, es decir, $s = \frac{1}{2} gt^2$, y, generalizando, se obtiene

$$s = \int_0^t gt\, dt$$

Considerando los dos diagramas del espacio y de la velocidad como función del tiempo, Torricelli enunció que las ordenadas de la curva del espacio son proporcionales a las áreas limitadas por la curva de la velocidad, mientras que las ordenadas de los puntos sobre la curva de la velocidad son los coeficientes angulares de las tangentes de la curva del espacio. Según Carrucio esto confirma, desde un punto de vista mecánico, el carácter recíproco de las operaciones de integración y diferenciación. Por el contrario, los historiadores de las matemáticas tienen ciertas dudas a este respecto, o parecen querer evitar pronunciarse sobre el tema.

Sin duda alguna, Torricelli fue uno de los matemáticos más prometedores del siglo XVII y, gracias al trabajo de Mersenne, pudo mantener correspondencia e intercambiar ideas con los grandes matemáticos franceses de esa época. En la actualidad, Torricelli es probablemente más conocido como físico, porque, siendo discípulo de Galileo, su interés por la física le condujo, en particular, a la invención del barómetro.

Murió a los 39 años, en plena posesión de sus facultades intelectuales y, si el destino hubiera querido prolongar su vida hasta una duración normal, quizá los títulos de gloria de Torricelli se habrían multiplicado otro tanto.

PASCAL

Blaise Pascal (1623-1662), nació en Clermont-Ferrand. Era el segundo hijo de Etienne Pascal, presidente del Tribunal de Impuestos. Este perdió a su mujer en 1626 y decidió, en 1631, instalarse con su hijo y sus dos hijas en París, con el fin de consagrarse a la educación de Blaise. Etienne Pascal era también un matemático aficionado que, manteniéndose al corriente de las principales actividades matemáticas de su tiempo, fue capaz de realizar con éxito algunos estudios de naturaleza matemática. Por ejemplo, el «caracol de Pascal» recibió ese nombre en honor de Etienne y fue Gilles Personne de Roberval quien sugirió esta denominación. Además, Mersenne nos habla de proposiciones admirables que al parecer demostró sobre los triángulos, y Fermat también habla de ello.

En 1634-1635, Blaise se inicia en las matemáticas contra la voluntad de su padre quien, según se dice, temiendo que este estudio le apasionara hasta el punto de perjudicar su débil constitución y le distrajera del latín o las lenguas, había prohibido que se le enseñara la geometría e incluso que su hijo pudiera tener acceso a obras de matemáticas. Sin embargo, sobre la base de una información que reducía la geometría a una ciencia consistente en trazar figuras exactas, el joven Pascal emprende un día, a los doce años, la tarea de demostrar la trigesimosegunda proposición de Euclides, y su padre le sorprende en ese trabajo. Asombrado por la precocidad de su hijo, Etienne suspende la prohibición, le facilita los *Elementos* y Blaise puede, desde ese momento, dar rienda libre a su inteligencia. Después de haber leído a Euclides, el joven Pascal se sumerge en los trabajos de Désargues. A los catorce años es admitido, junto con su padre, en la Academia de Mersenne, que agrupa a hombres como Mersenne, Désargues, Roberval, Mydorge y otros. A los dieciséis años, expone allí teorías interesantes, como el descubrimiento de una propiedad fundamental de las cónicas llamada desde entonces el «hexágono de Pascal». En 1640, publica una pequeña obra titulada *Ensayo sobre las cónicas,* del que nos quedan solamente dos ejemplares, uno en París y el otro en Hannóver. Este pequeño ensayo, muy corto, termina con la promesa de un trabajo más extenso y parece, en efecto, que Pascal prosiguió este estudio a lo largo de su vida, redactando un trabajo de conjunto en forma manuscrita hacia 1654.

Pero Pascal, aun siendo un geómetra, consagró varios años, a partir de 1640, a la construcción de una máquina artimética, destinada a simplificar los cálculos fastidiosos que debía efectuar su padre como comisario para la recaudación de impuestos en Normandía. Su salud comenzó a alterarse cuando cumplió los dieciocho años, pero esto no le impidió inventar su máquina de calcular cuando sólo tenía diecinueve años. Más tarde, en Ruán, a los veintitrés años, después de una visita de Pierre Petit que repitió ante él los experimentos de Torricelli sobre la gravedad, se apresuró a disponer todo para verificar las conclusiones del físico italiano, cosa que realizó con éxito.

En 1647, gravemente enfermo, Blaise Pascal se instala en París con su hermana Jacqueline y prepara, después de una entrevista con Descartes, su experimento del Puy de Dôme, pues no estaba enteramente satisfecho de los experimentos de Ruán. Y el 19 de septiembre de 1648, el experimento sobre la gravedad realizado en el Puy de Dôme (1465 m) fue un éxito completo. En 1651, Etienne Pascal muere y, un año más tarde, Jacqueline, la hermana menor de Blaise, entra en el convento de Port-Royal. Así, desde 1652 hasta 1654 vive solo en París y emprende la redacción del *Tratado del vacío,* revisa el *Tratado del equilibrio de los licores* y el *Tratado de la gravedad,* presenta un «Memorial a la Academia parisina» en el que enumera sus proyectos científicos, intercambia cartas sobre el problema de las partidas y el cálculo de probabilidades con Fermat, y redacta el *Tratado del triángulo aritmético* y diversos trabajos anejos.

El lunes 23 de noviembre de 1654, es la «noche de fuego» en el curso de la cual Pascal, que se había convertido parcialmente al jansenismo en 1646, vive un éxtasis religioso intenso que le lleva a abandonar todo para seguir a los jansenistas. Se une a su hermana en Port-Royal y, durante cuatro años, se consagra a la religión. Habiendo atacado los jesuitas a los jansenistas, Pascal le responde, en 1656-1657, con dieciocho cartas llamadas las *Cartas provinciales* que constituyen un monumento de la literatura francesa. Mientras tanto, mantiene una correspondencia matemática con Fermat, Huygens y De Sluse.

Una tarde del año 1658, Pascal sufre un terrible dolor de muelas y, según parece, como distracción, aborda el estudio de la cicloide. Es la vuelta de Pascal a las matemáticas y el desafío lanzado a los

matemáticos en una carta circular anónima que contiene seis proposiciones sobre la ruleta. Después, bajo el nombre de Amos Dettonville, anagrama transparente de Louis de Montalte (célebre gracias a las *Cartas provinciales*), publicó, en diciembre de 1658, en forma de nueve fascículos, sus métodos y resultados, que son considerados como los trabajos matemáticos más significativos publicados durante su vida. A finales de 1659, Pascal, gravemente enfermo, abandona todo trabajo científico y consagra sus últimos años a sus *Pensamientos* y al establecimiento de una línea de autobuses, comúnmente llamada «empresa de carrozas a cinco sueldos». El 19 de agosto de 1662, muere Pascal a los 39 años.

El Ensayo sobre las cónicas

Primera obra impresa de Pascal, este ensayo es también el único estudio de geometría publicado en vida del autor. El *Ensayo sobre las cónicas,* del que nos quedan aún dos ejemplares, se presenta en la forma de un pequeño anuncio de formato 35 cm × 43 cm, impreso por un solo lado, con un número inusitado de errores de impresión o tipográficos, y del que se tiraron 50 ejemplares.

Parece como si Désargues no hubiera encontrado más que un solo oyente para apreciar las ideas fundamentalmente nuevas que introduce en el campo de la geometría y sus aplicaciones. Pascal no sólo comprende el interés de un estudio unitario de las cónicas tal como el que emprende Désargues con ayuda de consideraciones proyectivas, sino que intenta realizar este estudio por otro camino, el que anuncia su corto texto de 1640. Según el testimonio del mismo Pascal, la obra de Désargues le sirvió de inspiración y modelo.

El texto se compone de tres definiciones seguidas de tres lemas que deben servir de base al futuro tratado de las cónicas, y después de un esquemático programa de conjunto del que el autor extrae cinco enunciados de propiedades fundamentales y algunos ejemplos de problemas que debe tratar.

La primera definición introduce la noción de haz de rectas (ordenación de líneas) que Pascal extrae de los trabajos de Désargues y que asocia el caso de las rectas concurrentes al de las rectas paralelas. La segunda definición se refiere a la noción de sección de

cono y enumera los tres casos generales (elipse, hipérbola y parábola) y dos casos particulares. Una tercera definición se limita a anunciar el empleo de la palabra recta en lugar de línea recta.

El primer lema formula, en el caso particular de la circunferencia, la propiedad de alineación de tres puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito. El segundo lema afirma que el eje de un haz de planos pertenece al haz espacial de rectas determinado por las intersecciones de los planos del haz con otro plano. El tercer lema extiende el teorema del hexágono (primer lema) a una cónica cualquiera.

A continuación, a partir de estos tres lemas y de algunas de sus consecuencias, Pascal anuncia un tratado completo de las cónicas y enumera teoremas destinados a dar una idea bastante precisa de la generalidad de su método, además de ofrecer algunos ejemplos de los problemas que debe tratar. Los trabajos ulteriores de Pascal en geometría proyectiva son descritos y comentados en su «Memorial de la Academia parisina» y en una carta de Leibniz a Etienne Périer, el 30 de agosto de 1676. En lo que se refiere al gran *Tratado de las cónicas,* no fue editado, y su manuscrito parece definitivamente perdido. La valoración de la obra geométrica de Pascal no es cosa fácil a causa de la insuficiencia de las informaciones, por lo que preferimos citar la opinión del historiador René Taton, que es el especialista en la cuestión:

> Al revelar la riqueza de un pensamiento profundamente consciente de la potencia de los métodos proyectivos, este análisis nos conduce a considerar la obra geométrica de Pascal, desgraciadamente desaparecida, como una de las creaciones matemáticas más originales del siglo XVII. Nos confirma igualmente en la opinión de que la geometría fue uno de los campos de la ciencia donde el genio de Pascal se manifestó de forma más fecunda.

La máquina aritmética de Pascal

En 1640, la familia Pascal dejó París para instalarse en Ruán, donde Etienne había sido nombrado comisario para la recaudación de impuestos en Normandía. Blaise pensó realizar una máquina que permitiera efectuar las operaciones aritméticas elementales con el fin de facilitar las penosas operaciones contables de las que había

sido encargado su padre. Pero, partiendo de este objetivo utilitario, el hijo de de Etienne se interesó pronto por el problema general de la mecanización del cálculo aritmético.

Se ha creído durante mucho tiempo que Pascal había sido el primero en abordar el problema de la construcción de una máquina aritmética. De hecho, Wilhelm Schickard (1592-1635), profesor de astronomía, matemáticas y hebreo en la Universidad de Tubinga, había realizado en 1623 una máquina de ruedas dentadas capaz de calcular, a partir de unos números dados, instantánea y automáticamente la suma, la diferencia, el producto y el cociente de estos números. Desgraciadamente, el ejemplar que había hecho construir para Kepler fue destruido, y la correspondencia ulterior de Schickard no hace ya ninguna alusión a esta máquina. Unicamente se han conservado copias de cartas que incluyen dibujos de la máquina, y se ha podido construir una máquina que funciona correctamente a partir de las indicaciones de esas cartas.

Pascal utiliza, según sus palabras, «las luces de la geometría, la física y la mecánica» para elaborar los planos de su máquina. Contrata obreros, manda realizar más de cincuenta modelos, debe luchar también con un imitador, y supera toda suerte de dificultades tanto en el plano técnico como en el de la confección y la realización de las piezas. Finalmente, puede presentar al público, al canciller Séguier y a la reina Cristina de Suecia el prototipo final, que se vende a cien libras, y cuyo funcionamiento explica Roberval a quien lo desea. Existen todavía varios ejemplares en el Conservatorio Nacional de Artes y Oficios de París y en otros museos.

Aunque la máquina de Pascal sea todavía rudimentaria en su mecanismo y efectúe sólo las operaciones de adición y sustracción, tiene el mérito de funcionar eficazmente y de servir, desde 1662, como prototipo de varios modelos de «sumadoras», además de interesar a Leibniz en este problema.

Pascal y las probabilidades

Mientras que Pascal pone a punto diversos trabajos geométricos, su amigo, el caballero De Méré, le interroga con respecto a problemas del juego de dados y de las partidas. Por ejemplo, el primer problema del juego de dados que aparece en la primera carta de

Pascal a Fermat consiste en responder a la cuestión siguiente: un jugador debe obtener un seis con un dado lanzado ocho veces; supongamos que después de tres lanzamientos sin éxito, decide retirarse; ¿qué proporción de la apuesta le corresponde? Este fue el comienzo de una correspondencia mantenida entre los dos matemáticos franceses, y las seis cartas intercambiadas sirvieron de punto de partida de la moderna teoría de probabilidades.

Pascal relacionó el estudio de las probabilidades con el triángulo aritmético y las combinaciones, y de esta manera elaboró un método de demostración conocido actualmente con el nombre de «inducción matemática».

El triángulo de Pascal era conocido por Stifel, e incluso los chinos conocían algunas de sus propiedades para los coeficientes del binomio (véase el tomo I, p. 180). Sin embargo, Pascal, gracias a su inteligencia penetrante, dedujo de él propiedades nuevas y aplicaciones a la teoría de combinaciones y a la teoría de probabilidades. Además, algunas de estas propiedades fueron demostradas por su método de inducción. He aquí tres proposiciones fundamentales extraídas del *Tratado del triángulo aritmético:*

I. En todo triángulo aritmético, si dos células son contiguas en la misma base, la superior es la inferior como el número de células desde la superior hasta lo alto de la base es al número de células desde la inferior hasta abajo inclusive.

El método de demostración de esta propiedad es más significativo que la propiedad en sí misma, pues Pascal utilizó su método de inducción para demostrarla. El desarrollo del razonamiento por recurrencia fue obra de varias personas —Levi Ben Gershon, Maurolico, Fermat, entre otros— pero Pascal aplicó el método de inducción en su formulación casi complemente abstracta. La expresión «inducción matemática» parece haber sido utilizada por primera vez por De Morgan en 1838.

II. En todo triángulo aritmético, la suma de las células de una fila paralela cualquiera es igual al número de combinaciones del exponente de la fila en el exponente del triángulo.

Esta proposición relaciona estrechamente el triángulo con las combinaciones.

III. En un juego de dos jugadores, a cada uno de los cuales le falta un cierto número de partidas para terminar el juego. Encontrar mediante el triángulo aritmético el reparto que hay que hacer (si quieren separarse sin jugar), teniendo en cuenta las partidas que le faltan a cada uno. —Tómese en el triángulo la base en la que haya tantas células como partidas les falten a los dos juntos; a continuación, tómense en esta base tantas células seguidas, comenzando por la primera, como partidas le falten al primer jugador, y tómese la suma de sus números. Por tanto quedan tantas células como partidas le faltan al otro jugador. Tómese de nuevo la suma de sus números. Estas sumas son la una a la otra como las ventajas recíprocas de los jugadores.

Esta proposición relaciona el triángulo aritmético con el problema de determinar las apuestas entre dos jugadores que juegan varias partidas.

Fermat intentó interesar a Pascal en la teoría de números con poco éxito. Sin embargo, Blaise estudió un problema discutido en esa época, la determinación de la suma de las m-ésimas potencias de los *n* primeros enteros consecutivos. Recurriendo al triángulo aritmético, al razonamiento por recurrencia y al análisis infinitesimal, se obtiene el equivalente de

$$\int_0^a x^m \, dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Pascal y el análisis infinitesimal

Pascal se negó a utilizar el álgebra desarrollada por sus antecesores, y con ello se privó de un instrumento muy eficaz para desarrollar su pensamiento matemático. Los trabajos de Désargues en geometría proyectiva, así como la apreciación suavizada de Descartes sobre su *Ensayo,* pudieron incitar a Pascal a seguir utilizando el lenguaje geométrico e incluso mecánico, lo que le obligó a enunciados pesados y a menudo complicados para traducir pensamientos que él consideraba probablemente claros y límpidos.

Los estudios de Pascal en análisis versaron casi exclusivamente sobre las sumaciones, las integraciones necesarias para calcular arcos, superficies, volúmenes, y para determinar centros de grave-

dad. Por el contrario, no se ocupó en absoluto del problema de las tangentes.

Pascal conocía los indivisibles y estaba al corriente de las discusiones sobre la falta de rigor y los fallos observados en algunos autores. Por eso, aprovechando las advertencias hechas por algunos críticos del método, decidió, no obstante utilizar los indivisibles, porque veía en ese lenguaje una manera breve y elegante de expresar sus ideas.

Al introducir en su *Tratado de los senos del cuadrante de circunferencia* la noción de triángulo característico, Pascal estuvo notablemente cerca del descubrimiento del cálculo diferencial. En efecto, Leibniz declaró que fue la lectura de ese tratado y, particularmente, la utilización del triángulo característico, lo que le inspiró la invención del cálculo diferencial.

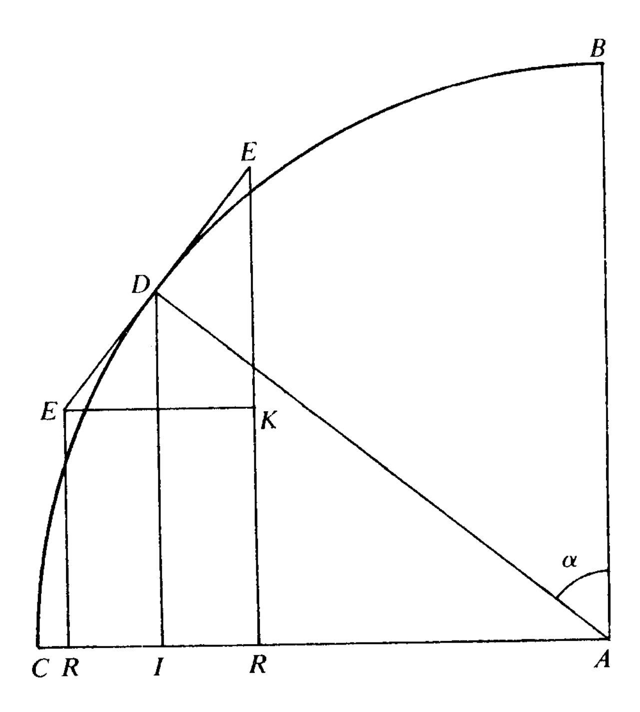


FIGURA 1.16

Pascal imagina un radio *AB* y una división del cuadrante de la circunferencia en arcos iguales que tenderán a cero cuando su número aumente indefinidamente. Desde los puntos de división, como *D* por ejemplo, traza tangentes sucesivas cuyas intersecciones formarán un polígono regular circunscrito. Pascal llama al triángulo rectángulo *EKE* el «triángulo característico». Sirviéndose de ese triángulo, llega a la integración del seno y encuentra teoremas equivalentes a

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = \cos \varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

Pascal no se consideraba a sí mismo como un matemático en primer lugar, y no creía, pues, necesario estar al corriente de las actividades matemáticas de su época. Era no sólo un virtuoso en matemáticas, sino también un diletante que se permitía elegir los temas a los que consagraba su tiempo. Pascal fue, efectivamente, un genio para captar rápidamente lo esencial de una idea y para introducirla a veces en situaciones completamente nuevas.

Sus trabajos ejercieron una influencia cierta en el desarrollo de las matemáticas. Subrayemos entre otras, el estímulo ejercido por la publicación de las *Cartas* de Dettonville sobre el estudio de la cicloide, la influencia que ejerció sobre Huygens, con ayuda de Fermat, a propósito del cálculo de probabilidades. Sus contribuciones originales en el dominio de las matemáticas son diversificadas y numerosas; mencionemos solamente la geometría proyectiva, la inducción matemática, la integración de los senos y el cálculo de probabilidades.

DÉSARGUES

Gérard Désargues (1591-1661) nació en Lyon, donde fue bautizado el 2 de marzo de 1591. Era, según parece, el menor de una familia de cuatro hijas y cuatro hijos. Su padre fue sucesivamente inquisidor en la senescalía, recaudador de los diezmos de la ciudad y de la

diócesis y notario real. No se tienen informaciones ni sobre los estudios que hizo, ni sobre la profesión que escogió. La primera indicación cierta sobre su vida nos le presenta, en 1630, instalado en París, donde le había sido concedido un privilegio real para diversos escritos que proyectaba publicar. Desde esta época, participa en la vida científica de la capital y entabla amistad con Mersenne, Mydorge, Pascal y Claude Hardy. Ingeniero cuyo talento era, según parece, apreciado por el cardenal de Richelieu, lleno de curiosidad por todas las cosas, tanto de la ciencia pura como de la técnica, de genio vivo, original y muy profundo, Désargues se sintió atraído también por ciertas técnicas ligadas a la arquitectura.

Reflexionando sobre las diferentes técnicas referentes a la perspectiva, la gnomónica, la práctica del corte de las piedras y la construcción de los cuadrantes solares, Désargues se esforzó por poner a punto nuevos métodos universales, basados en una comprensión de los fundamentos geométricos comunes a esas diferentes técnicas.

En 1636, publicó un corto texto de perspectiva que muestra que la geometría en para él bastante más un medio de simplificar y generalizar las diversas reglas gráficas utilizadas por las diferentes técnicas; y la perspectiva era, en su opinión, una aplicación directa de la geometría. Descartes y Fermat descubrireron en esta obra el talento geométrico de su autor; en cambio, ciertos teóricos de perspectiva no supieron descubrir su profunda originalidad.

En 1638, Désargues tomó parte en una controversia que implica, entre otros, a Descartes y Fermat sobre problemas de física y sobre el famoso problema de la determinación analítica de las tangentes a las curvas planas. Désargues, estimado por las dos partes enfrentadas, desempeñó, según parece, un papel muy objetivo, intentando conciliar las tesis de cada uno y excluir toda animosidad personal. A finales de 1638, discutió con Descartes su nueva teoría geométrica de las cónicas que estaba a punto de publicar en forma de pequeño tratado. Este tratado vio la luz en los primeros meses de 1639: fue su célebre *Borrador,* que recibió una acogida muy tibia; sólo Pascal tuvo el gran mérito de apreciar todo su valor e interés.

El *Borrador* fue atacado principalmente por Jean de Beaugrand pero, de forma general, su texto cayó en un olvido casi general. Después de la publicación de este trabajo de pionero en geometría proyectiva, Désargues publicó aún algunas obras, entre ellas dos

cuadernos sobre las cónicas —*Lecciones de tinieblas*— y el *Manual de perspectiva dirigido a los teóricos.*

Desde 1640 hasta 1644, Désargues parece haber estado profundamente afectado por las violentas polémicas que se desataron sobre su obra y sobre sí mismo. Desde 1644 hasta su muerte, acaecida en 1661, vivió sucesivamente en París, Lyon, y otra vez París en 1657, donde ocupó su tiempo en realizaciones arquitectónicas y fue de nuevo objeto de vivas críticas. No se sabe si murió en París, en Lyon o en Condrieu, pero una cosa es cierta: su obra no fue reconocida en su tiempo, y los ataques de que fue objeto eran desmesuradamente exagerados.

El Borrador

Publicado por Désargues en 1639, en cincuenta ejemplares, el *Borrador* se convirtió rápidamente en una pieza rara. Gracias a Michel Chasles fue encontrada una copia en una librería de lance en 1847, copia que sirvió de base a Poudra para su edición de las *Obras completas* de Désargues en 1964. Sin embargo, este documento no era un ejemplar original; afortunadamente, las investigaciones emprendidas por René Taton han permitido rastrear un original en la Biblioteca Nacional con la ayuda, según parece, de Pierre Moisy.

En el *Borrador* se encuentra un vocabulario que encierra numerosos términos nuevos y una forma de demostración que a menudo resulta pesada por el uso de productos de razones escritas sin ningún simbolismo de abreviación; las ideas generales no están presentes, y la compilación parece mala. No olvidemos señalar que la pesadez observada es, en esta época, cosa corriente, y que el desorden que aparece en el plano de la obra puede explicarse en parte porque Désargues consideraba su estudio como un esbozo destinado a ser progresivamente mejorado en el futuro.

La obra de renovación de la geometría presentida por Durero, Werner y Maurolico, fue claramente concebida por Désargues. Así, empujado por el deseo de racionalizar las diversas técnicas gráficas —la perspectiva, el trazado de planos y la construcción de cuadrantes solares— había conseguido no sólo discernir los principios geométricos subyacentes a estas técnicas, sino también

poner de relieve los procedimientos de la geometría proyectiva y las propiedades de la perspectiva geométrica.

Su *Borrador* es esencialmente un libro sobre las cónicas en el que Désargues estudia las propiedades comunes a las tres cónicas, parábola, elipse e hipérbola, que pertenecen igualmente a la circunferencia, buscando siempre en las propiedades de la circunferencia las que se conservan por perspectiva. La técnica utilizada es la proyección a partir de una circunferencia, y el concepto clave de su obra es el de «involución».

Las principales ideas rectoras que se encuentran en su obra son las nociones de punto y de recta en el infinito; la relación involutiva entre los puntos de un eje, o entre las rectas de un haz; la involución de cuatro puntos, introducida para la división armónica de puntos; las definiciones de polos, de polares, de triángulo polar; la involución de puntos conjugados con respecto a una cónica; la definición del diámetro como el polar de un punto en el infinito; los ejes, los diámetros conjugados, las asíntotas de una cónica obtenidas por proyección a partir de una circunferencia, o de otra cónica.

En particular, la relación involutiva entre dos pares de puntos E, F y E', F' puede ilustrarse como sigue:

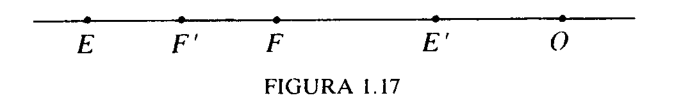


FIGURA 1.17

Los pares E, F y E', F' son una involución si existe O (centro de la involución) tal que

$$OE \cdot OF = OE' \cdot OF'.$$

En cuanto a la teoría de las polares, Désargues la introduce con ayuda de una circunferencia y de un punto tomado fuera de la circunferencia.

Existe un cuarto punto armónico F sobre toda línea de E que corte la circunferencia en C y D. Para todas estas líneas de E, los cuartos puntos armónicos se encuentran sobre una recta, la polar del punto E. Así, la línea FF' es la polar de A. Por ejemplo, Désargues

considera un diámetro de una cónica como la polar de un punto en el infinito.

Diversos problemas de geometría perspectiva fueron resueltos por Désargues después de 1639. El más célebre, al cual va unido su nombre, fue publicado en 1648 en el *Tratado de perspectiva* de Abraham Bosse (1611-1678), su discípulo y amigo. Es el teorema de Désargues, que enuncia que dos triángulos perspectivos en el espacio o en el plano son tales que los tres puntos de intersección de sus lados homólogos están alineados y recíprocamente.

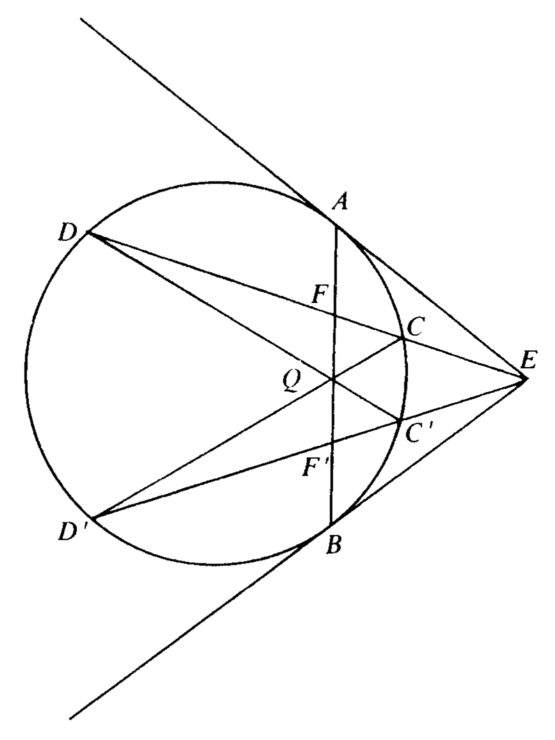


FIGURA 1.18

La geometría proyectiva fundada sobre la obra original de Désargues y el *Ensayo* de Pascal quedó olvidada rápidamente, y sólo el genio de Monge invirtió parcialmente la marcha de la

corriente matemática que prevaleció durante más de un siglo. Este olvido se explica en gran medida por el éxito casi inmediato de la *Geometría* de Descartes, los progresos fulgurantes del análisis infinitesimal, fundamentado en la utilización de los indivisibles y el punto de vista analítico que se extendió muy ampliamente en los métodos del análisis.

BIBLIOGRAFÍA

Auger, Léon, *Gilles Personne de Roberval,* París, Librairie Scientifique A. Blanchard, 1962.
Baron, Margaret E., *The origins of the infinitesimal calculus,* Oxford, Pergamon Press, 1969, pp. 108-205.
Bell, Eric, T., *Men of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1965, pp. 35-89.
Boseman, Henri, «Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal», *Mathesis,* 38, 1924, suplemento, pp. 1-59.
Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Willey & Sons, 1968, pp. 367-403.
Boyer, Carl B., *The history of the calculus and its conceptual development,* Nueva York, Dover, 1959, pp. 117-168.
Boyer, Carl B., «Descartes and the geometrization of algebra», *The American Mathematical Monthly,* 66 (1959), pp. 390-393.
Boyer, Carl B., *History of analytic geometry,* Nueva York, *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 74-106.
Boyer, Carl B., «Pascal: The man and the mathematician», *Scripta Mathematica,* 26, 1963, pp. 283-307.
Carrucio, Ettore, *Mathematics and logic in history and in contemporary thought,* Londres, Faber and Faber, 1964, pp. 178-191, 204-219.
Cassina, M. Ugo, *Sur l'histoire des concepts fondamentaux de la géométrie projective,* D-50, París, Palais de la Découverte, 1957, pp. 5-10.
Collette, Jean-Paul, *Histoire des mathématiques,* I, Montreal, ERPI, 1973.
Coolidge, Julian Lowell, «The origin of analytic geometry», *Osiris,* 1, 1936, pp. 231-250.
Coolidge, Julian Lowell, «The lengths of curves», *The American Mathematical Monthly,* 60, 1953, pp. 89-93.
Coolidge, Julian Lowell, «The story of tangents», *The American Mathematical Monthly,* 58, 1951, pp. 449-461.

Coolidge, Julian Lowell, *The mathematics of great amateurs,* Nueva York, Dover, 1963, pp. 89-102.
Court, N. A., «Desargues and his strange theorem», *Scripta Mathematica,* 20, 1954, pp. 5-13, 155-164.
Chapin, Margaret L., «Some lovers of the conic sections», *The Mathematics Teacher,* 19, 1926, pp. 36-45.
Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 552-576.
David, F. N., *Games gods and gambling,* Nueva York, Hafner, 1962, pp. 55-97.
Dedron, Pierre y Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens,* París, Magnard, 1959, pp. 194-230.
Descartes, René, *The geometry of René Descartes with a facsimilé of the first edition,* Nueva York, Dover, 1954.
Duhamel, M., «Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes de tangentes de Fermat et Descartes», *Mémoire de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France,* 32, 1864, pp. 269-330.
Eves, Howard, *An introduction to the history of mathematics,* 3.ª ed., Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1969, pp. 280-286, 289-297.
Forbes, E. G., «Descartes and the birth of analytic geometry», *Historia Mathematica,* 4, 1977, pp. 141-151.
Goldstine, Herman H., *The computer from Pascal to von Newmann,* Princeton, Nueva Jersey, Princeton University Press, 1972, pp. 6-7.
Got, Théophile, «Une énigme mathématique: Le dernier théorème de Fermat», en Le Lionnais, comp., *Les grands courants de la pensée mathématique,* Librairie Scientifique et Technique, 1962, pp. 90-98.
Itard, Jean, «Fermat précurseur du calcul différentiel», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 1, 1948, pp. 589-610.
Itard, Jean, «Les méthodes utilisées par Fermat en théorie des nombres», *Revue d'Histoire des Sciences,* 3, 1950, pp. 21-26.
Ivins, W. M. Jr., «A note on Gérard Désargues», *Scripta Mathematica,* 9, 1949, pp. 33-48.
Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 287-317, 342-353.
L'Oeuvre scientifique de Pascal, Centre International de Synthèse, P.U.F., 1964.
Meschkowski, Herbert, *Ways of thought of great mathematicians,* traducido del alemán por John Dyer-Bennet, Holden-Day, Inc., 1964, pp. 34-45.
Molland, A. G., «Schifting the foundations: Descartes's transformation of ancient geometry», *Historia Mathematica,* 3, 1976, pp. 21-49.
National Council of Teachers of Mathematics (The), *Historical topics for the mathematics classroom,* 31st Yearbook, Washington, D.C.,

N.C.T.M., 1969, pp. 112, 156-159, 178-182, 210-211, 227, 313-316, 318-320, 386-390, 409-413.

Ore, Oystein, *Number theory and its history,* Nueva York, McGraw-Hill, 1948, pp. 54-58, 69-75, 203-206.

Ore, Oystein, «Pascal and the invention of probability theory», *The American Mathematical Monthly,* 47, 1960, pp. 409-419.

Pascal, Blaise, *Pensées,* París, Editions Garnier, 1957. [*Pensamientos,* en *Obras,* I, Madrid, Alfaguara, 1981].

Phillips, J. P., «Brachistochrone, tautochrone, cycloid — apple of discord», *The Mathematics Teacher,* 60, 1967, pp. 506-508.

Rochot, Bernard, *La correspondance scientifique du Père Mersenne,* D-110, París, Palais de la Découverte, 1966.

Rosenthal, Arthur, «The history of calculus», *The American Mathematical Monthly,* 62, 1955, pp. 75-86.

Russo, F., «Pascal et l'analyse infinitésimale», *Revue d'Histoire des Sciences et leurs Applications,* 15, 1962, pp. 303-320.

Struik, Dirk J., *A concise history of mathematics,* 3.ª ed., Nueva York, Dover, 1967, pp. 99-109.

Struik, Dirk J., comp., *A source book in mathematics, 1200-1800,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969, pp. 21-31, 87-93, 143-168, 209-244.

Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. II, *La science moderne,* París, P.U.F., 1969, pp. 217-241. [*Historia general de las ciencias,* vol. II, *La ciencia moderna,* Barcelona, Destino, 1973].

Taton, René, *L'Œuvre mathématique de G. Désargues,* París, P.U.F., 1951.

Taton, René, «L'Essay sur les coniques de Pascal», *Revue d'Histoire des Sciences et leur Applications,* 8, 1955, pp. 1-18.

Taton, René, *La géométrie projective en France de Désargues à Poncelet,* D-4, París, Palais de la Découverte, 1951, pp. 1-16.

Taton, René, «La préhistoire de la géométrie moderne», *Revue d'Histoire des Sciences,* 2, 1948-49, pp. 197-204.

Todhunter, Isaac, *A history of the mathematical theory of probability,* Nueva York, G. E. Stechert, 1931, pp. 7-21.

Turnbull, H. W., *The great mathematicians,* 4.ª ed., Londres, Methuen, University Paperbacks, 1969, pp. 79-91.

Wren, F. L. y J. A. Garrett, «The development of the fundamental concepts of infinitesimal analysis», *The American Mathematical Monthly,* 40, 1929, pp. 269-275.

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles fueron las causas que provocaron la supremacía de Francia en matemáticas en el segundo tercio del siglo XVIII?
2. Describir las concepciones de Descartes sobre la geometría analítica.
3. ¿Por qué merece Fermat el título de coinventor de la nueva geometría?
4. Establecer un paralelismo entre la geometría de Descartes y la de Fermat. ¿Cuáles son las diferencias más notables?
5. Verificar la fórmula de los poliedros de Descartes para los cinco poliedros regulares.
6. Utilizar el método de Descartes para encontrar la tangente a la curva de ecuación $y^2 = 8x$ en el punto (4,7).
7. Encontrar la tangente a la curva de ecuación $x^2 = 5y$ en el punto (1,2) utilizando el método de Fermat.
8. ¿Difieren los métodos de las tangentes de Descartes y Fermat? Justificar la respuesta.
9. Utilizar el método de los máximos y mínimos de Fermat para encontrar los valores máximos o mínimos de $(x + 3)(x^2 + 3x - 4)$.
10. Utilizar el descenso infinito para demostrar que a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{5}$ no son racionales.
11. Demostrar mediante ejemplos que $2^{2^n} + 1$ para $5 < n \leqslant 16$, no es primo.
12. Demostrar que $2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, 2, 3$ es primo.
13. ¿Cómo explicar que la geometría proyectiva de Désargues y Pascal recibiera poca atención de sus contemporáneos.
14. ¿Cuáles fueron las contribuciones más notables de los matemáticos siguientes en el campo de las matemáticas?

    a) Descartes
    b) Fermat
    c) Roberval
    d) Torricelli
    e) Pascal
    f) Désargues

2. PERIODO DE TRANSICION

INTRODUCCIÓN

Aunque la geometría analítica, fundada por Descartes y Fermat, se extendió rápidamente, los científicos del siglo XVII no la asimilaron con la misma rapidez. Afortunadamente, las razones invocadas para explicar este desinterés parcial desaparecerán progresivamente gracias a los trabajos de la escuela holandesa, dirigida por Van Schooten. Además de proporcionar comentarios detallados sobre la geometría cartesiana, los científicos de esta escuela contribuirán a enriquecerla y popularizarla, y de ello resultará un cuerpo de doctrina bien sistematizado.

Los trabajos de Désargues y Pascal sobre geometría proyectiva fueron proseguidos por La Hire. Aunque la riqueza e inspiración de sus tratados fueran inferiores al *Borrador,* contribuyó al establecimiento de la notación algebraica de las razones, al empleo de la división armónica y a la clara presentación del tema. Desgraciadamente, sus trabajos fueron infravalorados, al igual que los de Mohr sobre las construcciones geométricas con la regla y el compás fijo.

Los trabajos sobre el análisis infinitesimal, emprendidos desde comienzos del siglo XVII, fueron continuados durante este período de transición, y el problema de los métodos y las técnicas siguió siendo el centro de interés, compartido por el conjunto de los científicos. Aunque en general se repitan los mismos temas, es importante señalar las aportaciones nuevas y originales. Citemos, a modo de ejemplo, las reglas sobre los extremos, la convergencia de las series infinitas, la utilización de técnicas algebraicas como los desarrollos en serie para diferenciar e integrar funciones, el reconocimiento de la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración y el desarrollo de la teoría de las evolutas y envolventes.

Durante el período que nos interesa, la supremacía francesa en matemáticas desaparece y, además de la escuela holandesa de

geometría, los trabajos enumerados provienen de numerosas personas que trabajan en diferentes países. Este período no está dominado ni por una nación ni por un grupo natural. Es esencialmente una etapa de transición que anuncia la próxima, dominada por dos científicos eminentes, uno inglés y el otro alemán.

Lenta asimilación de la geometría analítica

La idea fundamental de la geometría analítica de Descartes y Fermat consiste esencialmente en utilizar las ecuaciones algebraicas para estudiar y representar las curvas. Esta idea original marcaba la fusión del álgebra y la geometría, pero los matemáticos del siglo X-VII no se apresuraron a asimilarla y utilizarla. Sin embargo, este desinterés más o menos marcado puede explicarse por múltiples razones.

El *Ad locos* de Fermat, distribuido entre sus amigos, no fue publicado hata 1679. En la *Geometría* de Descartes se trataban los problemas de construcciones geométricas y sus soluciones de tal manera que muchos contemporáneos creyeron que la nueva geometría era un instrumento para resolver este tipo de problema. Aunque Descartes utilizó las ecuaciones de las curvas para encontrar las normales, obtener propiedades de los óvalos, etc., la realidad es que los problemas de construcción, por su amplitud, sobrepasan ampliamente a los demás temas tratados en su obra. Añadamos a esto la insistencia de Descartes en hacer las cosas de modo que la lectura de su texto resulte difícil a causa de su presentación, y ya tenemos algunas razones que justifican de alguna manera la difusión lenta de esta nueva geometría. Podemos también señalar que algunos matemáticos se oponían firmemente a la idea de servirse del álgebra para hacer geometría y viceversa, mientras que otros, como Thomas Hobbes (1588-1679), subrayan la falta de rigor de ciertos usuarios del álgebra y su crítica llegaba incluso a pretender que confundían los símbolos algebraicos con la geometría.

Afortunadamente, algunos matemáticos del siglo XVII supieron apreciar el trabajo de estos dos pioneros, y se esforzaron, en la medida de sus posibilidades, por propagar y extender la geometría analítica. La estancia de Descartes en Holanda pudo ejercer una influencia decisiva en el interés de los matemáticos holandeses por

la geometría analítica, como atestiguan las publicaciones holandesas sobre el tema.

VAN SCHOOTEN

Frans Van Schooten (1615-1660) sucedió a su padre como profesor de matemáticas en Leyden en 1646. Se propuso difundir la geometría de Descartes, clarificando sus ideas para hacerla más accesible. Así, publicó en 1649 una versión de ella en latín —lengua universal de los científicos de la época—, bajo el título *Geometria a Renato Des Cartes*, acompañada de comentarios y de las *Notae breves* de Florimond de Beaune (1601-1652). Esta obra fue reeditada, en forma de ediciones aumentadas, en 1659-1661, y después en 1683 y 1695.

La obra de Van Schooten sirvió para popularizar la geometría cartesiana, añadiéndole demostraciones adicionales, problemas de construcciones y nuevos lugares. Van Schooten introdujo la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y la forma algebraica de la transformación de coordenadas de un eje a otro; la línea recta intervenía solamente en la construcción del lugar de rectas de Pappus. Estudió también los óvalos de Descartes e hizo de ellos un estudio analítico en términos de sus ecuaciones. Una gran parte de los comentarios del matemático holandés se refieren a la solución gráfica de las ecuaciones cúbicas y cuárticas.

Las *Notae* de De Beaune, son esencialmente comentarios sobre la *Geometría* de Descartes, redactados hacia 1640 y aprobados por éste último. De Beaune explica las ideas fundamentales de Descartes, resaltando los lugares representables por ecuaciones simples de segundo grado, de una manera parecida a la de Fermat. En general, en lo que se refiere a los problemas de construcción, a los lugares, a las tangentes y a la interpretación de las coordenadas, De Beaune sigue fielmente el pensamiento de Descartes.

BARTHOLIN

Erasmus Bartholin (1625-1698), que fue alumno de Van Schooten y, desde un punto de vista literario, heredero de De Beaune, publicó

en 1651 una recopilación de las lecciones impartidas por su maestro, que se refieren únicamente al álgebra, con la notación de Descartes. Estos *Principia mathesos*, según este comentarista, debían servir de introducción a la *Geometría* de Descartes. Hacia 1656-1657, Van Schooten publicó sus *Exercitationes mathematicae* en los cuales el cálculo algebraico se aplicaba a los problemas geométricos. Después, Van Schooten publicó en 1659-1661 la segunda edición latina de la *Geometría* de Descartes lo que, según Boyer, marca un acontecimiento importante en el desarrollo de la geometría analítica. En particular, estos comentarios, que son al menos el doble de largos que el tratado de Descartes, comprenden, entre otros, problemas adicionales de lugares, la derivación de las ecuaciones de las cónicas, el estudio de las ecuaciones cuadráticas y una transformación de coordenadas equivalente a una traslación y a una rotación para casos particulares.

HUDDE

En las *Exercitationes mathematicae* de Van Schooten, se encuentra una sección consagrada al estudio de las secciones planas de una superficie de cuarto grado. Van Schooten aceptó incorporar este estudio de Johann Hudde (1629-1704) a su propia obra porque, según decía, era la primera vez, que él supiera, que se conseguía obtener curvas de grado superior (aparte de las cónicas) como secciones planas de una superficie. Así, partiendo de un segmento parabólico en el plano, Hudde erige otros segmentos parabólicos perpendiculares entre ellos de manera que formen una superficie de la que una sección es una curva de potencia cuarta, octava, etc. Esta generación jerárquica de curvas de grados superiores a partir de curvas de grados inferiores se obtiene en el espacio, y no en el plano como lo había hecho Descartes anteriormente. Subrayemos que este discípulo de Van Schooten estuvo muy cerca de establecer la geometría analítica en tres dimensiones. En efecto, Boyer considera que dos cambios menores en la notación de Hudde le habrían permitido probablemente preceder a La Hire en sus trabajos de geometría analítica del espacio.

Burgomaestre de la ciudad de Amsterdam durante treinta años, Hudde mantuvo correspondencia con De Witt y Huygens sobre

cuestiones de conservación de los canales y sobre problemas de probabilidades y de esperanza de vida. Detuvo el avance del ejército francés en 1672 dirigiendo los trabajos de inundación de Holanda.

En 1657-1658, Hudde contribuyó al desarrollo del análisis matemático con el descubrimiento de dos reglas aplicables a ecuaciones polinómicas. La primera corresponde, *grosso modo,* al teorema que enuncia que si r es una raíz doble de $p(x) = 0$, entonces r es también raíz de $p'(x) = 0$. La segunda es casi equivalente a nuestra regla moderna que afirma que si $p(a)$ es un extremo relativo de una función polinómica p, entonces $p'(a) = 0$. Estas dos reglas están contenidas en la edición latina de 1659-1661 de Van Schooten, que incluía también una obra escrita por Hudde y titulada *De reductione aequationum.* Es en esta última obra donde se encuentran indicios que nos permitan afirmar que, según parece, Hudde fue el primer matemático en utilizar un coeficiente literal en una ecuación para representar todo número real, positivo o negativo. Formuló un método de las tangentes en una carta del 21 de noviembre de 1659, publicada en 1713 a raíz de la controversia entre Newton y Leibniz. Este método equivale, en notación moderna, a

$$t = -y \frac{f_y(x, y)}{f_y(x, y)}$$

donde t es la subtangente, f_x y f_y las derivadas parciales con respecto a x y a y respectivamente.

DE WITT

Una contribución importante a la geometría analítica fue obra de un amigo y discípulo de Van Schooten, Jan de Witt (1625-1672). Hombre de Estado holandés, se hizo amigo de Van Schooten durante sus estudios de Derecho en Leyden, y recibió de él una enseñanza conforme a las matemáticas cartesianas. Durante veinte años, y hasta su muerte, en el curso de un tumulto en 1672, fue gran pensionario de Holanda, es decir, de hecho primer ministro de los Países Bajos durante la minoría de edad de Guillermo III.

A los veintitrés años, compuso un tratado en dos libros titulado *Elementa curvarum linearum.* El primer libro está consagrado a las secciones cónicas estudiadas como lugares planos, y contiene dife-

rentes definiciones cinemáticas y planimétricas de las cónicas. En el segundo libro, encontramos una exposición sistemática de la geometría analítica de las rectas y de las cónicas mediante coordenadas. El objeto de este tratado es reducir todas las ecuaciones de segundo grado en x y en y a una forma canónica por traslación y rotación. Se podía reconocer así, a partir de las formas canónicas, las ecuaciones de la parábola, de la elipse y de la hipérbola, si la característica (discriminante) era cero, negativa o positiva.

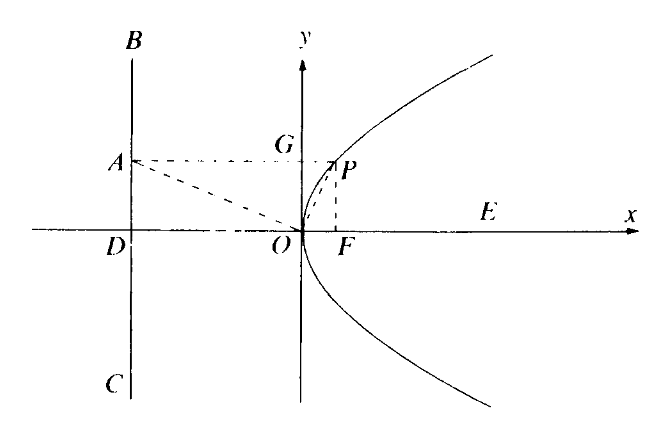


FIGURA 2.1

He aquí una construcción mecánica de la parábola mediante un punto móvil según el tratado de De Witt (véase figura 2.1):

Dadas las rectas perpendiculares DE y BC que se interceptan en D, a partir del punto O, trazar un triángulo rectángulo OAP en el que el ángulo recto está en O. A se encuentra en BC y P es un punto tal que AP es perpendicular a BC. El punto móvil A varía sobre BC de manera que el ángulo OAP es siempre recto; P describe entonces una curva, la parábola. He aquí la demostración:

Sea PF perpendicular a DE. Entonces $PF = GO$; la media proporcional entre $AG = DO$ y $GP = OF$ proporciona:

$$\frac{AG}{GO} = \frac{GO}{GP} \quad \text{o} \quad \frac{DO}{GO} = \frac{GO}{OF}$$

de donde $GO^2 = DO \cdot OF$; en notación moderna, se tiene $y^2 = px$, donde $p = DO$.

En el segundo libro, el uso sistemático de las coordenadas en el tratamiento de la geometría analítica de la recta y de las cónicas justificaría de alguna manera la afirmación de que es éste el primer tratado de geometría analítica.

De Witt enuncia explícitamente que una ecuación de primer grado representa una línea recta y, entre los ejemplos sugeridos, se encuentran las ecuaciones $y = c$, $y = \frac{bx}{a}$, $y = \frac{bx}{a} - c$, etc. Falta la ecuación $y = -\frac{bx}{a} - c$, lo que hace decir a Boyer que De Witt, lo mismo que sus contemporáneos, no comprende todavía las coordenadas negativas. Por otra parte, sus diagramas son segmentos de rectas o rayos limitados al primer cuadrante.

El estudio de las ecuaciones de segundo grado comienza también a partir de casos específicos, y De Witt muestra las diferentes formas que corresponden a las cónicas. Por medio de transformaciones de la forma

$$v = x - h$$

$$z = y + \frac{bx}{a} + c$$

De Witt está en condiciones de reducir ciertas ecuaciones de segundo grado a su forma canónica. Utilizando reglas de reducción para las ecuaciones de la parábola, de la elipse y de la hipérbola, llega a servirse de desigualdades equivalentes a nuestro moderno discriminante.

La escuela holandesa de geometría, dirigida por Van Schooten, contribuyó a dar a conocer la geometría analítica mediante la difusión de textos explicativos que acompañaban a la célebre obra de Descartes. Además, la mayor parte de los matemáticos holandeses aportaron elementos nuevos y extensivos interesantes a la nueva geometría. El otro matemático que se significó en geometría después de la escuela holandesa, La Hire, es un representante de Francia. Pero, mientras tanto, un matemático de los Países Bajos se destacó, una vez más, principalmente por un método de las tangentes y trabajos en geometría.

DE SLUSE

René-François de Sluse (1622-1685), nació en Visé, cerca de Lieja, de una familia valona. Fue canónigo de la catedral de Lieja durante más de treinta años. Se habla de él como de un hombre de una erudición formidable y dotado, para las matemáticas, de un gran espíritu de invención y de generalización. En sus momentos de ocio —muy raros, según él— De Sluse llegó a escribir algunos raros textos que le valieron inmediatamente la estima de los matemáticos de su tiempo.

La primera solución al problema de las tangentes ofrecida por De Sluse es, en el fondo, el método cinemético de Roberval y Torricelli. Influenciado por Torricelli, el canónigo de Lieja permaneció en Italia desde 1642 hasta 1651; intentó entonces generalizar el método de composición de velocidades a todos los movimientos uniformemente acelerados. Así, para la distancia recorrida $s(t) = \frac{1}{2} gt^2$, Torricelli había encontrado que la velocidad se expresaba mediante $t \frac{ds}{dt} = 2as$ (donde $s = 0$ cuando $t = 0$ y a es una constante). De Sluse reemplazó el 2 en esta última fórmula por una constante k, de donde

$$t \frac{ds}{dt} = k\, as$$

Desde el punto de vista analítico, la combinación de las dos fórmulas siguientes $t \frac{ds}{dt} = k$ y $s = at^k$ (donde a es una constante) proporciona, cuando $a = 1$, la relación fundamental

$$\frac{d}{dt} (t^k) = k\, t^{k-1}$$

válida para todo k.

El segundo método del científico de Lieja conducía precisamente a esta última fórmula, pero sólo para valores enteros y positivos de k. Por desgracia para él, cuando estuvo en posesión del resultado de su segundo método, había perdido probablemente de vista el primero, y por ello no se le ocurrió establecer una comparación entre ambos.

El mérito del canónigo de Lieja, en la búsqueda de la tangente a una curva cuya ecuación es de la forma $f(x,y) = 0$, donde f es una

función polinómica, consistió en desarrollar un método que permitía escribir inmediatamente la solución en la forma $\frac{y f_y}{f_x}$.

La regla de De Sluse puede ser enunciada como sigue: la subtangente será el cociente obtenido colocando en el numerador todos los términos que contienen y, multiplicado cada uno por el exponente de la potencia de y que aparece en ellos y, en el denominador, todos los términos que contienen x, cada uno multiplicado por el exponente de la potencia de x que aparece en ellos, dividido por x. Este resultado fue conocido por Hudde en 1659.

En 1659, De Sluse publicó un libro popular titulado *Mesolabum* en el que proseguía los trabajos de sus predecesores a propósito de las construcciones geométricas de las raíces de una ecuación. Demostró, por su método de resolución geométrica de ecuaciones, que dada una cónica pueden construirse las raíces de toda ecuación cúbica o cuártica por intersección de una cónica y una circunferencia. Subrayemos que De Sluse utiliza, en lugar de las x e y de Descartes, las variables e y a de Fermat. Una recensión de esta obra, reeditada en 1668, aparecida en las *Philosophical Transactions* en 1669, alaba este libro como la mejor contribución a este tipo de geometría desde Descartes.

Después de la muerte de Désargues en 1661, de Pascal en 1662 y de Fermat en 1665, la supremacía francesa en matemáticas llega a su fin. Queda Roberval como única figura prestigiosa, pero sus contribuciones no son ya significativas y su influencia es restringida a causa de su negativa a publicar sus descubrimientos. Sin embargo, un matemático de talento asegura el relevo por lo que se refiere a la geometría.

LA HIRE

Philippe de La Hire (1640-1718) nació en París. Su padre era amigo íntimo de Désargues y el hijo se convirtió en discípulo de éste; como su maestro, era arquitecto. Se orientó hacia las matemáticas y la astronomía, y en 1678 entró en la Academia de Ciencias en la sección de los astrónomos. Como Pascal, La Hire recibió la influencia de Désargues, y de este interés por la geometría saldrán tres tratados sobre las cónicas en 1673, 1679 y 1685. Su interés por la

geometría cartesiana se manifestó muy pronto, pues le eran familiares los trabajos algebraicos de Descartes. Sin embargo, su reputación aumentó en el campo de la geometría sintética, aunque fuera capaz de apreciar a la vez los desarrollos analítico y sintético en la teoría de las cónicas.

Desde el punto de vista de la geometría moderna, el tratado de 1673, titulado *Nuevo método en geometría para las secciones de las superficies cónicas y cilíndricas que tienen por bases circunferencias, o parábolas, elipses e hipérbolas,* es, de los tres, con mucho el más original. Desgraciadamente, como la tirada fue limitada, su difusión lo fue igualmente y la acogida que se le dispensó no parece haber sido muy favorable. Se encuentran allí, entre otras cosas, la división armónica (involución en cuatro puntos en Désargues), la construcción del conjugado de un punto con respecto a un segmento, un estudio de la polar con respecto a una circunferencia en los diferentes casos de figuras, una utilización de las propiedades de la proyección cilíndrica y de la homología. En conjunto, este pequeño tratado, inspirado en Désargues, se aleja a veces de él, con más o menos fortuna, pero no parece contener resultados esencialmente nuevos.

En su obra *Nuevos elementos de las secciones cónicas* de 1679, dedicada a Colbert, La Hire preconiza un enfoque métrico en dos dimensiones, procediendo, en el caso de la elipse y la hipérbola, a partir de la definición en términos de la suma y de la diferencia de los radios focales. Para el caso de la parábola, se sirve de la igualdad de las distancias al foco y a la directriz. La Hire parece trasponer una parte del lenguaje de Désargues cuando llama «tronco» al eje de las x, «origen» al punto fijo O, «nudos» a los puntos sobre este eje y «partes de tronco» a las distancias de estos puntos a O. De todos estos términos, sólo ha sobrevivido la palabra «origen». Subrayemos que La Hire ofreció uno de los primeros ejemplos de una superficie expresada analíticamente mediante una ecuación con tres incógnitas.

En 1685, La Hire publica su gran tratado en nueve libros, titulado *Sectiones conicae,* que marca su vuelta a los métodos sintéticos. En el primer libro, trata de las propiedades armónicas del cuadrilátero completo, polos y polares. En el libro II, el objeto de su estudio es el cono de Apolonio, mientras que en el tercero determina la ecuación arquimediana de una cónica. El cuarto trata de las

asíntotas; los teoremas métricos a propósito de los diámetros son estudiados en el quinto; y el sexto estudia las cónicas semejantes. Las tangentes y las normales aparecen en el séptimo, los focos en el octavo y el noveno está consagrado a los problemas de construcción.

La Hire había asimilado todos los conocimientos sobre las cónicas y sus obras, en general, eran accesibles. Su uso hábil de las proyecciones, de las secciones armónicas, de los polos y polares, constituye un paso adelante en el desarrollo del tema. Es realmente una lástima que el primer especialista moderno en geometría analítica y sintética no fuera justamente reconocido por sus contemporáneos. Cosa curiosa, su nombre ha quedado asociado a un teorema sobre las ruletas, publicado en 1706 en las *Memorias de la Academia de Ciencias,* cuando Nasir al-Din y Copérnico conocían la existencia de ese resultado mucho antes que él.

MOHR

La Hire no fue el único geómetra de su época que pasó casi inadvertido. En efecto, Georg Mohr (1640-1697) no atrajo la atención de los historiadores hasta 1928, cuando se encontró por casualidad una copia de su tratado, que se adelantaba en 125 años a los trabajos de Mascheroni.

Georg Mohr nació el 1 de abril de 1640 en Copenhague, donde su padre era comerciante e inspector de hospital. Desde temprana edad mostró un interés marcado por las matemáticas, y en 1662 dejó Dinamarca y fue a Holanda con el fin, según parece, de perfeccionar su formación matemática. A continuación viaja bastante, y puede encontrársele sucesivamente en Amsterdam, en 1672 en Inglaterra, y en París en 1675; después vuelve a Holanda en 1677 y por último a Copenhague. Se casa en 1687 y vuelve a Holanda acompañado de su mujer en 1691. Su hijo Peter nace en 1692, y en 1695 colabora en los trabajos de Tschirnhaus. Mohr murió algún tiempo después, el 26 de enero de 1697.

El pequeño tratado de geometría de Georg Mohr, redescubierto en 1928 y titulado *Euclides danicus,* fue publicado en 1672 en danés y en alemán. Mohr muestra en él que cualquier punto que pueda construirse mediante la regla y el compás, puede serlo también sirviéndose sólo de un compás. Esto le permitió tratar de una

manera elegante problemas de construcción de Euclides recurriendo únicamente al compás fijo. Es evidente que no se puede trazar una recta con un compás, pero si se acepta que una recta es conocida cuando dos de sus puntos están determinados, el recurso a la regla resulta superfluo en la geometría euclídea. Esta pequeña obra pasó inadvertida en su época, y fue Mascheroni quien redescubrió este principio 125 años después del sorprendente descubrimiento de Mohr.

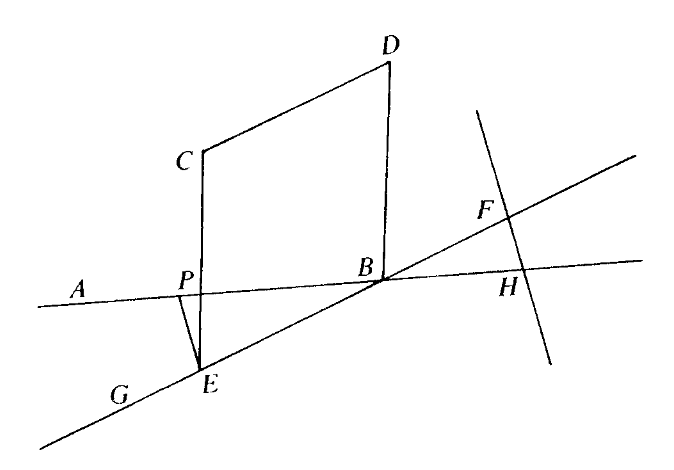


FIGURA 2.2

Mohr publicó en Amsterdam, en 1673, un pequeño tratado de geometría titulado *Compendium Euclidis curiosi,* donde demuestra que todas las construcciones contenidas en los *Elementos* de Euclides son posibles si se utiliza una regla y un compás fijo. Comprende la descripción de treinta y dos construcciones, de las que veintinueve pertenecen a los *Elementos,* que cuentan, de hecho, cuarenta y nueve. Parece que las veinte construcciones que Mohr dejó de lado habrían podido demostrarse por su método. A título de ejemplo, ilustremos su método para sustraer un segmento de otro segmento más largo (véase la figura 2.2).

Sustraer *CD* de *AB.* Por *B,* trazar *GB,* paralelo a *CD* (por la

construcción 1: por un punto dado trazar una recta paralela a una recta dada). Unir *DB* y trazar *CE* paralela a *DB* (construcción 1). Con el compás fijo, a partir de *B* marcar *F* y *H*. Por *E* trazar la paralela a *FH* (construcción 1), cortando *AB* en *P*. Entonces $AP = AB - CD$.

SAINT-VINCENT

Sabemos que Cavalieri había puesto a punto sus concepciones sobre los indivisibles en 1629, pero Kepler utilizaba ya en 1615 una técnica análoga para la determinación del volumen de toneles de vino. Por otra parte, un discípulo de Clavius, el jesuita Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) estaba en posesión, hacia 1625, de un método que se deduce de los trabajos de Stevin y Valerio. Nacido en Gante, profesor en Roma y luego en Praga, Saint-Vincent se convirtió más tarde en tutor en la corte de Felipe IV de España. Desgraciadamente, perdió el manuscrito original de sus trabajos en el curso de uno de sus viajes, y no publicó su libro hasta 1647.

El método de Saint-Vincent se asemeja directamente al de exhaustión de los antiguos, pero el jesuita introduce en él un elemento nuevo: relacionó las discusiones escolásticas sobre la naturaleza del continuo con el resultado de la división hasta el infinito. Así, en su grueso libro titulado *Opus geometricum quadrature circuli et sectionum coni* utiliza rectángulos infinitamente delgados en número infinito, en lugar de los paralelogramos de Stevin, y sustituye el polígono de *n* lados de Arquímedes por un polígono inscrito con un número infinito de lados. De esta manera, Saint-Vincent utiliza los infinitésimos y realiza completamente la exhaustión de la figura, en lugar de contentarse con una aproximación arquimediana, por medio de una integración volumétrica llamada *ductus plani in planum*.

El procedimiento de Saint-Vincent equivale, sustancialmente, a definir la curva como el límite aproximado por el polígono inscrito cuando se dobla indefinidamente el número de los lados. Valerio, y después Stevin, se habían aproximado mucho a esta concepción, pero Grégoire de Saint-Vincent fue el primero, según parece, en enunciar muy claramente que el *terminus* de una progresión es el final de la serie al cual no llega la progresión ni siquiera si continúa

hasta el infinito, pero al que puede aproximarse más que cualquier intervalo dado. Consideraba, pues, que una serie infinita define una magnitud (la suma de la serie) hacia la que tiende la suma de un número finito de términos cuando ese número se hace cada vez mayor.

Su desafortunada tentativa de cuadratura del círculo desacreditó algo sus trabajos, pero Leibniz le citó con estima y Pascal se inspiró en él. Aunque Saint-Vincent no se expresó con todo el rigor y claridad característicos del siglo XIX, sus trabajos sobre las series infinitas y el análisis infinitesimal constituyen el primer intento explícito de formular la doctrina de los límites.

MENGOLI

El mismo año en que Mohr publicaba su *Euclides danicus,* Pietro Mengoli (1626-1686) editó en Italia una obra sobre la cuadratura del círculo. Discípulo de Cavalieri y sucesor suyo en la Universidad de Bolonia, este eclesiástico italiano, desconocido en vida, prosiguió los trabajos de Torricelli y Grégoire de Saint-Vincent sobre los indivisibles y en particular sobre el área encerrada bajo la hipérbola. Su estudio sistemático sobre las series infinitas le condujo al problema de la convergencia y la divergencia. Descubrió así dos reglas, una sobre la convergencia y la otra sobre la sumación de las series infinitas.

La primera regla se formula así: una condición necesaria para la convergencia de una serie cuyo término general es a_n, es que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

La segunda enuncia que, si las sumas parciales de una serie de términos positivos es acotada, la serie es convergente. Gracias a sus trabajos, Mengoli redescubre la divergencia de la serie armónica, demostrada anteriormente por Oresme pero generalmente atribuida a Jakob Bernoulli. Descubre también un desarrollo en serie del logaritmo, y muestra que la suma de los términos de

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

es *ln*2, anticipándose en una década a los trabajos de Nicolaus Mercator sobre este tema. Mengoli realizó otras sumaciones de series infinitas, y se dice también que propuso una definición de la integral definida que difiere poco, sustancialmente, de la de Augustin-Louis de Cauchy en el siglo XIX. Se encuentra en su *Quadratura del circolo* un valor de π bajo la forma de un producto infinito, que fue dado por Wallis.

HUYGENS

Gran científico de reputación internacional, cuyas actividades principales fueron de orden mecánico, astronómico y físico, más que geométrico o algebraico, Christian Huygens (1629-1695) nació en La Haya, hijo de Constantin Huygens, secretario del estatúder de las Provincias Unidas. Hizo sus estudios en la Universidad de Leyden, donde fue discípulo de Van Schooten. A los 22 años publicó un breve texto para refutar la pretendida cuadratura del círculo de Grégoire de Saint-Vincent. En 1654, demostró el procedimiento trigonométrico de Snell (físico holandés a quien debemos el descubrimiento de la ley de la refracción) para el cálculo de π, y durante este mismo año su hermano y él elaboraron una nueva técnica de pulimento del vidrio que les permitió realizar observaciones astronómicas, por ejemplo, sobre la naturaleza de los anillos de Saturno.

Fue a París en 1665, donde alternó con la mayor parte de los científicos franceses, y se instaló allí de 1666 a 1681, recibiendo de Luis XIV una pensión de 6 000 libras. Miembro de la Academia de Ciencias desde su origen, se vio obligado a volver a Holanda en 1685, a causa de la revocación del edicto de Nantes, que obligaba a todos los protestantes a abandonar la Francia católica. Profesor desde entonces en Breda, difundió allí la geometría cartesiana, y en 1689 fue a Inglaterra para conocer a Newton. Pasó sus últimos años en Holanda, donde se consagró a sus estudios sobre la propagación de la luz.

La más célebre de sus obras, *Horologium oscillatorium*, publicada en París en 1673, presenta sus descubrimientos sobre el péndulo, que abarcan una veintena de años. Desea, en primer lugar, adaptar el péndulo a la regulación de los relojes, y este objetivo técnico le

conducirá a innovaciones en relojería e, indirectamente, en matemáticas.

Comprueba que el isocronismo de las oscilaciones no es absoluto, como había creído Galileo, porque la amplitud no es despreciable. En el momento en que Huygens inventa el péndulo cicloidal, Pascal lanza su desafío sobre la ruleta a todos los matemáticos del mundo. Huygens muestra que si el péndulo simple describe una ruleta, la curva obtenida es isócrona. Le quedaba encontrar la forma de las láminas que regulan la longitud del hilo para que la masa del péndulo describa bien la ruleta. La solución consistió en hacer oscilar la masa del péndulo entre dos engranajes cicloidales.

Durante esta investigación sobre el péndulo, Huygens se vio inducido al estudio de las evolutas y envolventes, teoría que fundó y que le permitió determinar las evolutas de las cónicas, demostrar que la evoluta de una curva geométrica es también geométrica y rectificable algebraicamente, y que la de la cicloide es una cicloide igual.

Se encuentra también en este tratado de dinámica la expresión exacta de la fuerza centrífuga en un movimiento circular, la teoría del centro de oscilación, las leyes de Huygens sobre el movimiento del péndulo, el principio de la conservación de la energía cinética, el descubrimiento del reloj de balancín y del mecanismo de catalina.

Entre las demás contribuciones matemáticas de Huygens, señalemos un pequeño tratado titulado *De ratiociniis in ludo aleae,* el primer tratado que haya aparecido sobre probabilidades, que comprende los diversos problemas resueltos por Fermat y Pascal sobre el tema y otros problemas nuevos que provienen de diferentes fuentes. Huygens rectificó también la cisoide de Diocles y la cicloide, además de escribir sobre la curva logarítmica y de mantener correspondencia con los matemáticos de su tiempo.

A la muerte de Van Schooten, en 1660, año de la fundación de la Royal Society, la escuela holandesa de matemáticas pierde velocidad y, después de la partida de Huygens hacia París, se puede afirmar que los matemáticos ingleses aseguran a su vez una cierta supremacía. Estos matemáticos de talento, entre los que puede citarse a Wallis, Gregory y Barrow, se significarán muy particularmente en el campo del cálculo diferencial e integral.

WALLIS

John Wallis (1616-1703), nació en Ashford el 23 de noviembre de 1616. Hizo sus estudios en Cambridge, donde obtuvo sucesivamente un bachillerato y una licenciatura. Ordenado sacerdote, su aprendizaje de las matemáticas no comenzó hasta los veinte años, por la lectura de la *Clavis matematicae* de Oughtred; este último se ofreció, según parece, a instruir gratuitamente a Wallis en este campo. Obtuvo la cátedra saviliana de geometría en Oxford, sucediendo a Briggs, que la ocupaba desde 1619. Aunque realista, el régimen de Cromwell utilizó sin embargo sus servicios para descifrar los códigos secretos de los defensores del rey Carlos I. Cuando Carlos II, hijo de Carlos I, fue reinstalado en el trono en 1660, Wallis se convirtió en su capellán.

En 1665, Wallis publicó dos obras importantes, una sobre geometría analítica y otra sobre análisis infinito. Sus *Tractatus de sectionibus conicis* fue la primera exposición algebraica sistemática de las secciones cónicas impresa. Wallis acusó a De Witt de haber imitado este tratado en su obra sobre geometría, pero si bien es cierto que el texto del matemático holandés no apareció hata 1660, no es menos cierto que había sido compuesto antes de 1655. Se dice a veces que Descartes «aritmetizó» la geometría; sería probablemente más correcto decir que hizo posible esta «aritmetización», pero que fue de hecho Wallis, quien la efectuó.

Wallis sustituyó de una manera audaz los conceptos geométricos por conceptos numéricos cuando ello era posible, porque sostenía que las demostraciones algebraicas eran tan válidas como las deducciones mediante líneas geométricas. Además, las proporciones no debían ser interpretadas geométricamente, sino como conceptos aritméticos. Fue el primero en formular las cónicas algebraicamente, de la manera siguiente:

$$e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}, \; p^2 = ld, \; h^2 = ld + \frac{ld^2}{t}$$

donde e, p y h son, respectivamente, la ordenada de la elipse, de la parábola y de la hipérbola correspondiente a la abscisa d medida a partir del vértice, l es el *latus rectum* y t es el eje. De este modo pudo definir las cónicas sin referencia alguna al cono. Por ejemplo, definió la elipse así: «Llamaré elipse a la figura plana caracterizada por

la propiedad $e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}$». Demostró también la inversa, es decir, que dadas estas ecuaciones, ellas definen las curvas conocidas anteriormente. De estas ecuaciones, Wallis pudo deducir otras propiedades, tales como las tangentes y los diámetros conjugados. En resumen, Fermat y Descartes inventaron los métodos, pero fue Wallis quien ofreció la primera aplicación sistemática de estos métodos al estudio de las secciones cónicas.

Wallis hizo que la geometría analítica diera un paso adelante asociándola al análisis infinitesimal en su *Arithmetica infinitorum*. En este tratado asume el principio de continuidad expresado por primera vez por Kepler, y extiende esta idea con el fin de incluir en ella los conceptos analíticos avanzados por Descartes. Como sus contemporáneos, Wallis consideraba que las figuras planas estaban compuestas por un número infinito de líneas, pero estas líneas representaban paralelogramos de anchura infinitesimal. Sin embargo, después de haber asociado los indivisibles en su figura a valores numéricos, Wallis abandona completamente el soporte geométrico. Si, por ejemplo, se quiere comparar el cubo de los indivisibles en un triángulo con el cubo de los indivisibles en el paralelogramo, se trata de tomar la longitud del primer indivisible en el triángulo como cero, la del segundo como uno, la del tercero como dos, etc. La razón de los cubos de los indivisibles en las dos figuras será entonces

$$\frac{0^3 + 1^3}{1^3 + 1^3} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

para dos indivisibles sólo,

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3}{2^3 + 2^3 + 2^3} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

para tres indivisibles sólo,

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3} = \frac{5}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

para cinco indivisibles sólo. Para $n + 1$ indivisibles, el resultado será

$$\frac{0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^3 + n^3 + n^3 \ldots + n^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$$

No obstante, Wallis expresa la suma de la serie de los cubos de la manera siguiente:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n+1)}{4} n^3 + \frac{(n+1)}{4n} n^3$$

y después argumenta que aumentando el número de términos, el exceso sobre $\frac{1}{4}$ disminuye de manera continua, y cuando se pasa a infinito, el exceso sobre $\frac{1}{4}$ desaparece o se hace nulo. Este razonamiento equivale evidentemente a decir que $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$. Por inducción incompleta, Wallis extiende este resultado a todo valor entero de m, de donde concluye que

$$\int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$$

La inducción utilizada por Wallis fue criticada, con razón, por Fermat, pero parece que Wallis no se preocupaba demasiado del rigor de sus razonamientos. Por otra parte, generalizó su resultado mediante un principio de interpolación dudoso, a valores fraccionarios y después a valores negativos (salvo $m = 1$).

La notación exponencial para las potencias negativas fue desarrollada por Wallis a partir de algunos ejemplos solamente. Así, demuestra que si una sucesión de inversos de cubos $(\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \ldots)$, cuyo índice es -3, se multiplica término a término por una sucesión de cuadrados $(1, 4, 9, \ldots)$ cuyo índice es 2, el resultado es la sucesión $(\frac{1}{1}, \frac{4}{8}, \frac{9}{27}, \ldots)$. Esta última es $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, una sucesión de inversos de las primeras potencias de los números naturales, cuyo índice es $-1 = -3 + 2$. Procede de la misma manera para las raíces, y concluye simplemente: «Y lo mismo se producirá en los demás casos, cualesquiera que sean, y de esta manera la proposición está demostrada».

Wallis, que fue el mejor matemático inglés antes de Newton, realizó sus contribuciones más notables en el campo del análisis infinitesimal. Se adelantó a Euler en la función gamma, encontrando resultados intermedios para el cálculo de π por interpolación.

En la proposición 121, demuestra el resultado siguiente

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

(Wallis escribe □ en lugar de $\frac{\pi}{4}$, y el signo ∞ por infinito aparece en su demostración.)

Wallis sabía también que la integral siguiente

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$$

representaba el área encerrada por la semicircunferencia $y = \sqrt{x - x^2}$. Después de haber calculado la integral

$$\int_0^1 (x - x^2)^n dx$$

para diversos valores enteros positivos de *n*, concluyó, por inducción incompleta, que el valor de esta integral es $\frac{(n!)^2}{(2n + 1)!}$. Audaz por naturaleza, concluyó de ello que debía ser válido para valores fraccionarios de *n*, y por tanto

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx = \frac{(1/2!)^2}{2!}$$

En consecuencia

$$\frac{\pi}{8} = \frac{(1/2!)^2}{2!} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Este es un caso particular de la función beta de Euler

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1 - t)^{n-1}dt,$$

donde $m = \frac{3}{2}$ y $n = \frac{3}{2}$.

Wallis aplicó sus principios de inducción y de interpolación al resultado de la proposición 121 para deducir el producto infinito bien conocido

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7 \ldots}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6 \ldots},$$

forma moderna de lo que escribe en su proposición 191 como

$$\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5 \ldots 13\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6 \ldots 12\cdot 14} < \frac{\pi}{4} < \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5.5 \ldots 13\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6 \ldots 12\cdot 14} \sqrt{1^1\!/_{13}}$$

Wallis realizó de nuevo una contribución a la geometría analítica en su *Tratado de álgebra*, publicado en 1685. Allí se encuentran

expuestas, entre otras, construcciones geométricas de ecuaciones polinómicas de grado superior a dos. Como apéndice a este tratado, se encuentra un estudio de una superficie que Wallis llamó *conocuneus* y que pertenece a la clase de las conoides. Wallis no da la ecuación de estas superficies y su estudio de la geometría en tres dimensiones le permite quizá reconocer superficies cuadráticas, pero no estudiarlas analíticamente. En otro apéndice que sigue a su *Tratado de las secciones angulares,* Wallis expone un descubrimiento que data de 1648 sobre una generalización del teorema de Pitágoras, muy semejante a la de Tābit ibn Qurra. Scriba es de la opinión de que Wallis hizo este descubrimiento independientemente.

John Wallis fue el primero en intentar una representación geométrica de las cantidades imaginarias por medio de una ingeniosa interpretación algebraica de un número complejo puro como la primera proporcional entre un número positivo y un número negativo. Después, consiguió construir figuras geométricas que le permitieron darse cuenta de la existencia de un número complejo por medios geométricos y determinar las raíces de una ecuación cuadrática. Desgraciadamente, sus trabajos no tuvieron éxito, porque no pudo descubrir una construcción gráfica general y consistente para todos los valores complejos. Pasó lo mismo con su obra de historia de las matemáticas, que tuvo poco éxito porque, según parece, su chovinismo era demasiado descarado y su talento como historiador no era comparable a su talento como matemático.

RECTIFICACIÓN DE CURVAS

El problema de la rectificación de una curva, ocupó la atención de un buen número de matemáticos del siglo XVII. En efecto, después de la publicación, en 1659, de la rectificación de un arco de la parábola semicúbica por Hendrick Van Heuraet (1633-1660), se suscitó una violenta controversia sobre la prioridad en este campo. En Inglaterra, después de la sugerencia de Wallis, William Neile (1637-1670) había rectificado la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ en 1657, y el primer presidente de la Royal Society, William Brouncker (1620-1684) mejoró su método en 1658, año en que el arquitecto Christopher Wren (1632-1723) hizo llegar a Pascal su rectificación de la cicloide. Por otro lado, Huygens había reducido la rectificación

del arco parabólico a la cuadratura de la hipérbola en 1657 (aunque no la publicó hasta 1659). Además, hacia 1640 Torricelli y Roberval demostraron por separado que la longitud de la primera rotación de la espiral $r = a\theta$ (aritmética) es igual a la longitud de la parábola $x^2 = 2ay$ desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi a$, mientras que Fermat encontró resultados originales sobre el tema hacia 1660. Este breve resumen ilustra bien la popularidad de este tema entre los años 1640 y 1660.

Otros temas de menor importancia atrajeron también la atención de los científicos: las fracciones continuas fueron estudiadas, entre otros, por Rafael Bombelli, Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), John Wallis y William Brouncker. Las series infinitas interesaron a Brawardine, Richard Suiseth, Nicole Oresme, Stevin, Valerio, Grégoire de Saint-Vincent, Mengoli, Nicolas Mercator y James Gregory. Según parece, los trabajos de Mengoli sobre las series infinitas no tuvieron repercusiones importantes salvo la de haber influido en los de Gregory.

GREGORY

James Gregory (1638-1675), matemático y óptico escocés, nació el mes de noviembre de 1638 en Drumoak, cerca de Aberdeen, en una familia en la que se cultivaban la filosofía y las matemáticas. Su tío abuelo, Alexandre Anderson, había editado los trabajos de Vieta. Recibió una sólida formación en matemáticas en la escuela de Aberdeen, y después con su hermano David. Su encuentro con John Collins (1625-1683), bibliotecario de la Royal Society, el Mersenne británico, le permitió entrar en contacto con el mundo de los científicos. A los 26 años fue a Italia, donde conoció a los sucesores de Torricelli, y en particular a Stefano degli Angeli (1623-1697). Los trabajos de Angeli se referían a los métodos infinitesimales y, más específicamente, a la cuadratura de las espirales generalizadas, parábolas e hipérbolas. Durante cuatro años, Gregory estudió con este maestro italiano y con el alumno de Cavalieri, Mengoli. Durante su estancia en Italia, Gregory publicó dos obras, la *Vera quadratura* (1667) y la *Geometriae pars universalis* (1668).

A su vuelta a Inglaterra, Gregory escribió sus *Exercitationes geometricae* para responder a ciertas críticas dirigidas contra su primera obra y también para desarrollar geométricamente una

cuadratura de la hipérbola rectangular mediante un desarrollo en serie. Volvió a Escocia y fue nombrado profesor de matemáticas en St. Andrews y después en Edimburgo, en 1674. Desgraciadamente, perdió la vista el mismo año y murió en Edimburgo en octubre de 1675. Había manifestado un talento notable para la geometría y el análisis infinitesimal, pero sus trabajos no ejercieron una influencia proporcional a su inmenso talento.

El objetivo principal de su obra, publicada en Padua bajo el título de *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, era utilizar la idea de una sucesión doble convergente para definir y determinar, de la manera más precisa posible, magnitudes que no pudieran ser expresadas mediante una relación racional. Sean A_0, B_0, el área de la figura poligonal inscrita y circunscrita, respectivamente. Duplicando sucesivamente los lados de esas figuras, Gregory forma la sucesión A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, ... y muestra que $A_n = \sqrt{A_{n-1}B_{n-1}}$ (media geométrica), y $B_n = \frac{2A_nB_{n-1}}{A_n + B_{n-1}}$ (media armónica), donde A_n y B_n son las áreas de la $(n + 1)$-ésima figura inscrita y circunscrita, respectivamente. Estas dos sucesiones convergen evidentemente hacia el área del sector de una elipse, circunferencia o hipérbola. En esta ocasión Gregory intentó elaborar una teoría de la convergencia para tales sucesiones dobles; aunque esta tentativa fracasara, hay que reconocerle el mérito de haber sido el primero en formular una proposición de esta especie.

En la segunda obra, publicada en Padua en 1668 y titulada *Geometriae pars universalis*, se encuentra una compilación sistemática de todos los procedimientos para la determinación de arcos, tangentes, áreas, volúmenes y superficies en forma de tratado general. Parece evidente que Gregory se inspiró ampliamente en los trabajos de Grégoire de Saint-Vincent, en las escuelas italiana y holandesa y en los científicos franceses e italianos. La exposición es verbal y geométrica y las demostraciones se basan en un método de exhaustión modificado.

Las contribuciones matemáticas de Gregory abarcan una variedad de temas: descubrió la serie binómica y numerosas series para las funciones trigonométricas y trigonométricas inversas. Probablemente comprendió la relación de reciprocidad entre la rectificación, la cuadratura y el problema de las tangentes, siendo el primero que expresó el teorema fundamental del cálculo en su for-

mulación geométrica. En particular, obtuvo series para tg x, sec x, log sec x, $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$. Utilizando un procedimiento equivalente a una diferenciación sucesiva, descubrió las series de Taylor cuarenta años antes que este último las publicara. Este método particular fue descrito parcialmente por Briggs en 1624, pero fue Gregory quien lo introdujo formalmente en 1670, mientras que aparece también independientemente en los *Principia* y *Methodus differentialis* de Newton, que fueron escritos hacia 1676. Constituye el primer resultado importante del cálculo de las diferencias finitas.

Supongamos que f es una función cuyos valores son conocidos en a, $a + c$, $a + 2c$, ..., $a + nc$; sea

$$\Delta f(a) = f(a + c) - f(a)$$
$$\Delta f(a + c) = f(a + 2c) - f(a + c)$$
$$\Delta f(a + 2c) = f(a + 3c) - f(a + 2c)$$

y así sucesivamente.

Igualmente

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a + c) - \Delta f(a)$$
$$\Delta^3 f(a) = \Delta^2 f(a + c) - \Delta^2 f(a)$$

y así sucesivamente.

Entonces, la fórmula de Gregory-Newton estipula que

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{c}\Delta f(a) + \frac{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{c} - 1\right)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f(a) + \ldots$$

Esta fórmula fue utilizada por Newton para efectuar integraciones aproximadas, mientras que Gregory se sirvió de ella para expresar la función $(1 + d)^x$, conociendo los valores de esta función en $x = 0$, 1, 2, ...; entonces $f(0) = 1$, $\Delta f(0) = d$, $\Delta^2 f(0) = d^2$, y así sucesivamente. Haciendo $a = 0$, $c = 1$, $h = x - 0$, obtuvo

$$(1 + d)^x = 1 + dx + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}d^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d^3 + \ldots$$

el desarrollo binómico para cualquier x.

La única serie de Maclaurin que lleva todavía el nombre de

Gregory es la del arctg x, que puede expresarse de la manera siguiente:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

MERCATOR

Mientras que Gregory efectuaba descubrimientos originales con respecto a las series infinitas, un matemático alemán, Nicolaus Mercator (1620-1687), se interesaba también por estas series. Su verdadero nombre era Kaufmann, y nació en Holstein, Alemania, pero vivió varios años en Londres y fue uno de los primeros miembros de la Royal Society. En 1683 fue a París para hacer los planos de las fuentes de Versalles, y murió en París en 1687, a los 67 años.

En 1668 publicó su *Logarithmotechnia,* que comprende tres partes muy desiguales. Las dos primeras están consagradas enteramente al cálculo de un sistema de logaritmos vulgares, mientras que la tercera contiene diferentes fórmulas de aproximación para los logaritmos.

En particular, se encuentra allí la ordenada

$$y = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

de una hipérbola equilátera expresada mediante una serie de potencias. La superficie del segmento hiperbólico es obtenida por el método de Cavalieri, está expresada verbalmente y corresponde a

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

que recibe el nombre de «serie de Mercator».

Los dos matemáticos ingleses que más influyeron en el joven Newton fueron, sin ninguna duda, Wallis y Barrow.

BARROW

Isaac Barrow (1630-1677) realizó estudios en Charterhouse, Felsted, y en el Trinity College de Cambridge. Se dice que era un niño muy distraído durante su estancia en Charterhouse, pero que en Felsted (Essex) se concentró en su trabajo con diligencia y que así pudo ser admitido en el Trinity College a los catorce años. Terminó sus estudios en 1648 y al año siguiente fue *fellow* del Trinity College. Después, por razones religiosas, dejó Cambridge y durante tres años visitó París, Florencia, Esmirna, Constantinopla y Venecia; volvió a Inglaterra pasando por Alemania y los Países Bajos. Aprovechó sus viajes para perfeccionarse en esos diversos centros de interés y para establecer contactos con matemáticos de Francia e Italia.

Recibió las órdenes religiosas a su vuelta a Inglaterra, ocupó inmediatamente un puesto de profesor de griego en la Universidad de Cambridge y, como sus emolumentos eran modestos, los redondeó aceptando un puesto de profesor de geometría en el Colegio Gresham de Londres en 1662. Fue en este Colegio donde se desarrollaron las sesiones de la Royal Society poco después de su ingreso, y el nombre de Barrow aparece en la primera lista de los *fellows* elegidos después de la constitución de esta sociedad. Fue miembro de diversas comisiones y su correspondencia con Collins, a partir de 1663, le permitió recibir ayuda para la publicación de sus cursos.

En 1663 se convirtió en el primer profesor lucasiano de matemáticas en Cambridge, sucediendo a Henry Lucas (1610-1663), fundador de la cátedra que lleva su nombre. Barrow dejó su puesto de profesor a Isaac Newton en 1669. El mismo año fue nombrado capellán de Carlos II y en 1672 profesor del Trinity College.

Muy competente en griego y en árabe, y admirador de los antiguos, Barrow tradujo ciertas obras de Euclides y mejoró las traducciones de textos de Euclides, Apolonio, Arquímedes y Teodosio. Su admiración por los estudios clásicos le llevó probablemente a adoptar un punto de vista conservador en matemáticas, rechazando el formalismo en álgebra; pensaba que el álgebra debía formar parte de la lógica más que de las matemáticas.

Publicó en 1669 sus *Lectiones opticae,* y en 1670 aparecieron sus célebres *Lectiones geometriae,* que comprenden trece lecciones. A

pesar de una presentación enteramente geométrica que hacía difícil la lectura de sus lecciones de geometría, Barrow hizo un esfuerzo sistemático para incluir en su obra todo el campo de los procedimientos infinitesimales conocidos por él, así como un método algebraico para la determinación de las tangentes, al parecer, por sugerencia de Newton.

En su primera lección, Barrow se ocupa de la naturaleza de los conceptos de tiempo y movimiento y de las representaciones geométricas de estas magnitudes a la manera de Oresme y Galileo. Dado que una línea, dice, es la huella de un punto móvil, puede ser concebida también como la huella de un momento que fluye continuamente. El tiempo puede ser representado, pues, por una línea recta uniforme. Esto le lleva al problema de la naturaleza del continuo y de la definición de la velocidad instantánea. La divisibilidad es siempre posible, infinitamente o indefinidamente; la generación de las velocidades se hace de la misma manera que la generación de una línea o del tiempo.

La composición de movimientos le sirve para generar curvas y superficies incorporando los indivisibles de Cavalieri y el atomismo al movimiento. En efecto, Barrow subraya esto:

> Hablo con el lenguaje de los atomistas, para más comodidad, brevedad y claridad; y no tengo ningún escrúpulo en servirme de su método a causa de su veracidad. El método de los indivisibles, es el más expeditivo de todos, y no menos incierto e infalible cuando se aplica correctamente.

En la tercera lección, genera sistemáticamente curvas por composición de movimientos rectilíneos y paralelos o rotacionales. En la cuarta lección hay un pasaje en el que menciona que a partir del conocimiento de la tangente a una curva es posible pasar a la construcción y cuadratura de otra, y a la inversa. Por ejemplo, si la curva AM es de la forma $y = kx^n$ con $AB = x$, $BM = y$ (véase figura 2.3), entonces

$$\frac{TP}{PA} = n, \quad \frac{\text{espacio } abm}{\text{rect. } ab \cdot bm} = \frac{1}{n}$$

$$bm = \frac{dy}{dt} = z = v = \frac{ny}{x} = nkx^{n-1}.$$

Así, habiendo recurrido a los conceptos medievales de tiempo y movimiento, ligados a los indivisibles y a la composición de movi-

miento de Torricelli, Barrow fue capaz de concebir intuitivamente la relación inversa entre los procedimientos de diferenciación e integración. En las lecciones siete a trece, desarrolla sistemáticamente los teoremas fundamentales relativos a las tangentes, arcos, áreas y superficies, y el contenido es semejante al de la *Geometría* de Gregory. Puede encontrarse, en particular, la utilización del triángulo diferencial, llamado también triángulo de Barrow, el teorema fundamental del cálculo y su recíproco en su formulación geométrica, y un método algebraico de las tangentes, esencialmente idéntico al de Fermat.

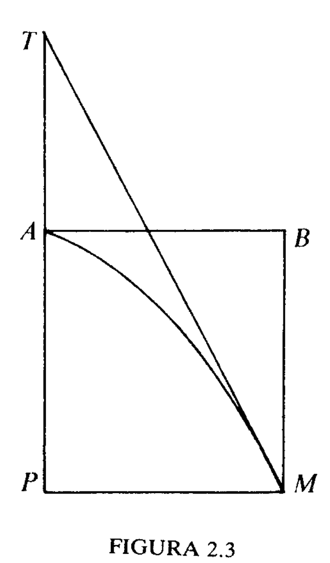


FIGURA 2.3

Este método de las tangentes aparece en su décima lección y puede ilustrarse de la manera siguiente: sea M un punto dado sobre la curva cuya ecuación polinómica es $f(x, y) = 0$, y si T es el punto de intersección de la tangente buscada MT con el eje de las x, Barrow mide entonces «un arco infinitamente pequeño, MN, de la curva». Traza a continuación las ordenadas M y N y por N traza la línea NR paralela a la abscisa (véase la figura 2.4).

A continuación designa $MP = m$, $PT = t$ (subtangente), $MR = a$, $NR = e$, en donde a y e son los lados del triángulo MNR. Barrow indica a continuación que la razón $\frac{a}{e}$ es igual a la razón $\frac{m}{t}$, y la razón $\frac{a}{e}$ para dos puntos M y N infinitamente próximos da el valor de la pendiente a la curva en el punto M. Para encontrar esta razón Barrow procede de una manera semejante a Fermat (este último utiliza una única cantidad E) y sustituye x e y en $f(x, y) = 0$ por $x + e$ e $y + a$, respectivamente.

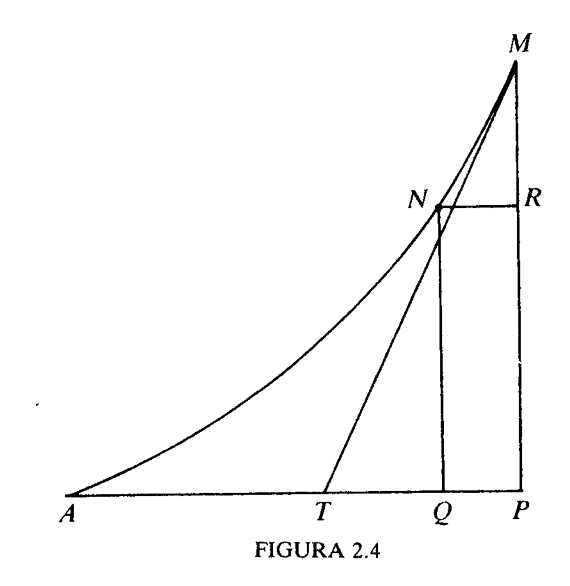


FIGURA 2.4

Supongamos que la función f sea $y^2 = px$; entonces las sustituciones mencionadas proporcionan

$$y^2 + 2ay + a^2 = px + pe$$

Sustrayendo $y^2 = px$, se obtiene

$$2ay + a^2 = pe.$$

Despreciando las potencias de a y e superiores a 1, se tiene

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{2y}$$

a continuación se reemplaza a por m y e por t. La subtangente se expresa entonces en términos de x y m, y si x y m son conocidos, t se determina así:

$$\frac{m}{t} = \frac{p}{2y}, \text{ de donde } t = \frac{2my}{p}$$

Barrow no parece haber conocido directamente los trabajos de Fermat, porque no los menciona en ninguna parte. Sin embargo se refiere a Cavalieri, Huygens, Grégoire de Saint-Vicent, Gregory y Wallis como inspiradores de sus ideas. Pudo entrar en contacto con el método del científico de Toulouse por intermedio de sus fuentes o por su asociación con Newton, porque este último había reconocido que el método de Barrow era, de hecho, una técnica algorítmica de Fermat mejorada.

Los trabajos de Barrow, analizados bajo el ángulo de punto culminante de las investigaciones geométricas del siglo XVII, representan la exposición más sistemática y detallada de las propiedades de las curvas tales como las tangentes, arcos, áreas, etc., lo que, en manos de Newton y Leibniz, conducirá rápidamente a la invención del cálculo diferencial e integral. De todos los matemáticos que se aproximaron a los distintos aspectos del cálculo diferencial e integral, Barrow es el que estuvo más cerca. Hizo un esfuerzo notable para relacionar los diferentes resultados conocidos en un bosquejo esencialmente geométrico, y fue quizás esta fidelidad a los métodos geométricos lo que le impidió desempeñar un papel importante como había deseado.

Las razones que llevaron a Barrow a abandonar su cátedra de Cambridge para dejársela a Newton son numerosas y diversas. Se sabe sin ninguna duda que, después de la aparición de sus lecciones de geometría se consagró a la teología, dejando a su eminente sucesor la tarea de realizar su síntesis inacabada.

BIBLIOGRAFÍA

Baron, Margaret E., *The origins of the infinitesimal calculus,* Oxford, Pergamon Press, 1969, pp. 205-252.

Boyer, Carl B., *The history of the calculus and its conceptual development,* Nueva York, Dover, 1959, pp. 168-186.
Boyer, Carl B., «Johann Hudde and space coordinates», *The Mathematics Teacher,* 58, 1965, pp. 33-36.
Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley & Sons, 1968, pp. 404-428.
Boyer, Carl B., *History of analytic geometry,* Nueva York, *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 107-126.
Cajori, Florian, «Who was the first inventor of the calculus?», *The American Mathematical Monthly,* 26, 1925, pp. 15-20.
Carrucio, Ettore, *Mathematics and logic in history and in contemporary thought,* Londres, Faber and Faber, 1964, pp. 219-220.
Coolidge, Julian Lowell, *A history of the conic sections and quadric surfaces,* Nueva York, Dover, 1968, pp. 35-44.
Coolidge, Julian Lowell, «The beginnings of analytic geometry in three dimensions», *The American Mathematical Monthly,* 55, 1948, pp. 76-86.
Coolidge, Julian Lowell, «The lengths of curves», *The American Mathematical Monthly,* 60, 1953, pp. 89-93.
Coolidge, Julian Lowell, «The story of tangents», *The American Mathematical Monthly,* 58, 1951, pp. 449-461.
Coolidge, Julian Lowell, *The mathematics of great amateurs,* Nueva York, Dover, 1963, pp. 103-146.
Daumais, Maurice (comp.), *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 571-580.
Easton, Joy B., «Johan de Witt's kinematical construction of the conics», *The Mathematics Teacher,* 56, 1963, pp. 632-635.
Eves, Howard, H., *An introduction to the history of mathematics,* Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1969, pp. 297-331.
Hallerberg, Arthur E., «Georg Mohr and Euclidis Curiosi», *The Mathematics Teacher,* 53, 1960, pp. 127-132.
Hofmann, Joseph E., «On the discovery of the logarithmic series and its development in England up to Cotes», *National Mathematics magazine,* 14, pp. 37-45.
Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 298-301, 317-319, 346-356.
National Council of Teachers of Mathematics (The), *Historical topics for the mathematics classroom. 31st Yearbook,* Washington, D.C., N.C.T.M., 1969, pp. 151-152, 178-182, 227-228, 267-269, 387-391, 413-418.
Nunn, T. Percy, «The arithmetic of infinites», *The Mathematical Gazette,* 5, 1910, pp. 345-356.
Phillips, J. P., «Brachistochrone, tautochrone, cycloid — apple of discord», *The Mathematics Teacher,* 60, 1967, pp. 506-508.

Rosenfeld, L., «René-François de Sluse et le problème des tangentes», *Isis*, 10, 1928, pp. 416-434.
Rosenthal, Arthur, «The history of calculus», *The American Mathematical Monthly*, 62, 1955, pp. 75-86.
Scriba, Christoph J., «John Wallis treatise of angular sections and Thâbit ibn Qurra's generalization of the Pythagorean theorem», *Isis*, 57, 1966, pp. 56-66.
Smith, David E. (comp.), *A source book in mathematics*, vol. I, Nueva York, Dover, 1959, pp. 46-54, 217-223.
Struik, Dirk J., comp., *A source book in mathematics, 1200-1800*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969, pp. 244-269.
Taton, René, «La préhistoire de la géométrie moderne», *Revue d'Histoire des Sciences*, 2, 1948-49, pp. 197-204.
Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences*, vol. II, *La science moderne*, París, P.U.F., 1969, pp. 217-241. [*Historia general de las ciencias*, vol. II, *La ciencia moderna*, Barcelona, Destino, 1972].
Wren, F. L. y J. A. Garrett, «The development of the fundamental concepts of infinitesimal analysis», *The American Mathematical Monthly*, 40, 1929, pp. 269-275.

EJERCICIOS

1. Decir por qué la geometría de Descartes y Fermat no fue asimilada tan rápidamente como se hubiera podido suponer por parte de los matemáticos del siglo XVII.
2. ¿Cuál fue el papel de la escuela holandesa de geometría en la difusión de la nueva geometría?
3. Describir las contribuciones matemáticas de Jan de Witt. ¿Qué innovaciones introduce con respecto a sus predecesores?
4. René-François de Sluse se distinguió por un método de tangentes. Comentar esta afirmación mediante un ejemplo.
5. Describir las nuevas aportaciones de Philippe de La Hire en geometría proyectiva.
6. Los trabajos de Georg Mohr sobre construcciones geométricas contienen resultados interesantes sobre la utilización de la regla y el compás. Precisar cuáles.
7. ¿Cuál fue el papel de Grégoire de Saint-Vincent en el campo del análisis infinitesimal?

8. Pietro Mengoli descubrió dos reglas sobre series infinitas. Precisar estas reglas.
9. ¿Cómo fue inducido Huygens a estudiar la cicloide?
10. ¿Cuál fue el papel del *Tractatus* de Wallis en el campo de la geometría analítica?
11. Utilizar el método de Wallis para demostrar que

$$\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

12. Verificar la fórmula de Wallis

$$\int_0^1 (x - x^2)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

para $n = 1, 2, 3$.
13. Utilizar los cuatro primeros términos de la serie de Gregory para calcular aproximadamente arctg 2.
14. Utilizar los cinco primeros términos de la serie de Mercator para calcular aproximadamente *ln* 1,1.
15. Determinar la subtangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto (3,5) mediante el método de Barrow.

3. NEWTON Y LEIBNIZ

INTRODUCCIÓN

Los métodos de análisis preconizados por los predecesores de Newton y Leibniz fueron desarrollados con el objeto de resolver una clase de problemas bien definidos, tales como la construcción de las tangentes a las curvas, la obtención de máximos y mínimos y el cálculo de cuadraturas. Gracias a la geometría analítica de Descartes y Fermat, resultaba posible tratar las cuestiones no como problemas específicos de cada curva, sino mediante un método general aplicable a todas las curvas de una cierta clase. Considerando la forma algebraica de la ecuación de una curva, se podía intentar una clasificación de las curvas. Se podía esperar entonces que, mediante un proceso de refinamiento gradual de los algoritmos, resultara posible combinarlos con el fin de elaborar soluciones más generales todavía. Aunque diversos matemáticos del siglo XVII hubieran desarrollado algoritmos eficaces, ninguno de ellos había conseguido proporcionar el método general que se esperaba. Asimismo, pocos matemáticos habían percibido los estrechos lazos existentes entre los problemas estudiados, porque les faltaba un método general de cálculo o porque se preocupaban demasiado de encontrar una solución específica para su problema.

Newton y Leibniz fueron los primeros que estudiaron los problemas del análisis infinitesimal elaborando un método general y nuevo, aplicable a muchos tipos de problemas. La notación algebraica y las técnicas que utilizaron les permitieron no sólo emplear una herramienta más eficaz que la de la geometría, sino también estudiar diversos problemas de geometría y física mediante el mismo método general.

El descubrimiento final del cálculo diferencial e integral exigió la asimilación de los métodos geométricos de Cavalieri y Barrow, y de los métodos analíticos de Descartes, Fermat y Wallis. Hacía falta

también estar en condiciones de comprender la relación de reciprocidad entre el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas, cualquiera que fuera la naturaleza de los problemas específicos. Además, había que traducir los problemas de variación, tangentes, máximos y mínimos y sumación a problemas de diferenciación y diferenciación inversa. He aquí, brevemente, lo que debemos a Newton y Leibniz.

NEWTON

Isaac Newton (1642-1727) nació el día de Navidad —del antiguo calendario— en el pueblecito de Woolsthorpe, unos 13 km al sur de Grantham, en el Lincolnshire. Fue un niño prematuro y su padre murió antes de su nacimiento, a los treinta y siete años. Isaac fue educado por su abuela, preocupada por la delicada salud de su nieto. Su madre, mujer ahorrativa y diligente, se casó de nuevo cuando su hijo no tenía más que tres años. Newton frecuentó la escuela del lugar y, siendo muy niño, manifestó un comportamiento completamente normal, con un interés marcado por los juguetes mecánicos.

El reverendo William Ayscough, tío de Newton y diplomado por el Trinity College de Cambridge, convenció a su madre de que lo enviara a Cambridge en lugar de dejarlo en la granja familiar para ayudarla. En junio de 1661, a los dieciocho años, era pues alumno del Trinity College, y nada en sus estudios anteriores permitía entrever o incluso esperar la deslumbrante carrera científica del fundador de la mecánica y la óptica. Por otra parte, el Trinity College tenía fama de ser una institución sumamente recomendable para aquellos que se destinaban a las órdenes. Afortunadamente, esta institución le brindó hospitalidad, libertad y una atmósfera amistosa que le permitieron tomar contacto verdadero con el campo de la ciencia.

Al comienzo de su estancia en Cambridge, se interesó en primer lugar por la química, y este interés, según se dice, se manifestó a lo largo de toda su vida. Durante su primer año de estudios, y probablemente por primera vez, leyó una obra de matemáticas sobre la geometría de Euclides, lo que despertó en él el deseo de leer otras obras. Parece también que su primer tutor fue Benjamin Pulleyn, posteriormente profesor de griego en la Universidad. En

1663, Newton leyó la *Clavis mathematicae* de Oughtred, la *Geometria a Renato Des Cartes* de Van Schooten, la *Optica* de Kepler, la *Opera mathematica* de Vieta, editadas por Van Schooten y, en 1644, la *Aritmética* de Wallis que le serviría como introducción a sus investigaciones sobre las series infinitas, el teorema del binomio y ciertas cuadraturas. También a partir de 1663 Newton conoció a Barrow, quien le dio clase como primer profesor lucasiano de matemáticas. En la misma época, Newton entró en contacto con los trabajos de Galileo, Fermat, Huygens y otros, a partir probablemente de la edición de 1659 de la *Geometria* de Descartes por Van Schooten.

Desde finales de 1664, Newton parece dispuesto a contribuir personalmente al desarrollo de las matemáticas. Aborda entonces el teorema del binomio, a partir de los trabajos de Wallis, y el cálculo de fluxiones. Después, al acabar sus estudios de bachiller, debe volver a la granja familiar a causa de una epidemia de peste bubónica. Retirado con su familia durante los años 1665-1666, conoce un período muy intenso de descubrimientos: descubre la ley del inverso del cuadrado, de la gravitación, desarrolla su cálculo de fluxiones, generaliza el teorema del binomio y pone de manifiesto la naturaleza física de los colores. Sin embargo, Newton guarda silencio sobre sus descubrimientos y reanuda sus estudios en Cambridge en 1667.

De 1667 a 1669, emprende activamente investigaciones sobre óptica y es elegido *fellow* del Trinity College. En 1669, Barrow renuncia a su cátedra lucasiana de matemáticas y Newton le sucede y ocupa este puesto hasta 1696. El mismo año envía a Collins, por medio de Barrow, su *Analysis per aequationes numero terminorum infinitos*. Para Newton, este manuscrito representa la introducción a un potente método general, que desarrollará más tarde: su cálculo diferencial e integral. En 1672 publicó una obra sobre la luz con una exposición de su filosofía de las ciencias, libro que fue severamente criticado por la mayor parte de sus contemporáneos, entre ellos Robert Hooke (1638-1703) y Huygens, quienes sostenían ideas diferentes sobre la naturaleza de la luz. Como Newton no quería publicar sus descubrimientos, no le faltaba más que eso para reafirmarle en sus convicciones, y mantuvo su palabra hasta 1687, año de la publicación de sus *Principia,* salvo quizá otra obra sobre la luz que apareció en 1675.

Desde 1673 hasta 1683, Newton enseñó álgebra y teoría de ecuaciones, pero parece que asistían pocos estudiantes a sus cursos. Mientras tanto, Barrow y el astrónomo Edmond Halley (1656-1742) reconocían sus méritos y le estimulaban en sus trabajos. Hacia 1679, verificó su ley de la gravitación universal y estableció la compatibilidad entre su ley y las tres de Kepler sobre los movimientos planetarios.

Newton descubrió los principios de su cálculo diferencial e integral hacia 1665-1666, y durante el decenio siguiente elaboró al menos tres enfoques diferentes de su nuevo análisis. Desde 1684, su amigo Halley le incita a publicar sus trabajos de mecánica, y finalmente, gracias al sostén moral y económico de este último y de la Royal Society, publica en 1687 sus célebres *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Los tres libros de esta obra contienen los fundamentos de la física y la astronomía escritos en el lenguaje de la geometría pura. El libro I contiene el método de las «primeras y últimas razones» y, bajo la forma de notas o de escolios, se encuentra como anexo del libro III la teoría de las fluxiones. Aunque esta obra monumental le aportó un gran renombre, resulta un estudio difícil de comprender, y parece que Newton quiso que fuera así con el fin «de evitar ser rebajado por pequeños semisabios en matemáticas». Quiso escapar así a las críticas suscitadas por sus textos sobre la luz.

En 1687, Newton defendió los derechos de la Universidad de Cambridge contra el impopular rey Jacobo II y, como resultado tangible de la eficacia que demostró en esa ocasión, fue elegido miembro del Parlamento en 1689, en el momento en que el rey era destronado y obligado a exiliarse. Mantuvo su escaño en el Parlamento durante varios años sin mostrarse, no obstante, muy activo durante los debates. Durante este tiempo prosiguió sus trabajos de química, en los que se reveló muy competente, aunque no publicara grandes descubrimientos sobre el tema. Se dedicó también al estudio de la hidrostática y de la hidrodinámica además de construir telescopios.

Después de haber sido profesor durante cerca de treinta años, Newton abandonó su puesto para aceptar la responsabilidad de Director de la Moneda en 1696. Durante los últimos treinta años de su vida, abandonó prácticamente sus investigaciones y se consagró progresivamente a los estudios religiosos. Fue elegido presidente de

la Royal Society en 1703 y reelegido cada año hasta su muerte. En 1705 fue hecho caballero por la reina Ana, como recompensa a los servicios prestados a Inglaterra.

Los últimos años de su vida se vieron ensombrecidos por la desgraciada controversia, de envergadura internacional, con Leibniz a propósito de la prioridad de la invención del nuevo análisis. Acusaciones mutuas de plagio, secretos disimulados en criptogramas, cartas anónimas, tratados inéditos, afirmaciones a menudo subjetivas de amigos y partidarios de los dos gigantes enfrentados, celos manifiestos y esfuerzos desplegados por los conciliadores para aproximar a los clanes adversos, he aquí en pocas palabras los detalles de esta célebre controversia, que se terminó con la muerte de Leibniz en 1716, pero cuyas malhadadas secuelas se harán sentir hasta fines del siglo XVIII.

Después de una larga y atroz enfermedad, Newton murió durante la noche del 20 de marzo de 1727, y fue enterrado en la abadía de Westminster en medio de los grandes hombres de Inglaterra.

No sé cómo puedo ser visto por el mundo, pero en mi opinión, me he comportado como un niño que juega al borde del mar, y que se divierte buscando de vez en cuando una piedra más pulida y una concha más bonita de lo normal, mientras que el gran océano de la verdad se exponía ante mí completamente desconocido.

Esta era la opinión que Newton tenía de sí mismo al fin de su vida. Fue muy respetado, y ningún hombre ha recibido tantos honores y respeto, salvo quizá Einstein. Heredó de sus predecesores, como él bien dice —«si he visto más lejos que los otros hombres es porque me he aupado a hombros de gigantes»— los ladrillos necesarios, que supo disponer para erigir la arquitectura de la dinámica y la mecánica celeste, al tiempo que aportaba al cálculo diferencial e integral el impulso vital que le faltaba.

El teorema del binomio

El teorema del binomio, descubierto hacia 1664-1665, fue comunicado por primera vez en dos cartas dirigidas en 1676 a Henry Oldenburg (hacia 1615-1677), secretario de la Royal Society que

favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. En la primera carta, fechada el 13 de junio de 1676, en respuesta a una petición de Leibniz que quería conocer los trabajos de matemáticos ingleses sobre series infinitas, Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica el teorema. Leibniz responde, en una carta fechada el 17 de agosto del mismo año, que está en posesión de un método general que le permite obtener diferentes resultados sobre las cuadraturas, las series, etc., y menciona algunos de sus resultados. Interesado por las investigaciones de Leibniz, Newton le responde también con una carta fechada el 24 de octubre en la que explica en detalle cómo ha descubierto la serie binómica.

Aplicando los métodos de Wallis de interpolación y extrapolación a nuevos problemas, Newton utilizó los conceptos de exponentes generalizados mediante los cuales una expresión polinómica se transformaba en una serie infinita. Así estuvo en condiciones de demostrar que un buen número de series ya existentes eran casos particulares, bien directamente, bien por diferenciación o integración.

Newton parte de las series infinitas obtenidas cuando Wallis quiere evaluar el área limitada bajo las curvas (de $x = 0$ a $x = x$) de ecuación $(1 - x^2)^n$ donde $x = 1, 2, 3, \ldots$ El examen de las áreas obtenidas para $n = 1, 2, 3, \ldots$ permitió a Newton demostrar que el primer término era siempre x, y el segundo

$$\frac{0x^3}{3}, \frac{1x^3}{3}, \frac{2x^3}{3}, \frac{3x^3}{3}, \text{ etc.,}$$

según fuera $n = 0, 1, 2, \ldots$, ya que

$(1 - x^2)^0 = 1$, $(1 - x^2)^1 = 1 - x^2$, $(1 - x^2)^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, etc.,

y, por integración entre $x = 0$ y $x = x$, el primer término *1* se convierte en x, $1 - x^2$ se convierte en $x - \frac{x^3}{3}$, $1 - 2x^2 + x^4$ se convierte en $x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$, etc.

Después, Newton trata de encontrar un desarrollo en serie para n fraccionario y comienza por $n = \frac{1}{2}$, haciendo la observación de que los términos de la serie $\frac{0x^3}{3}, \frac{1x^3}{3}, \frac{2x^3}{3}, \frac{3x^3}{3}$, están en progresión aritmética. Por consiguiente, el primer término intercalado será

$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, el segundo $x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, etc., ya que entre x y $x - \frac{lx^3}{3}$ se tienen los coeficientes 1 y $-\frac{1}{3}$ de los que el término medio es $\frac{1}{6}$ ó $\frac{\frac{1}{2}}{3}$, etc. A continuación busca una método para obtener los otros términos, dados los dos primeros. El área del segmento de círculo resulta ser, utilizando su algoritmo:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7}$$

donde

$$-\frac{\frac{1}{8}}{5} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} - 1}{2}}{5}; \quad -\frac{\frac{1}{16}}{7} = \frac{-\frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{2} - 2}{3}}{7}$$

Se da cuenta de que, después de haber obtenido este resultado, puede obtener lo mismo derivando $(1 - x)^{1/2}$ mediante su algoritmo (interpolación), y después determinando el área por integración de la serie. En suma, a partir de una integración, encuentra la generalización del binomio. Provisto de este instrumento, puede diferenciar o integrar y, en su carta a Leibniz, aplica su teorema a varios ejemplos, como el de la rectificación de la cisoide, de ecuación

$$xy^2 = (a - x^2).$$

Newton formula su teorema del binomio como sigue:

$$\overline{P + PQ}\rceil \frac{m}{n} = P\frac{m}{n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \ldots$$

$P + PQ$ es la cantidad cuya raíz o potencia (binomio) se busca, P es el primer término, Q es el término que queda cuando se divide por el primer término, $\frac{m}{n}$ el exponente, $A = P\frac{m}{n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$, etc., $\rceil$ es un símbolo que denota la raíz o la potencia de una expresión algebraica.

El descubrimiento de la generalización de la serie binómica es un resultado importante de por sí; sin embargo, a partir de este descubrimiento Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas. Por otra parte, esta idea fue confirmada a continuación cuando obtuvo la misma serie infinita extrayendo la raíz cuadrada de $(1 - x^2)$ sirviéndose de los procedimientos algebraicos habitua-

les, y finalmente, verificó que el resultado de la multiplicación de la serie por sí misma correspondía a la expresión inicial $(1 - x^2)$. De la misma manera, el resultado obtenido para $(1 - x^2)^{-1}$ mediante la serie binómica para $n = -1$ es de todo punto idéntico al que se obtiene mediante la larga división $\frac{1}{1 - x^2}$. El análisis mediante las series infinitas parecía posible, porque ahora resultaban ser una forma equivalente para expresar las funciones que representaban.

Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su *Algebra*, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

El De analysi

Compuesto en 1669 a partir de conceptos elaborados en 1665-1666, el *De analysi* no fue publicado hasta 1711, aunque era conocido entre los próximos a Newton porque circulaba en forma manuscrita desde 1669.

Al comienzo de sus investigaciones sobre las propiedades de las líneas curvas, Newton se apoya principalmente en el método de las tangentes de Descartes, aunque también recurre a la regla de Hudde para la determinación de los extremos. Newton se dispone desde el principio a elaborar algoritmos que le permitan simplificar la resolución de los problemas de tangentes, cuadratura y rectificación de curvas. El *De analysi* contiene los fundamentos de su método de las series infinitas que se manipulan mediante operaciones de división y extracción de raíces. Toma también de la física ciertos conceptos que se revelan útiles para sus métodos infinitesimales y para traducir su concepción cinemática de las curvas. En 1666 todavía no ha desarrollado completamente su notación de las fluxiones, pero en 1669, en el momento de la redacción de su *De analysi*, utiliza todavía la notación más o menos convencional de (x, y, z, p, q, r) y reserva para una ulterior publicación sus fluxiones como concepto operacional a nivel algorítmico.

Ilustremos su enfoque para la determinación del cambio instantáneo de una variable con respecto a otra. Supongamos una curva cuya área se expresa mediante $A = ax^m$, donde m es entero o fraccionario.

Newton denota con «o» un intervalo de tiempo muy pequeño, con «el momento de x» un incremento infinitesimal de x, aquí o, que es equivalente al E de Fermat. De la misma manera, «oy» se llamará «el momento de y» y «$A + oy$» el crecimiento del área cuando x varía o. Por tanto, $A + oy = a(x + o)^m$. Después, desarrolla el segundo miembro en serie binómica infinita, cuando m es fraccionario, sustrae de esta serie el área $A = ax^m$, divide cada uno de los términos obtenidos por o, a continuación suprime todos los términos que contienen o o una potencia de o y obtiene finalmente $y = max^{m-1}$.

De este modo, el cambio del área para todo valor de x es el valor de y para este valor de x. Newton demuestra también el recíproco: si la curva es $y = max^{m-1}$, el área comprendida bajo la curva es $A = ax^m$. Utiliza la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración y aplica su método para obtener el área comprendida bajo diversas curvas y para resolver numerosos problemas que requieren sumaciones. Enuncia y utiliza también la regla moderna: la integral indefinida de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada una de las funciones.

Se sirve también de las series infinitas para integrar curvas utilizando la regla de integración término a término. Para integrar $y = \frac{a^2}{b + x}$, divide a^2 por $b + x$ y obtiene

$$y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \dots$$

la integral o la cuadratura de la curva se obtiene integrando término a término, y el área es

$$A = \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} - \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \dots$$

Añadamos que, con motivo de ciertas observaciones a propósito de la utilización de las series infinitas, Newton parece estar preocupado por el concepto de convergencia, pero no aporta ninguna solución a este problema.

El método de las fluxiones

Se franquea una segunda etapa en el momento en que Newton acaba, en 1671, su obra *Methodus fluxionum et serierum infinitu-*

rum, comenzada en 1664. Newton tenía intención de publicarla, en particular en su *Opticks,* pero a causa de la críticas formuladas anteriormente con respecto a sus principios sobre la naturaleza de la luz, decidió no hacerlo. De hecho, será publicada en 1736 en edición inglesa, y no será publicada en versión original hasta 1742. Newton expone en este libro su segunda concepción del análisis introduciendo en sus métodos infinitesimales el concepto de fluxión.

En su prefacio, Newton comenta la decisión de Mercator de aplicar al álgebra la «doctrina de las fracciones decimales», porque, dice, «esta aplicación abre el camino para llegar a descubrimientos más importantes y más difíciles». Después habla del papel de las sucesiones infinitas en el nuevo análisis y de las operaciones que se pueden efectuar con esas sucesiones.

La primera parte de la obra se refiere justamente a la reducción de «términos complicados» mediante división y extracción de raíces con el fin de obtener sucesiones infinitas. Termina esta primera parte en el artículo 55 diciendo:

> He aquí todo lo que hay que decir sobre estos métodos de cálculo de los que haré un gran uso en lo que sigue. Ahora quedan por dar algunos ensayos de problemas, sobre todo los que nos presenta la naturaleza de las curvas, y esto para aclarar el arte analítico. Y observaré de antemano que todas sus dificultades pueden reducirse sólo a los problemas que voy a proponer en un espacio descrito por un movimiento local, retardado o acelerado de cualquier manera.

El primer problema consiste en encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. El segundo problema es la inversa del primero.

En el artículo 60, Newton introduce su nueva concepción:

> Llamaré cantidades fluentes, o simplemente fluentes, a estas cantidades que considero aumentadas gradual e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y y z para distinguirlas de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas y determinadas, y que se representan por las primeras letras a, b, c, etc. Representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$ las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones...

Es así como x e y son cantidades fluentes porque cambian, y $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son las fluxiones de las fluentes x e y. La fluxión de la fluxión se denotará mediante $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$, etc. Un poco más adelante, Newton llama «momento de la fluente» a la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño. Por tanto «la velocidad $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña o, es decir, $\dot{x}o$, representa el momento de una cantidad cualquiera x.» Y prosigue:

Ya que los momentos como $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ son las anexiones o aumentos infinitamente pequeños de las cantidades fluentes x e y durante los intervalos de tiempo infinitamente pequeños, se sigue que estas cantidades x e y, después de un intervalo de tiempo infinitamente pequeño, se convierten en $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$... De ese modo, se puede sustituir en la misma ecuación $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en el lugar de x e y.

Newton observa que se pueden despreciar todos los términos que no están multiplicados por o, «desaparecen siempre», y también los que están multiplicados por o «elevados a más de una dimensión».

Ilustremos el método de Newton para efectuar la diferenciación de $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

Sustituye $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en lugar de x e y respectivamente:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

Como $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, se eliminan esos términos en la ecuación anterior desarrollada y luego, después de haber dividido todos los términos que quedan por o, se tiene:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x - 3\dot{y}y^2 + 3\dot{x}^2ox - a\dot{x}^2o + a\dot{y}x - 3\dot{y}^2oy + \\ + \dot{x}^3o^2 + a\dot{x}\dot{y}o - \dot{y}^3o^2 = 0.$$

Se suprimen a continuación todos los términos afectados del infinitamente pequeño o, lo que proporciona como resultado final:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

El segundo problema trata de la determinación de las fluentes x, y, etc., dada la relación de las fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc. Como este problema es la inversa del precedente, se puede, en opinión de

Newton, resolverlo procediendo de manera contraria. Disponiendo de su método general, determina los máximos y mínimos de relaciones, las tangentes a curvas (parábola, concoide de Nicomedes, espirales, cuadratrices), el radio de curvatura, los puntos de inflexión y el cambio de concavidad de las curvas, su área y su longitud.

Newton incluye también en esta obra tablas de curvas clasificadas según diez órdenes y once formas, que comprenden también la abscisa y la ordenada para cada una de las formas y el área de cada una de ellas (tabla de integrales). También en este libro incluye Newton nuevas clases de ordenadas, una fórmula de aproximación para la solución de las ecuaciones que llevan su nombre, y el paralelogramo de Newton, útil para el desarrollo de series infinitas y para el trazado de curvas.

Cuando Newton aborda el problema de «trazar las tangentes de las curvas», expone nueve maneras diferentes de hacerlo, teniendo en cuenta las «diferentes relaciones de las curvas con las líneas rectas». En la tercera manera, recurre a las «coordenadas bipolares», poco utilizadas actualmente. Pero en la exposición de la séptima manera encontramos por primera vez la utilización de las coordenadas polares. Determinando la subtangente a la espiral de Arquímedes, Newton escribe $\frac{ax}{b} = \dot{y}$, donde x es el ángulo habitual e y expresa nuestro r o p. En otra ocasión, habiendo determinado el radio de curvatura

$$R = \frac{(1 + ZZ)\sqrt{1 + ZZ}}{Z}$$

donde $\dot{y} = Z$, de una curva dada en coordenadas rectangulares, reformula, en el artículo XLVIII, el radio R en coordenadas polares de la manera siguiente:

$$R \text{ sen } \varphi = \frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}}$$

donde el segundo miembro se expresa en la forma de una razón de líneas. Nótese que $z = \frac{\dot{y}}{y}$ y que φ es el ángulo entre la tangente y el radio vector de la espiral.

Newton expone en el artículo XX de su *Método* un procedimiento para la determinación aproximada de las raíces de una ecuación. Lo presenta como un método para efectuar «la reducción de las ecuaciones afectadas», para reducirlas a sucesión infinita. Partiendo

de la ecuación $y^3 - 2y - 5 = 0$ (en general $f(y) = 0$), toma un valor relativamente aproximado, 2, de una de sus raíces, hace a continuación $2 + p = y$, y forma la ecuación auxiliar

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \qquad |f(2 + p) = g(p)|.$$

Esta última ecuación admite una raíz de la que puede obtenerse un valor aproximado reduciendo la ecuación a sus dos términos de menor grado, de donde $10p - 1 = 0$, $p = 0{,}1$, de donde 2,1 es un nuevo valor de la raíz buscada; hace a continuación $0{,}1 + q = p$ y, sustituyendo, obtiene $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$; despreciando los dos primeros términos, queda $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, de donde $q \approx - 0{,}0054$; aplica el mismo procedimiento con $- 0{,}0054 + r = q$, etc. El procedimiento puede continuarse hasta donde se desee. Este método fue modificado ligeramente por Joseph Raphson en 1690, y después por Thomas Simpson en 1740, para dar la forma actual:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$$

donde a_1 es el primer valor aproximado y a_2 el segundo. Esta es la forma actual que se conoce bajo el nombre de «fórmula de aproximación de Newton».

El De quadratura curvarum

La tercera concepción de Newton a propósito del nuevo análisis aparece en su *De quadratura curvarum,* escrita en 1676 pero no publicada hasta 1704, como apéndice a su *Opticks.* Newton se propone esta vez fundamentar su cálculo sobre bases geométricas sólidas, por lo que hace hincapié en la concepción cinemática de las curvas, declarando en la introducción:

Considero que las magnitudes matemáticas no están formadas de partes, por muy pequeñas que sean, sino que son descritas mediante un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por la yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de sus puntos, las superficies por el movimiento de las líneas... Considerando, pues que las magnitu-

des que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según que crezcan a una velocidad mayor o menor, busqué un método para determinar las magnitudes a partir de las velocidades o crecimientos que los engendran. Llamando fluxiones a las velocidades de estos movimientos, mientras que las magnitudes engendradas se llamarían fluentes, encontré hacia 1665-1666 el método de las fluxiones, del que haré uso en la cuadratura de las curvas.

Más adelante, Newton describe la distinción entre el uso de elementos discontinuos y las nuevas consideraciones cinemáticas con referencia a las fluxiones:

Las fluxiones son, tan aproximadamente como se quiera, como los crecimientos de fluentes generados en muy pequeñas partículas de tiempo, iguales y, hablando con más precisión, están en la razón primera de los crecimientos nacientes; también pueden expresarse mediante líneas (razones) cualesquiera que les sean proporcionales.

Newton abandona así las cantidades infinitamente pequeñas en beneficio de una ampliación del concepto de fluxión que requiere la comparación de velocidades instantáneas en la razón última de los pequeños crecimientos.

La tercera concepción de Newton se presenta en forma operacional mediante el método de las «primeras y últimas razones». En la determinación de la fluxión de x^n, Newton procede como sigue: durante el mismo tiempo que la cantidad x, fluyendo, se convierte en $x + o$ (o es el crecimiento de x), la cantidad x^n se convertirá en $\overline{x + o}|^n$, es decir

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} oox^{n-2} + \ldots$$

por el método del binomio. Ahora, en lugar de proseguir su procedimiento eliminando los términos que contienen o, forma la razón de la variación de x a la variación de x^n, es decir,

$$1 \text{ a } nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \ldots$$

Después, deja «desaparecer» el o de tal manera que la razón «última» sea $1 : nx^{n-1}$. Así la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x^n como 1 es a nx^{n-1}. Evidentemente, este procedimiento es, a efectos prácticos, idéntico al nuestro, salvo que el uso

que hace Newton de la palabra «desaparecer» no corresponde a nuestro concepto de límite.

Sin embargo, el mismo Newton es consciente de las precauciones que hay que tomar para aplicar su método de las «primeras y últimas razones» a la determinación de la fluxión, porque añade en su Introducción:

Los menores errores en matemáticas no deben ser despreciados.

Añadamos que Newton explica también su notación de las fluxiones, en donde da $\overset{''}{x}$, $\overset{'}{x}$, x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, siendo cada término la fluxión del que le precede y la fluente del que le sigue. De hecho, $\overset{''}{x}$ y $\overset{'}{x}$ son notaciones de fluentes (integración) y $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ simbolizan fluxiones (diferenciación).

Newton precisa sus concepciones, sin introducir sus notaciones, al comienzo de los *Principia* en lo que llama método de «las primeras y últimas razones».

Los Principia

La primera información publicada acerca de su cálculo diferencial e integral aparece indirectamente en sus famosos *Philosophiae naturalis principia mathematica,* de 1687. Aunque en esta obra predomina la forma sintética y, por otra parte, Newton utiliza métodos geométricos en sus demostraciones, se encuentran sin embargo algunos pasajes analíticos, en particular la sección primera del libro I, titulada: «El método de las primeras y últimas razones» de las cantidades, con la ayuda del cual demostramos la proposición siguiente; es el lema I:

Las cantidades o razones de cantidades que tienden constantemente a la igualdad en un tiempo finito y que, antes del final de ese tiempo se aproximan más la una a la otra que cualquier diferencia dada, son al final iguales.

En otros términos, si Δx y Δy son pequeños crecimientos en x e y, y $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son las fluxiones de x e y, entonces la diferencia entre las razo-

nes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ puede hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo un intervalo de tiempo *t* suficientemente pequeño.

Entre los numerosos pasajes que explican su método de «las primeras y últimas razones», el que sigue, que proviene de un escolio que acompaña al lema XI en la segunda edición traducida por Andrew Motte, parece ser el más claro:

Las razones últimas en las que las cantidades desaparecen no son realmente las razones de cantidades últimas, sino los límites hacia los cuales se aproximan constantemente las razones de cantidades, que decrecen sin límite, y hacia los cuales pueden aproximarse tanto como cualquier diferencia dada, pero sin sobrepasarlos o alcanzarlos antes de que las cantidades disminuyan indefinidamente.

Es interesante observar la explicación de Newton relativa a sus razones últimas, porque nos permite ver mejor la semejanza entre su última concepción y nuestra derivada actual. En particular, la idea intuitiva de esta razón última se encuentra en el problema de las tangentes. Newton considera una tangente como la posición límite de una secante cuando dice que, si los puntos de intersección con la curva están separados uno de otro por un pequeño intervalo, la secante distará entonces de la tangente un pequeño intervalo. La secante puede así coincidir con la tangente cuando la razón última está determinada. Los dos puntos deben coincidir entonces.

Newton introduce la noción de «diferencial», designada por la palabra «momento», el cual es producido por una cantidad variable llamada *«genita»*. Este constituye una aproximación al concepto de función, y se presenta en el libro II, sección II de los *Principia*. Parece que estas cantidades llamadas *«genita»* son variables e indeterminadas, y que aumentan o decrecen mediante un movimiento continuo, mientras que sus momentos son crecimientos temporales que pueden generar partículas finitas. En aritmética, las *«genita»* son generadas o producidas por la multiplicación, la división o la extracción de raíces de cualquier término, mientras que la búsqueda del contenido de los lados o de los extremos y medias proporcionales constituye *«genita»*. Así, las «genita» pueden ser productos, cocientes, raíces, rectángulos, cuadrados, cubos, etc.

Dadas las *«genita»* A, B, y su momento respectivo a, b, el momento del rectángulo AB será $aB + bA$; el momento de $A^{\frac{n}{m}}$ será $\frac{n}{m}$

$aA^{\frac{n-m}{m}}$ y el momento de $\frac{1}{A}$ será $-aA^{-2}$, etc. Estas expresiones son equivalentes a la diferencial de un producto, de una potencia y de una inversa, respectivamente. Sin embargo, Newton no llega a esclarecer el concepto de momento lo suficiente como para que se pueda hablar aquí de una concepción neta de la diferencial de una función.

En el prefacio de sus *Principia,* Newton ofrece la definición de conceptos de mecánica tales como inercia, momento y fuerza, y después enuncia las tres célebres leyes del movimiento que son generalizaciones de las concepciones de Galileo sobre el movimiento.

A continuación, Newton asocia las leyes astronómicas de Kepler y la ley centrípeta de Huygens en el movimiento circular para establecer el principio de su célebre ley de la gravitación universal: $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$. Este libro I, titulado: *El movimiento de los cuerpos,* trata abundantemente de mecánica y comprende también un estudio y una descripción orgánica de las cónicas.

El libro II está consagrado al movimiento de los cuerpos en medios que ofrecen una resistencia como el aire y los líquidos. Es la verdadera introducción a la ciencia del movimiento de los fluidos. Se puede encontrar en él, entre otras cosas, un estudio de la forma de los cuerpos para ofrecer menos resistencia, una sección sobre la teoría de las ondas, una fórmula para la velocidad del sonido en el aire (987 pi/s, 300,8 m/s) y un estudio de las ondas en el agua.

El libro III, titulado *Sobre el sistema del mundo,* contiene las aplicaciones al sistema solar de la teoría general desarrollada en el libro I. Newton demostró cómo calcular la masa del Sol en términos de la masa de la Tierra y de los otros planetas que tienen un satélite. Calculó la masa volúmica media de la Tierra (entre 5 y 6) y demostró que tenía la forma de un esferoide aplanado, y que, por consiguiente, la atracción no era constante en su superficie. Hizo también un estudio de la precesión de los equinoccios y de las mareas, explicó que la Luna constituía la causa principal de este fenómeno y que el Sol también ejercía en él una influencia. Dedicó también un estudio detallado al movimiento de la Luna, porque debía servir para mejorar la determinación de las longitudes.

Newton realizó también contribuciones a otros temas matemáticos, entre los que podemos mencionar una clasificación de las curvas de tercer grado y trabajos sobre la teoría de las ecuaciones.

En un pequeño tratado, publicado como apéndice a su *Opticks* en 1704 y titulado *Enumeratio linearum tertii ordinis,* Newton, que compuso esta obra en 1676, divide las cúbicas en catorce *genera* que comprenden setenta y dos especies, de las que faltan seis. Para cada una de estas especies, traza cuidadosamente un diagrama y el conjunto de estos diagramas presenta todas las formas posibles (salvo las que son degeneradas) de las curvas de tercer grado. Subrayemos el uso sistemático de dos ejes y el empleo de coordenadas negativas.

En una obra publicada por primera vez en 1707, y de la que aparecen muchas ediciones en el siglo XVIII, Newton expone su visión de la teoría de las ecuaciones. Evidentemente nos referimos a su *Aritmetica universalis,* compuesta al parecer entre 1673 y 1683 a partir de los cursos que impartió en Cambridge. Entre las contribuciones importantes de esta obra, mencionemos las «identidades de Newton» para la suma de las potencias de las raíces de una ecuación polinómica, un teorema que generaliza la regla de los signos de Descartes para la determinación del número de raíces imaginarias de un polinomio, un teorema sobre la cota superior de las raíces de una ecuación polinómica, y el descubrimiento de la relación entre las raíces y el discriminante de una ecuación. Señalemos que las cuestiones geométricas ocupan una parte importante en esta obra, porque Newton parece pensar que es muy útil construir geométricamente la ecuación con el fin de estimar más fácilmente las raíces buscadas.

LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), nació el 21 de junio de 1646 en la ciudad de Leipzig. Era hijo de un profesor de filosofía que descendía de una buena familia. Muy pequeño todavía, a los seis años, pierde a su padre, quien había hecho nacer en él un marcado interés por la historia y el derecho. A los ocho años, comienza el estudio del latín y después pasa al estudio del griego como autodidacto. Antes de cumplir quince años ha estudiado el álgebra elemental de un tal Langius, y después la de Clavius; en cuanto a la de Descartes, le parece demasiado difícil. A los catorce años, Leibniz concibe la idea de que podría ser posible elaborar un alfabeto del

pensamiento humano, y que combinando las letras del alfabeto y analizando las palabras obtenidas, sería posible inferir y discutir sobre todas las cosas. Intenta así emprender la reforma de la lógica filosófica en su *Characteristica generalis,* donde concibe una revisión de todas las ciencias mediante el uso de un lenguaje científico universal y un cálculo del razonamiento. En esto, Leibniz fue influenciado por Ramón Llull (1235-1315) y su *Ars Magna.*

Matriculado a los quince años en los cursos de derecho de la Universidad de Leipzig, Leibniz se interesa también por la filosofía y por la lógica. Bachiller en 1663, aprovecha una estancia en Ginebra durante ese verano para estudiar la geometría euclídea y el álgebra con el físico Erhard Weigel (1625-1699). Se gradúa en filosofía y jurisprudencia en 1664 y en 1666 defiende en la Universidad de Altdorf su tesis *De arte combinatoria,* lo que le vale el título de doctor en filosofía y le califica para un puesto de profesor que él rechaza, sin embargo, pretextando que sus ambiciones son muy diferentes.

Si el año 1666 fue un año de inventos para Newton, para Leibniz fue la ocasión para redactar *De arte combinatoria,* ensayo de un joven estudiante, como subraya él mismo. En este ensayo presenta un intento de crear un método general en el cual todas las verdades de la razón deberían reducirse a una especie de cálculo. En suma, trata de establecer la lógica simbólica que Boole inventó a mediados del siglo XIX. En 1667 se encuentra en Nuremberg, donde entra al servicio del barón Juan Cristián de Boineburg, y más tarde del elector de Maguncia, Juan Felipe de Schönborn; se concentra entonces en un estudio profundo de los códigos antiguos y modernos. Mientras tanto, consulta los textos de los alquimistas y aborda la *Geometría* de Cavalieri y los *Elementos de las curvilíneas* de Léotaud, que encuentra por casualidad. Leibniz dice de sí mismo que las matemáticas, en aquella época, le proporcionaban una distracción agradable, pero que le gustaba sobre todo aprender sobre máquinas e inventarlas.

En 1671 redacta su primera obra sobre mecánica, titulada *Hypothesis physica nova,* que revela que su comprensión de los indivisibles es todavía extremadamente vaga. En 1671 inventa una máquina de calcular, concebida a partir de un principio nuevo y diferente de la de Pascal, que él conocía, porque podía efectuar las cuatro operaciones aritméticas fundamentales de manera automática. Al

parecer, Leibniz inventó su máquina para evitar que los astrónomos perdieran demasiado tiempo efectuando sus cálculos aritméticos. Un modelo de esta máquina se conserva en la Biblioteca del Estado de Hannóver.

En la primavera de 1672, Leibniz es enviado a París por Boineburg para una misión diplomática. Esta estancia en París, de 1672 a 1676, será interrumpida por un viaje a Londres, de enero a marzo de 1673. Diplomático, político, geómetra autodidacto, Leibniz manifiesta en París interés por la filosofía, la teología, la jurisprudencia y las matemáticas. En el otoño de 1672 conoce a Huygens quien, al advertir tanto sus dotes como su ignorancia en matemáticas, le sugiere algunas lecturas y le incita a emprender seriamente el estudio de las matemáticas. Es, pues, Huygens quien se hace cargo de la verdadera formación matemática de su joven amigo, que cuenta entonces veintiséis años, y le incita a desarrollar aún más sus conocimientos. Al mismo tiempo, Leibniz prosigue su trabajo de diplomático, sugiriendo a Luis XIV conquistar Egipto y atacar las colonias holandesas de Asia.

En 1673 pasa unos meses en Londres para realizar una misión política, lo que aprovecha para reunirse con matemáticos ingleses, como Oldenburg, con quien mantenía correspondencia desde 1670, Hooke y Pell; asiste también a dos sesiones de la Royal Society. En la primera reunión muestra a los miembros su máquina de calcular, cuyo prototipo es netamente superior a la de Pascal. El 19 de febrero de 1673 es elegido miembro de la Royal Society, lo que le vale en el futuro el beneficiarse de una correspondencia regular con este organismo, gracias a la diligencia de Collins. Parece que Leibniz no causó una impresión muy favorable en sus contactos con los matemáticos ingleses, y en particular con Hooke y Pell, pues éstos le consideraron un aficionado demasiado ambicioso, lleno de promesas que no podía cumplir e inclinado a servirse de las ideas de los demás para satisfacer sus ambiciones personales. Puede adivinarse fácilmente que esta impresión de los miembros de la Royal Society desempeñará un papel preponderante en la célebre controversia entre Newton y Leibniz. Habiendo fracasado su misión, Leibniz vuelve a París y lleva consigo un ejemplar de las *Philosophical transactions* para Huygens, la *Logarithmotechnia* de Mercator y las *Lectiones opticae* y las *Lectiones geometriae* de Barrow.

A su vuelta a París, recibe regularmente Cartas de Collins y

toma conciencia creciente de la extensión de su ignorancia en matemáticas y de la necesidad de proseguir sus estudios. Se encuentra de nuevo con Huygens, quien le facilita un ejemplar de la nueva edición de su obra sobre el *Péndulo.* Incapaz de comprender este tratado, Leibniz le plantea sus dificultades y Huygens le incita a leer a Pascal, Saint-Vincent, Descartes y De Sluse. Leyendo los trabajos de Pascal, en 1673, Leibniz tropieza, según dice, con «una demostración de Dettonville muy fácil en su género... Pero cuál fue mi sorpresa al ver que Pascal había tenido los ojos cerrados como por un sortilegio». Es esta idea, muchas veces repetida, la que conduce a Leibniz al descubrimiento del cálculo diferencial e integral; en el verano de 1673, desarrolla una transformación general mediante la cual expresa el área de un cuadrante de círculo en términos de una serie infinita.

Estimulado por Huygens, dedica todo su tiempo libre a las matemáticas y toma contacto con los trabajos de Gregory. A continuación viene el período de descubrimientos, que se sitúa entre 1674 y 1676: descubre el teorema fundamental, desarrolla una buena parte de su notación del cálculo y expone un buen número de fórmulas de diferenciación y de integración. Subrayemos que durante este período fecundo para las matemáticas, Leibniz conoce la inseguridad y llega a quedarse sin recursos, intentando vanamente obtener una pensión o un empleo permanente en París. En 1676 decide volver a Alemania, donde el duque de Brunswick-Hannóver le ofrece un puesto de consejero. Su viaje de vuelta le lleva a Londres, a La Haya, donde coincide con Spinoza, y por fin a Hannóver, en donde durante cuarenta años servirá a tres duques sucesivos como bibliotecario, historiador y guía intelectual de la familia de Brunswick.

Los cuarenta últimos años de su vida los dedica a una infinidad de actividades y a todo tipo de estudios y correspondencias, que le llevan a redactar una historia de la casa de Brunswick, panfletos, apologías, memorias; Leibniz no para un momento.

Fue, en particular, un lingüista de talento, un lógico que soñaba con fundar una ciencia universal según un álgebra del pensamiento, un pionero de la geología. Sus trabajos en filosofía le han situado entre los grandes filósofos de su tiempo. Se interesó mucho en grandes proyectos como la reunión de las Iglesias católica y protestante y más tarde la fusión de dos sectas protestantes. En 1682 fundó

con Otto Mencke la revista científica *Acta Eruditorum,* en la que serían publicados una buena parte de sus trabajos matemáticos entre 1684 y 1693. Propuso, en 1669, la fundación de una Academia de Ciencias en Alemania. En 1700 se fundaba oficialmente la Academia de Ciencias de Berlín. Preconizó el uso del alemán en lugar del latín para difundir el conocimiento y clarificar el razonamiento.

Los últimos siete años de su vida se vieron ensombrecidos por su controversia con Newton sobre el descubrimiento del cálculo diferencial e integral. Además, en 1714, el elector de Hannóver, Jorge Luis, para quien trabajaba, se convirtió en el primer rey alemán de Inglaterra, y Leibniz fue abandonado a su suerte en la ciudad de Hannóver mientras Jorge I iba a tomar posesión de su trono. Murió en 1716, a los setenta años y, según se dice, sólo su fiel secretario asistió a los funerales del más ilustre de los grandes matemáticos alemanes del siglo XVII.

Aunque Leibniz se distrajo al querer abarcar demasiado, no es menos cierto que su genio matemático es notable. Emprendió sus primeras investigaciones con Huygens, erudito de cultura matemática sin par, y guiado por él desarrolló sus concepciones del cálculo diferencial e integral bebiendo en las fuentes de sus predecesores. Deslindó así los principios del cálculo, creó una notación eficaz, percibió bien la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración, y expuso el algoritmo correspondiente. Las concepciones de Leibniz fueron formuladas en dos memorias aparecidas en 1684 y 1686 en la revista *Acta Eruditorum.* Sin embargo, antes de detenernos en su contenido, examinaremos las notas manuscritas que datan de 1675-1677, para mostrar cómo llegó Leibniz a sus concepciones.

Las notas manuscritas sobre el cálculo

Para comprender bien el pensamiento matemático de Leibniz hay que remontarse a su ensayo de estudiante, *De arte combinatoria,* de 1666. La idea central de su combinatoria se basa esencialmente en la relación entre el «todo» y las «partes», que proviene de su concepción de la «característica universal» o álgebra del pensamiento. De esta manera, realiza combinaciones de elementos dados con el fin de obtener fórmulas diferentes. En particular, a partir de sucesiones de

números naturales, combina los términos efectuando las diferencias de dos en dos.

Sea la sucesión de números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Las primeras diferencias (de un término menos el anterior) son 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, y las segundas diferencias son todas nulas. Para la sucesión de los cuadrados, se anulan las terceras diferencias. Por otro lado, Leibniz desarrolla algunas propiedades de las sucesiones de números, en particular que la suma de las diferencias es igual a la diferencia entre los términos último y primero. Por ejemplo, en la sucesión 3, 7, 11, 16, 21, 30, las diferencias son 4, 4, 5, 5, 9. La suma de las diferencias es $4 + 4 + 5 + 5 + 9 = 27$, y la diferencia entre los términos último y primero es $30 - 3 = 27$. Si el primer término de la sucesión es 0, la suma de las primeras diferencias es el último término de la sucesión.

Leibniz desarrolló también diferentes propiedades de las sucesiones y de las series y observó que, si en una sucesión de términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, los términos disminuyen progresivamente hasta cero, resulta entonces posible utilizar este «cálculo de diferencias» para efectuar sumas de series infinitas. En particular, Huygens le propuso en 1672 encontrar la suma de la serie infinita

$$1/1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 \ldots$$

en la que los términos son los recíprocos de los números triangulares 1, 3, 6, 10, etc. Leibniz demostró que la suma era 2.

En su *Characteristica generalis,* son de destacar dos aspectos: un lenguaje universal y un simbolismo apropiado. Además, en el desarrollo de su «cálculo de diferencias» y de las propiedades de las sucesiones de números, se preocupa desde muy pronto por inventar un simbolismo eficaz y bien definido.

Partiendo de estas sucesiones de números, Leibniz imagina que x representa el orden de los términos e y el valor de cada uno de ellos. A continuación, considera la sucesión de los términos como los valores de la y y de una función y la diferencia de dos términos cualesquiera como la diferencia de dos valores próximos a y. En consecuencia, la cantidad «*dx*», que designa a menudo mediante «*a*», es siempre *l* —la diferencia de orden de dos términos sucesivos es *e*— y la cantidad «*dy*» representa la primera diferencia de dos términos sucesivos.

Para representar la suma de las primeras diferencias de una su-

cesión de términos que comienza por cero, Leibniz procede de la manera siguiente: la suma se simboliza mediante «*omn.*» (del latín *omnia* = suma), «*l*» reemplaza a «*dy*» y escribe: $omn.l = y$, donde y es el último término de la sucesión. Determina el área de un triángulo de líneas (isósceles y rectángulo) por medio de su «cálculo de diferencias» y escribe que el área es $omn.yl = \frac{y^2}{2}$.
Abre una segunda etapa cuando consigue pasar del caso discreto al continuo, en el que dy y dx son ahora los incrementos de una función arbitraria f de x. En una nota manuscrita del 29 de octubre de 1675, Leibniz plantea la relación siguiente:

$$omn.yl = \overline{omn.\overline{omn.l}\frac{l}{a}}$$

y reemplazando el primer miembro por $\frac{y^2}{2}$, escribe

$$\frac{y^2}{2} = \overline{\text{omn.}\overline{\text{omn.l}}\frac{l}{a}}$$

lo que equivale, en notación moderna, a

$$\frac{y^2}{2} = \int \left\{\int \text{dy}\right\} \frac{dy}{dx} = \int y \frac{dy}{dx}$$

A partir de un argumento geométrico, obtiene

$$omn.xl = x\ omn.l - omn.omn.l$$

donde «*l*» es la diferencia de dos términos sucesivos de la sucesión y «*x*» el número de términos. Después, reemplaza l por x en la última igualdad y escribe entonces

$$omn.x^2 = x.omn.x - omn.omn.x$$

pero, señala, $omn.x$ es $\frac{x^2}{2}$, de donde

$$omn.x^2 = x\frac{x^2}{2} - omn.\ \frac{x^2}{2}$$

Trasponiendo el segundo miembro así:

$$omn.x^2 + omn.\ \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$$

$$omn.\ \frac{3x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$$

se obtiene

$$omn.x^2 = \frac{x^3}{3}$$

Es entonces cuando Leibniz, impresionado por los resultados obtenidos, sustituye *omn.* por el signo $\int$, lo que proporciona para esta última igualdad

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

y, en general, si $\frac{a}{b}$ es una constante dada, se tiene

$$\int \frac{a}{b} l = \frac{a}{b} \int l$$

En este punto, Leibniz está satisfecho de los resultados obtenidos y parece convencido de que le conducirán hasta un nuevo cálculo. Acomete entonces el problema inverso: dada un área, si se diferencia, debe proporcionar una longitud. Así, plantea el problema de la manera siguiente: dada l y su relación con x, encontrar $\int l$: sea $\int l \sqcap ya$, donde $\sqcap$ simboliza la igualdad, y supongamos que $l \sqcap \frac{ya}{d}$; entonces, como $\int$ aumentará la dimensión, «*d*» disminuirá la dimensión. A partir de una y dada, $\frac{ya}{d}$, es decir, l, puede encontrarse (la diferencia de las y). Por ejemplo, como

$$\int c \overline{\int l^2} = \frac{c \overline{| l^3}}{3a^3}\,,$$

entonces

$$c \overline{\int l^2} = \frac{c \overline{| l^3}}{3a^3 d}\,.$$

Habiendo introducido los símbolos $\int$ y d, que son de hecho operadores, Leibniz muestra que operan a la inversa uno de otro y parece convencido al principio de que $\int$ aumenta la dimensión y de que d la disminuye. Sin embargo, reconoce a continuación que $\int$ representa realmente la suma de rectángulos o una suma de áreas. Además, observa que, partiendo de y, para llegar a dy le hace falta obtener las diferencias de y. Por ello, algún tiempo después, pasa de y a dy, no divide ya por d, sino que escribe simplemente dy. El «cálculo de diferencias» que ha desarrollado hasta ahora se basa esencialmente en sucesiones de términos.

En un manuscrito fechado el 11 de noviembre de 1675, vuelve al problema inverso de la tangente y utiliza $\int$ para la suma y $\frac{x}{d}$ para la diferencia, diciendo que $\frac{x}{d}$ es dx, la diferencia de dos valores consecutivos de x. Pero, aparentemente, el dx de que se sirve es igual a la

unidad. A partir de esas consideraciones, afirma que «la integración en cuanto proceso de sumación es la inversa de la diferenciación». Al tener Leibniz que establecer una relación entre la «diferencia de las *x*», es decir *dx*, y la «diferencia de *y*», es decir *dy*, se interesa por el significado de expresiones como $\frac{dy}{dx}$, $d(uv)$, $d(u/v)$, $d(u \cdot v)$, etc.

El cociente $\frac{dy}{dx}$ se encuentra especialmente en la resolución de un problema que consiste en determinar una curva cuya subnormal es inversamente proporcional a la ordenada. Leibniz basa su argumentación en el triángulo característico que Pascal y Barrow habían utilizado anteriormente.

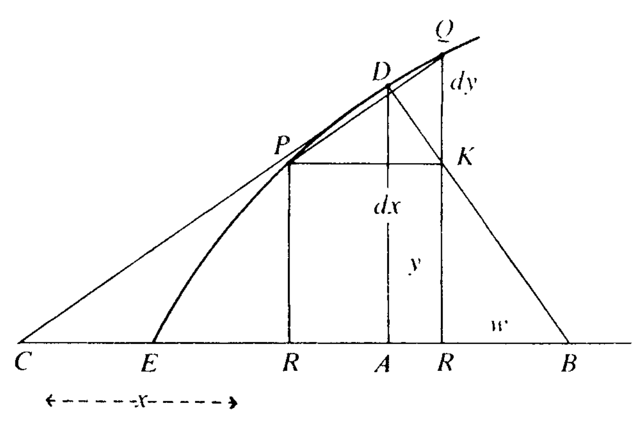


FIGURA 3.1

El triángulo característico es el triángulo *PQK* constituido por *dy*, *dx* y el arco *PQ*. Por semejanza de triángulos, Pascal había visto que $\frac{BD}{DA} = \frac{PQ}{RR} = \frac{PQ}{QK}$ y, para un intervalo *RR* pequeño, el segmento de recta *PQ* es identificable con el arco *PQ*, en valor numérico. Leibniz concluye que $\frac{dy}{dx} = \frac{DA}{CA}$. Lo que Pascal no había visto es la determinación de la tangente mediante la diferencia de las ordenadas *QR* dividida por la diferencia de las abscisas, *CR*.

En la figura 3.1, la normal es *DB*, y la subnormal *w* es *AB*. Por semejanza de los triángulos *PQK* y *DAB*, Leibniz puede escribir

$$\frac{dy}{dx} \sqcap \frac{w}{y} \quad \text{ó} \quad pdx \sqcap ydy.$$

Como la curva tiene la propiedad de que

$$w \sqcap \frac{b}{y}$$

donde b es una constante de proporcionalidad

$$b\frac{dx}{y} \sqcap ydy \quad \text{y} \quad dx \sqcap \frac{y^2}{bdy}$$

entonces

$$\int dx \sqcap \int \frac{y^2}{b}\, dy, \quad x \sqcap \frac{1}{b} \int y^2 dy, \quad x \sqcap \frac{y^3}{3b}$$

En una nota manuscrita del 26 de junio de 1676, Leibniz afirma que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando $\frac{dy}{dx}$, donde dy y dx son diferencias, y $\frac{dy}{dx}$ un cociente. Se da cuenta, pues, que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas (punto éste que no vio Pascal).

En noviembre de 1676, Leibniz descubre la diferenciación en cadena y establece que $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, mientras que el 11 de julio de 1677 consigue, con dificultad, establecer las reglas exactas de la diferencial de una suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones, sin incluir no obstante las demostraciones de estos resultados.

Hacia 1680, el dx resulta la diferencia de las abscisas y el dy la diferencia de las ordenadas. Llama dy al incremento momentáneo en y cuando la ordenada se desplaza a lo largo del eje de las x. Se encuentra, en particular, en este manuscrito una fórmula para la longitud de arco, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, y el volumen de un sólido de revolución obtenido por la rotación de la curva alrededor del eje de las x viene dado por

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

El conjunto de estas notas manuscritas nos revela a un Leibniz que busca una representación simple y eficaz de los elementos y de las operaciones de base en los procedimientos infinitesimales y que inventa la notación para el cálculo infinitesimal. Durante todos estos años de investigaciones, no está esencialmente preocupado por la invención de matemáticas nuevas, sino que, de pasada y con motivo

de la resolución de problemas, se ve conducido a proponer técnicas nuevas. Su enfoque se basa fundamentalmente en el concepto de sumas y diferencias finitas y, cuando las aplica a curvas, pueden llegar a ser infinitamente pequeñas. Su fin no es establecer teoremas sino elaborar, lo más eficazmente posible, un método mediante el cual, sin recurrir a diagramas, ciertas propiedades de las figuras puedan ser determinadas por medio de su «cálculo de las diferencias».

La Nova methodus pro maximis et minimis

La primera publicación de Leibniz sobre el cálculo diferencial aparece en *Acta Eruditorum* en 1684, bajo el título de *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales). En esta primera obra, Leibniz presenta las reglas generales de la diferenciación y se sirve de las diferenciales más que de las derivadas por medio de la notación «*d*».

Las diferenciales dx, dy se definen como incrementos finitos, pero en una ocasión define dy como $dy : dx = y$: subtangente, donde dx es una constante arbitraria, lo que implica una cierta expresión de la subtangente, aunque entonces la definición no es ciertamente completa. Proporciona las fórmulas obtenidas en 1677: $d(xy) = xdy + ydx$ (la no inclusión del término $dxdy$ se basa en la noción de infinitamente pequeño), $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ y $d(x^n) = nx^{n-1}$, para los productos, cocientes y potencias o raíces, todo ello acompañado de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, de los máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión. En particular, se encuentra allí la condición $dv = 0$ para un máximo o un mínimo, y ddv para un punto de inflexión. Introduce por primera vez la expresión «cálculo diferencial», pero se observa la ausencia del término función. Este texto no se caracteriza precisamente por su claridad, pues ya los hermanos Bernoulli lo consideraban como «un enigma, más que una explicación».

En la segunda memoria, publicada en 1686 en la misma revista, Leibniz expone las reglas fundamentales del cálculo integral. Titula-

da *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitarum* (Sobre una geometría altamente escondida y el análisis de los indivisibles e infinitos), este texto trata del problema inverso de las tangentes y contiene en particular el símbolo $\int$. Publicada bajo la forma de un informe crítico de un libro publicado por John Craig, matemático escocés y discípulo de Newton, esta memoria ilustra dos puntos fundamentales: 1.°, la gran utilidad del símbolo de la sumación combinado con el de la diferenciación de la manera siguiente: si $ydy = xdx$, entonces $\int ydy = \int xdx$, e inversamente, lo que traduce el carácter inverso de las operaciones $\int$ y d; 2.°, la potencia del método para representar las cantidades «transcendentes», que están prácticamente inexploradas.

Se encuentra también en ella la ecuación de la cicloide, bajo la forma

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

las diferenciales de las funciones logarítmicas y exponenciales, y una exposición que trata de la curvatura y de la teoría de las envolventes.

Leibniz publicó también otras memorias en la revista *Acta Eruditorum* en 1692 y 1694, además de mantener correspondencia con los hermanos Bernoulli sobre diferentes temas relativos al cálculo. En particular, intentó en vano definir las diferenciales de orden superior, comenzó una tabla de integrales e ilustró geométricamente el teorema fundamental del cálculo. En 1714, Leibniz escribió una *Historia et origo calculi differentialis* en la que pasa revista al desarrollo de su pensamiento matemático. Sin embargo, esta historia no parece lo suficientemente objetiva en los hechos como para que constituya un testimonio en el que se pueda confiar para evaluar sus contribuciones en el campo de las matemáticas.

Otros trabajos de Leibniz

La gran contribución de Leibniz a las matemáticas es, sin ninguna duda, su *Cálculo de las diferencias,* pero algunos de sus trabajos de menor importancia merecen que nos detengamos en ellos.

Hemos visto que Leibniz se interesó desde muy pronto por la

lógica, y el método mecánico propuesto por Ramón Llull para producir nuevas ideas mediante combinaciones de ideas ya existentes le condujo a elaborar un cálculo que permitiera a los hombres razonar en todos los campos de actividades sin esfuerzo. Los dos aspectos fundamentales de su *Characteristica generalis* consistían en la creación de un «lenguaje universal» y de un simbolismo apropiado. Según Leibniz, los signos se utilizan no sólo para comunicar los pensamientos, sino también para facilitar el proceso mismo del pensamiento. En su forma simbólica, las operaciones con símbolos deberían reflejar todas las combinaciones permitidas de los objetos que representan, y deberían poner de manifiesto las combinaciones imposibles. La «característica universal», según Leibniz, debía ser la fuente de una verdadera álgebra lógica que fuera aplicable a diferentes expresiones del pensamiento.

Concebida como un plan lógico, la «característica universal» es un sistema de símbolos rigurosamente definidos que puede ser utilizado en lógica y otras ciencias deductivas para denotar los elementos simples de los objetos a estudiar por una ciencia dada. Las ideas complejas podrían entonces ser expresadas como combinaciones de ideas simples procedentes de un «alfabeto» del pensamiento humano, y estas combinaciones se efectuarían teniendo en cuenta un conjunto de reglas que no sólo describieran las propiedades formales de las transformaciones de los símbolos, sino que además consideraran los procedimientos que clarifican las representaciones simbólicas. La «característica universal» designa mediante letras a todos los elementos simples, las fórmulas están constituidas por las combinaciones permitidas de estos elementos, y los enunciados o proposiciones se designan mediante ecuaciones. En suma, Leibniz busca la elaboración de un álgebra de la lógica. A pesar de sus tres intentos de construir un cálculo lógico, los trabajos de lógica de Leibniz, que no serán publicados hasta principios del siglo XX, ejercerán en la práctica una influencia muy escasa sobre sus sucesores. Además, la historia muestra que su «característica universal» resulta una empresa irrealizable. Sin embargo, su idea de algebrizar la lógica se ha concretado gracias a los trabajos de los lógicos de los siglos XIX y XX.

En general, se atribuye a Leibniz el hecho de haber sido el primero en Occidente en utilizar un método para la resolución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, anterior al método de los

determinantes. En una carta fechada en 1693 y dirigida al marqués de L'Hospital, Leibniz anuncia que, ocasionalmente, hace uso de un sistema de índices para los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas x e y:

Método de Leibniz		Método moderno
$10 + 11x + 12y = 0$		$a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0$
$20 + 21x + 22y = 0$	o	$a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0$
$30 + 31x + 32y = 0$		$a_{30} + a_{31}x + a_{32}y = 0$

donde, eliminando y entre la primera y segunda ecuación, se debería tener

$$\begin{matrix} 10.22 + 11.22x \\ -12.20 - 12.21\ldots \end{matrix} = 0 \qquad \begin{matrix} (a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}) + \\ + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \end{matrix}$$

y eliminándola entre la primera y la tercera ecuación, se tiene

$$\begin{matrix} 10.32 + 11.32x \\ -12.30 - 12.31\ldots \end{matrix} = 0 \qquad \begin{matrix} (a_{10}a_{32} - a_{12}a_{30}) + \\ + (a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})x = 0 \end{matrix}$$

Queda por eliminar x, y se debería obtener entonces

$$\begin{matrix} 1_0.2_1.3_2 & & 1_0.2_2.3_1 \\ 1_1.2_2.3_0 & = & 1_1.2_0.3_2 \\ 1_2.2_0.3_1 & & 1_2.2_1.3_0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{10}a_{21}a_{32} & & a_{10}a_{22}a_{31} \\ + a_{11}a_{22}a_{30} & = & + a_{11}a_{20}a_{32} \\ + a_{12}a_{20}a_{31} & & + a_{12}a_{21}a_{30} \end{matrix}$$

y si se trasponen todos los términos a un mismo miembro, se tendrá

$$\begin{matrix} a_{10}a_{21}a_{32} - a_{10}a_{22}a_{31} \\ + a_{11}a_{22}a_{30} - a_{11}a_{20}a_{32} \\ + a_{12}a_{20}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{30} \end{matrix} = 0 \quad \text{ó} \quad \begin{matrix} 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \\ 30 & 31 & 32 \end{matrix} = 0$$

El determinante nulo significa que existen una x y una y que satisfacen las tres ecuaciones del sistema original. Esta anticipación no será conocida hasta 1850.

Leibniz se interesó también indirectamente por los números complejos estudiando el álgebra de Bombelli. No estaba de acuerdo con la afirmación de Bombelli de que la fórmula de Cardan era inadecuada para el caso «irreducible» de la ecuación cúbica. Y se propuso demostrar las tres proposiciones siguientes:

1) La fórmula de Cardan es válida en todos los casos.
2) Toda ecuación cúbica puede resolverse por medio de esa fórmula.
3) Las raíces de todas las potencias pares pueden formularse de manera que contengan las imaginarias, que son de hecho reales.

Demostrando la proposición 3 encontró la fórmula

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$$

que fue obtenida mediante una analogía con el estudio algebraico de las curvas de segundo grado. Este resultado sorprendió a un matemático de talento, Huygens. Se encuentra también en los trabajos de Leibniz la descomposición de $x^4 + a^4$ en la forma moderna

$$x_1 = -a\sqrt{+i},\ x_2 = a\sqrt{+i} \qquad \text{donde } i^2 = -1$$
$$x_3 = -a\sqrt{-i},\ x_4 = a\sqrt{-i}$$

A propósito de esta descomposición, Leibniz, en 1702, describe estas raíces imaginarias en términos teñidos de «teologismo»:

Un recurso elegante y maravilloso para la inteligencia humana, un nacimiento *contra natura* en el campo del pensamiento, casi un anfibio entre el ser y el no ser.

Leibniz y Johann Bernoulli (1667-1748) intercambiaron una correspondencia importante entre el 16 de marzo de 1712 y el 29 de julio de 1713 a propósito de los logaritmos de los números negativos, que requieren, evidentemente, la presencia de $\sqrt{-1}$. Se estableció otra correspondencia entre ellos en 1701 a propósito de un sistema binario en aritmética. En 1703, Leibniz había publicado en las *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences* una «Explicación de la aritmética binaria», la primera exposición sobre este tema, que tendrá cierto impacto en la comunidad científica.

La célebre controversia entre Newton y Leibniz

Sabemos que Leibniz fue el primero en publicar un informe de sus trabajos sobre el cálculo en 1684, mientras que Newton dio a conocer el suyo en 1687 en sus *Principia.* Parece, sin embargo, que la controversia no se desencadenó hasta 1699. Pero ya en 1695 se producen dos acontecimientos. En primer lugar, Wallis informa a Newton por carta de que circulan rumores de que en Holanda su noción de fluxión es bien acogida pero bajo el nombre de «Leibniz calculus differentialis». A continuación, Johann Bernoulli desafía a los matemáticos europeos a resolver dos problemas (braquistócrona) en seis meses. Leibniz obtiene de Bernoulli una prórroga de un año para permitir la participación de todos los matemáticos del mundo. Durante este año adicional, Newton recibe los dos problemas, los resuelve por la noche, y a la mañana siguiente entrega las soluciones al presidente de la Royal Society. Leibniz escribe en su revista, algún tiempo después un texto en el que admite las soluciones de Newton; sin embargo, da a entender que Newton es su alumno y que ha llegado a las soluciones gracias a su conocimiento del cálculo.

Estos dos acontecimientos revelan ya una cierta rivalidad oculta que se transformará en hostilidad abierta cuatro años más tarde. En 1699, Fatio de Duillier, matemático suizo de Ginebra, afirma en un texto presentado en la Royal Society que Newton fue el primer inventor del cálculo y que Leibniz fue el segundo o que tomó sus ideas de Newton, prefiriendo él mismo dejar a otros la tarea de comprobarlo a partir de los textos de Newton. Es la salida, la primera insinuación de que Leibniz ha plagiado a Newton, y el primero responde ignorando la cuestión de la prioridad e insistiendo en sus derechos a ser el primer inventor del cálculo. Mientras tanto, Newton se mantiene apartado del debate, pero la revista de Leipzig se niega a publicar la réplica de Duillier a Leibniz. El debate se reanuda a raíz de la publicación de *Opticks* en 1704, cuando una crítica anónima, aparecida en *Acta Eruditorum,* sobre la teoría de las fluxiones, despierta la ira de los matemáticos ingleses. Se forman entonces dos grupos, el de los Bernoulli con Leibniz y el de los matemáticos ingleses que apoyan a Newton, defendiendo cada uno con ahínco sus concepciones, de forma que la polémica entre los dos

grupos engendra una animosidad larga y amarga entre los matemáticos ingleses y los del continente europeo.

De todo ello resulta un completo cese de intercambios entre los matemáticos ingleses y continentales. Los matemáticos ingleses, profundamente influenciados por los trabajos de Newton y su utilización demasiado conservadora de los métodos geométricos, continuan preconizando el instrumento geométrico durante cerca de un siglo. Los matemáticos del continente, por su parte, adoptan los métodos analíticos de Leibniz, los desarrollan y los perfeccionan considerablemente durante el siglo XVIII. Además, los métodos de Leibniz resultan ser mucho más eficaces que los de Newton, de manera que los matemáticos ingleses se ven relegados a un segundo plano durante todo este período, privando así a las matemáticas de los aportes nuevos que se habría podido esperar de ellos.

BIBLIOGRAFÍA

Ball, W. W. Rouse, «On Newton's classification of cubic curves», *Proceedings of the London Mathematical Society,* 22, 1890-91, pp. 104-143.

Baron, Margaret E., *The origins of the infinitesimal calculus,* Oxford, Pergamon Press, 1969, pp. 253-290.

Bell, Eric T., *Men of Mathematics,* Nueva York. Simon and Schuster, 1965, pp. 90-130.

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley & Sons, 1968, pp. 429-454.

Boyer, Carl B., «Newton as an originator of polar coordinates», *The American Mathematical Monthly,* 56, 1949, pp. 73-78.

Boyer, Carl B., *History of analytic geometry,* Nueva York, *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 138-150.

Boyer, Carl B., *The history of calculus and its conceptual development,* Nueva York, Dover, 1959, pp. 187-224.

Cajori, Florian, «The history of notations of the calculus», *Annals of Mathematics,* 25, 1923-24, pp. 1-46.

Cohen, Bernard I., comp., *Isaac Newton's papers and letters on natural philosophy,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1958.

Coolidge, Julian Lowell, «The story of the binomial theorem», *The American Mathematical Monthly,* 56, 1949, pp. 147-157.

Coolidge, Julian Lowell, «The origin of polar coordinates», *The American Mathematical Monthly,* 59, 1952, pp. 78-85.

Coolidge, Julian Lowell, «The story of tangents», *The American Mathematical Monthly,* 58, 1951, pp. 449-461.

Coolidge, Julian Lowell, «The unsatisfactory story of curvature», *The American Mathematical Monthly,* 60, 1953, pp. 375-379.

Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 580-586.

Dedron, Pierre y Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens,* París, Magnard, 1959, pp. 231-246.

Eves, Howard, *An introduction to the history of mathematics,* 3.ª ed., Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1969, pp. 332-348.

Flad, Jean-Paul, *Les trois premières machines à calcular,* D-93, París, Palais de la Découverte, 1963.

Gardner, Martin, *L'étonnante histoire des machines logiques,* París, Dunod, 1964, pp. 1-32.

Glaser, A., *History of binary and other nondecimal numeration,* Pennsylvania, Anton Glaser, 1971, pp. 31-50.

Graves, G. H., «Development of the fundamental ideas of the differential calculus», *The Mathematics Teacher,* 3, 1910, pp. 82-89.

Hoffman, Joseph E., «On the discovery of the logarithmic series and its development in England up to Cotes», *The National Mathematics Magazine,* 14, pp. 37-45.

Kitcher, Philip, «Fluxions, limits, and infinite littleness», *Isis,* 64, 1973, pp. 33-49.

Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 356-381.

Knobloch, Eberhard, «The mathematical studies of G. W. Leibniz on combinatorics», *Historia Mathematica,* 1, 1974, pp. 409-430.

Lai, Tyrone, «Did Newton renounce infinitesimals?», *Historia Mathematica,* 2, 1975, pp. 127-136.

Meschkowski, Herbert, *«Ways of thought of great mathematicians».* San Francisco, Holden Day Inc., 1964, pp. 48-59.

Miller, G. A., «On the history of determinants», *The American Mathematical Monthly,* 37, 1930, pp. 216-219.

National Council of Teachers of Mathematics (The), *Historical Topics for the Mathematics Classroom,* 31st. Yearbook, Washington, D.C., N.C.T.M., 1969, pp. 229, 264-266, 281-282, 391-398, 418-423.

Newton, Isaac, *Le méthode des fluxions et des suites infinies,* París, Librairie Scientifique Albert Blanchard, 1966.

Rosenthal, Arthur, «The history of calculus», *The American Mathematical Monthly,* 62, 1955, pp. 75-86.

Schrader, Dorothy V., «The Newton-Leibniz controversy concerning the discovery of the calculus», *The Mathematics Teacher,* 55, 1962, pp. 385-396.

Slichter, C. S., «The Principia and the modern age», *Thè American Mathematical Monthly,* 44, 1937, pp. 433-444.

Smith, David E., comp., *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vol. II, 1959, pp. 219-231, 613-626.

Styazhkin, N. I., *History of mathematical logic from Leibniz to Peano,* Cambridge, Massachusetts, M.I.T. Press, 1969, pp. 56-92.

Struik, Dirk J., comp., *A source book in mathematics, 1200-1800,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969, pp. 93-99, 168-178, 270-312.

Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. II, *La science moderne,* París, P.U.F., 1969, pp. 242-251. [*Historia general de la ciencia,* vol. II, *La ciencia moderna,* Barcelona, Destino 1972].

Turnbull, H. W., *The great mathematicians,* Londres, Methuen (University Paperbacks), 1962, pp. 97-106.

Whiteside, D. T., «Newton's discovery of the general binomial theorem», *The Mathematical Gazette,* 45, 1950, pp. 175-180.

Wren, F. L. y J. A. Garret, «The development of the fundamental concepts of infinitesimal calculus», *The American Mathematical Monthly,* 40, 1929, pp. 269-275.

EJERCICIOS

1. Describir el enfoque del cálculo de Newton.
2. Distinguir los tres intentos de Newton de elaborar su cálculo y mostrar las diferencias fundamentales entre cada uno.
3. Describir el enfoque del cálculo de Leibniz.
4. Comparar las contribuciones de Newton y Leibniz a la notación del cálculo.
5. Comparar la forma newtoniana del teorema del binomio con la forma actual, y demostrar que son equivalentes.
6. Integrar la función $y = \frac{a^3}{b - x}$ sirviéndose del método de las series de Newton.
7. Efectuar la diferenciación de $x^3 + 3x^2 - 5xy + y^2 = 0$ por el método de fluxiones.
8. Derivar la función $y = x^4$ por el método de las «primeras y últimas razones».

9. Explicar cómo llega Newton a definir la noción de diferencial.
10. ¿Cómo concebía Leibniz su célebre «característica universal»? Explicar esta concepción.
11. ¿Cuál fue el papel de Pascal en la evolución del análisis de Leibniz?
12. Resolver por el método de Newton la cúbica $x^3 - 6x + 3 = 0$ para una raíz comprendida entre 2 y 3.

SEGUNDA PARTE

EL SIGLO XVIII

LAS MATEMATICAS EN EL SIGLO XVIII

Durante el siglo XVIII, las contribuciones matemáticas en álgebra, geometría analítica y cálculo son tales que el aspecto de la ciencia matemática se modifica profundamente, hasta el punto de hacerse casi irreconocible. La inmensidad de los progresos realizados suscita una gran confianza en el valor explicativo y en el poder práctico de la ciencia. En particular, la implicación de las matemáticas en las ciencias hace nacer problemas complejos y apasionantes, mientras que el entusiasmo y la curiosidad intelectuales, suscitados por el éxito de la mecánica de Newton, conducen a nuevos trabajos y a nuevos descubrimientos. Además, la mayor parte de los soberanos de Europa rivalizan en la fundación y el mantenimiento de academias, que permiten así a un mayor número de científicos trabajar en el desarrollo de las ciencias, así como en una mayor difusión de éstas, factor primordial de la aceleración del progreso.

La tarea esencial de los matemáticos del siglo XVIII será precisar y distinguir, extender, coordinar y aplicar los descubrimientos recientes. Verdaderos virtuosos de la técnica, los ingeniosos matemáticos del siglo XVIII se esforzarán por desarrollar el cálculo diferencial e integral y utilizar nuevos instrumentos para deducir de él capítulos importantes: series infinitas, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en derivadas parciales, geometría diferencial y cálculo de variaciones. Aunque menos espectaculares, los progresos realizados en los demás campos de las matemáticas merecen, sin embargo, ser señalados. Sin aportar innovaciones brillantes, el campo de las ciencias algebraicas es objeto de numerosos perfeccionamientos que preparan la revolución del siglo siguiente: se emprende el estudio de las ecuaciones de grado superior a cuatro, así como la ampliación de la aplicación de los números complejos y su representación geométrica; la teoría de números, abandonada por un tiempo, ocupa un lugar importante en los trabajos de Euler y Lagrange; y el cálculo de probabilidades se convierte en una ciencia nueva que conoce sus primeras aplicaciones. Los progresos de la geometría analítica reali-

zados en el curso de este siglo llevan verdaderamente a la geometría analítica moderna. Gracias a los trabajos de Monge, la geometría descriptiva, esta nueva rama de la geometría cuyos primeros elementos se remontan a Durero, se hace clásica. Aunque ciertos trabajos anteriores estuvieran consagrados al estudio de la geometría infinitesimal según los estudios de Euler, es en Monge en quien recae el honor de haber aportado los resultados de mayor importancia, así como una renovación completa de los métodos de estudio en este campo.

La producción matemática en Europa durante el siglo XVIII difiere considerablemente de un país a otro. Francia y Suiza son las naciones que ejercen una cierta supremacía, mientras que Alemania, los Países Bajos, Italia y los demás, no participan casi en la marcha del progreso. La escuela inglesa es muy próspera a comienzos de siglo; Newton y sus discípulos reinan en ella. Pero la servidumbre demasiado estricta a la tradición newtoniana y el aislamiento casi total de los matemáticos ingleses, ocasionado por la célebre controversia entre Newton y Leibniz, ocasionarán un declive bastante rápido de esta escuela en la primera mitad del siglo. Por el contrario, en el continente, los matemáticos discípulos de Leibniz desarrollan las grandes líneas del «cálculo de diferencias» de este último y amplían considerablemente el campo de investigación. Los principales representantes de esta escuela son los hermanos Jakob y Johann Bernoulli y L'Hospital. La escuela francesa no comienza a brillar verdaderamente hasta la generación de Maupertuis, Clairaut y D'Alembert, y el considerable prestigio que adquirirá a finales de siglo se debe en gran parte a las actividades matemáticas de Lagrange, Laplace, Legendre y Monge.

El movimiento de fundación de academias y revistas científicas del siglo XVII adquiere un desarrollo considerable en el siglo siguiente, gracias al estímulo de los monarcas de diferentes países como Prusia y Rusia. Estos centros de investigación y enseñanza instauran una política de importación de talentos que atrae a la Academia de Berlín nombres tan prestigiosos como Euler, Lambert, Lagrange; a la Academia de San Petersburgo a los científicos de Basilea Daniel y Nikolaus Bernoulli, así como a Euler, que se unirá a ellos en 1727. Mientras que las universidades dispensan una enseñanza científica netamente insuficiente, las academias ayudan económicamente a los científicos, y la difusión de sus trabajos se

efectúa cada vez más mediante revistas científicas publicadas con fondos que provienen principalmente del Estado. Además, la fecunda emulación que suscitan las numerosas academias y los concursos que convocan, disputados por los científicos de Europa, vivifica la vida científica y estimula la formación de matemáticos profesionales.

Si se admite que Roberval fue uno de los raros matemáticos profesionales del siglo XVII, la aportación del siglo XVIII es casi exclusivamente obra de científicos profesionales. Aparte de algunos matemáticos aficionados, son sobre todo los profesores de universidad, los miembros de las academias o los matemáticos itinerantes los que hacen progresar las matemáticas durante ese siglo.

Estos matemáticos profesionales del siglo XVIII se inspiran directamente en los problemas físicos planteados a partir de los trabajos de Galileo y Newton en física y en astronomía. Así se puede decir que la mecánica celeste se convierte en el paraíso de los matemáticos, pues ofrece una mina de problemas nuevos por explorar, para cuya solución las matemáticas constituyen un instrumento casi indispensable. La física estudiada por los científicos del siglo XVIII se enriquece progresivamente con las aportaciones de las matemáticas, las cuales, a su vez, se benefician grandemente de las fuentes fecundas ofrecidas por la ciencia.

Más todavía que en el siglo anterior, las matemáticas del siglo XVIII, lejos de limitarse a la pura teoría, tratan tanto los problemas prácticos como los tecnológicos. Euler, por ejemplo, se interesa por los navíos, la acción de las velas, la balística, la óptica y la cartografía. D'Alembert, filósofo y literato, se ocupa de la mecánica aplicada y la astronomía, y toma parte activa e importante en la redacción de la Enciclopedia. Monge habla de los problemas de excavación, terraplenes y molinos de viento con la misma minuciosidad que de los problemas de geometría diferencial. En esta época, con toda certeza, la actividad del científico no se limita por lo general a un solo campo de estudio, y habrá que esperar todavía cerca de un siglo para que se comiencen a dibujar divisiones más netas entre las diferentes actividades de los científicos.

Hemos visto que, durante el último tercio del siglo XVII, el análisis infinitesimal emerge como el desarrollo principal de las matemáticas. Una vez bien definidas las reglas de operación del análisis, los sucesores de Leibniz y Newton confían ciegamente en el simbolismo y se lanzan con entusiasmo al cálculo formal. Habiendo

formulado los problemas físicos en forma matemática, los virtuosos se ponen a trabajar y, atentos ante todo a la eficacia, manipulan las fórmulas y encuentran conclusiones. A menudo los matemáticos se sirven de la física para verificar sus conclusiones y justificar ciertas etapas en la elaboración de sus demostraciones. Sin embargo, esos matemáticos son conscientes de la necesidad de las demostraciones y de la falta de rigor de sus procedimientos. Pero como las tentativas emprendidas para clarificar el cálculo resultan infructuosas, y se comprueba la incompetencia de los contradictores (lógicos) en lo que respecta a los problemas técnicos matemáticos propiamente dichos, los matemáticos de ese siglo no pueden dejar de escoger la vía de las aplicaciones, ya que prefieren construir, elaborar e inventar, más que asegurar las bases lógicas del análisis.

El siglo XVIII asiste a la aparición de un número imponente de manuales de matemáticas, algunos de los cuales dan a conocer los trabajos de los grandes matemáticos de la época. La extensión de la enseñanza de las matemáticas lleva consigo una justificada demanda, cada vez mayor, de obras didácticas, y algunos científicos como Euler, Clairaut, Maclaurin, Thomas y Robert Simpson, Bézout, no dudan en escribir obras destinadas a lectores poco o nada iniciados en matemáticas.

Los manuales de álgebra indican una tendencia a acentuar el uso del algoritmo pero, al mismo tiempo, se observa una incertidumbre marcada a propósito de los fundamentos lógicos de las matemáticas. La mayor parte de los manuales de geometría, con excepción de los de Inglaterra, abandonan el rigor y el formalismo euclídeo para adoptar una presentación más concreta, más natural y mejor adaptada al que aprende. Sin embargo, a finales de siglo, los manuales de Legendre y Lacroix ilustran bien una vuelta al rigor que va a extenderse ampliamente por la enseñanza de la geometría en varios países.

A finales de siglo, las matemáticas comprenden varias ramas nuevas, en las cuales surgen problemas cada vez más complejos. Por otra parte, enfrentados con la dificultad creciente de los problemas matemáticos y la ausencia casi total de métodos generales para resolverlos, algunos matemáticos manifiestan un cierto pesimismo en cuanto al futuro de las matemáticas y dudan de los progresos futuros que pueden esperarse en este campo. Afortunadamente, el siglo XIX se encargará de devolver la confianza en el futuro de las matemáticas.

4. LOS DISCIPULOS DE LEIBNIZ Y NEWTON Y LAS PRIMERAS DIFICULTADES DEL ANALISIS

INTRODUCCIÓN

La primera memoria consagrada por Leibniz al «cálculo de diferencias», publicada en 1684 en las *Acta Eruditorum*, pasa casi inadvertida, pero algún tiempo después Jakob Bernoulli demuestra que conoce bien el nuevo cálculo y comienza a publicar memorias a partir de 1689. Después inicia a su hermano Johann, quien, a raíz de una estancia en París en 1690-1691, da a conocer los métodos de Leibniz a los científicos franceses y, en particular, al marqués de L'Hospital.

Muy pronto, los hermanos Bernoulli dan a conocer el cálculo de Leibniz en todo el continente europeo gracias a sus numerosos trabajos publicados en las *Acta* y a una correspondencia mantenida con varios matemáticos. De padre a hijo, de tío a sobrino, la familia de los Bernoulli se distingue en diversos campos de las matemáticas: cálculo de probabilidades, cálculo de variaciones, ecuaciones diferenciales, problema de la braquistócrona, logaritmos; en una palabra, pocos aspectos de las matemáticas les son ajenos.

En Francia, el marqués de L'Hospital publica el primer tratado de cálculo diferencial, que permite difundir ampliamente los principios y métodos del nuevo cálculo. Varignon y él se convertirán en los dos principales discípulos franceses de Leibniz.

La difusión del método de fluxiones de Newton fue más lenta que la del análisis de Leibniz, a causa principalmente del aspecto demasiado geométrico del método y de una notación simbólica menos eficaz que la de Leibniz. Sin embargo, a pesar de la publicación tardía de los trabajos de Newton, algunos matemáticos ingleses, Cotes, Stirling, Maclaurin y Taylor, discípulos de Newton, se esforzarán en desarrollar y difundir los métodos newtonianos. Merecen subrayarse los trabajos de Abraham de Moivre sobre el cálculo de probabilidades y la trigonometría.

En Italia, aunque no se realice ningún descubrimiento fundamental, merecen ser mencionados los trabajos de los matemáticos italianos Ceva, Fagnano, Saccheri y Grandi.

Este período de la historia de las matemáticas, marcado desde el principio por la célebre polémica Newton-Leibniz, lo será a continuación por las primeras críticas formuladas por el holandés Nieuwentijt, el francés Rolle y el inglés Berkeley a las bases lógicas del nuevo cálculo. Aunque estas críticas no fueran muy fructíferas, al menos forzaron a los autores a precisar mejor sus conceptos y a dedicar una atención mayor a las cuestiones de lógica.

LA FAMILIA BERNOULLI

La familia Bernoulli, originaria de Amberes, fue una de las numerosas familias protestantes obligadas a dejar los Países Bajos en 1583 para escapar de la persecución religiosa española. En un principio se refugió en Francfort, y después se estableció en Basilea, Suiza, en 1622. Comprende ocho representantes repartidos en tres generaciones, que se distinguieron en el campo de las matemáticas, y al menos tres de sus descendientes cultivaron las matemáticas con cierto talento. De padre a hijo, de tío a sobrino, los Bernoulli merecieron ser reconocidos como la familia de matemáticos que más se distinguió en el desarrollo de las matemáticas, y cuatro de entre ellos fueron elegidos miembros de la Academia de Ciencias de París. Los dos primeros representantes, y los más célebres, son los hermanos Jakob y Johann.

JAKOB BERNOULLI

Jakob Bernoulli (1654-1705) nació el 27 de diciembre de 1654 en Basilea, quinto hijo de una familia numerosa, cuyo padre, Nikolaus, estaba considerado como un comerciante próspero. Hizo sus primeros estudios en las escuelas públicas de Basilea y recibió clases particulares de un profesor de griego de la universidad de esta ciudad. Estudió teología durante algún tiempo con el fin de satisfacer la firme voluntad de su padre, quien se oponía a que emprendiera estudios de astronomía y matemáticas. Sin embargo, abandonó

rápidamente la teología y se orientó hacia lo que le interesaba verdaderamente: la astronomía, la física y las matemáticas. Viajó bastante, sobre todo por Francia, Bélgica e Inglaterra, tanto por interés personal como para conocer a científicos extranjeros. En 1676, se encuentra en Ginebra, donde enseña a una joven ciega los rudimentos de la ciencia y la escritura. A partir de esta experiencia, publicará un libro titulado *Método para enseñar matemáticas a los ciegos*. Durante su estancia en Londres, tuvo el honor de asistir a reuniones privadas de académicos ingleses como Boyle, Hooke, etc.

A su vuelta a Basilea en 1682 se consagra enteramente a estudios de física y matemáticas, y en el mismo año publica un ensayo sobre los cometas. Aproximadamente en la misma época se interesa vivamente por el nuevo cálculo de Leibniz y, en una carta, intenta comunicar sus impresiones a este último, pero deberá esperar tres años antes de que Leibniz, que estaba de viaje, le responda. Durante este tiempo, Jakob Bernoulli asimila por sí mismo el cálculo diferencial a partir de los trabajos de Wallis y Barrow, así como las dos memorias de Leibniz publicadas en 1684 y 1686 en la revista *Acta Eruditorum*. En 1687, fue nombrado profesor de matemáticas en la universidad de Basilea y conservó su cátedra hasta su muerte, acaecida el 16 de agosto de 1705.

Sobre las series infinitas

El conjunto de los trabajos de Jakob Bernoulli se encuentra, en gran parte, en memorias publicadas en las *Acta Eruditorum*. En particular, de 1689 a 1704, publicó cuatro memorias sobre las series infinitas, cuyo contenido trata de la utilización de las series que representan funciones con objeto de diferenciar e integrar estas funciones, obtener las áreas encerradas bajo las curvas y las longitudes de las mismas. Estas representaciones de funciones mediante series constituyen una contribución sustancial al análisis, pero hay que señalar que Bernoulli manipula las series sin demasiadas precauciones.

Estudió, entre otras cosas, la serie armónica, y demostró que la suma es infinita, subrayando, sin embargo, que su hermano Johann había sido el primero en demostrar la divergencia de esa serie (Oresme y Mengoli fueron los precursores de Jakob Bernoulli en

este tema). En una ocasión, sustituye el término general por una suma o diferencia de dos términos y obtiene un resultado falso, porque la serie utilizada es divergente, y él opera como si fuera convergente. A propósito de la serie de los recíprocos de la potencia n-ésima de los números naturales:

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots$$

demuestra que la suma de los términos de orden impar es a la suma de los términos de orden par como $2^n - 1$ es a 1. Esta relación es válida para $n \geqslant 2$, pero Bernoulli no duda en aplicarla para $n = 1$ y $n = \frac{1}{2}$; en este último caso, subraya que el resultado obtenido es paradójico. Demostró también que la suma de la serie $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$, es infinita utilizando el «criterio de comparación con la serie armónica. Bernoulli dedicó una atención particular a la serie $[1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots]$, cuya suma debería ser igual a cero, pero haciendo la suma igual a S indica, reagrupando los términos, que $S = 1 - S$, de donde $S = \frac{1}{2}$. Leibniz y Grandi llegaron al mismo resultado de forma diferente. En particular, Leibniz sugirió tomar el primer término, después la suma de los dos primeros, la suma de los tres primeros, etc., lo que proporciona 1, 0, 1, 0, 1, ... y, como 1 y 0 son equiprobables, Leibniz considera entonces que la media aritmética, $\frac{1}{2}$, será el valor más probable. Parece que esta solución fue aceptada por Jakob y Johann Bernoulli.

Sobre problemas populares

En 1690, Jakob Bernoulli estaba al corriente de los problemas populares de la época, y resolvió el problema de la línea isócrona propuesto por Leibniz en 1686. El problema consistía en determinar la curva según la cual un móvil desciende con una velocidad vertical uniforme; es la curva de ecuación $x^3 = ay^2$. En la solución a este problema encontramos por primera vez el término «integral» que Leibniz adoptará en lo sucesivo para sustituir su expresión «cálculo sumatorio» por «cálculo integral». Bernoulli se interesa por numerosas curvas, entre las que podemos mencionar las cáusticas, las

curvas engendradas por rodadura, la curva elástica, la hipocicloide. En 1694, Jakob hace, en las *Acta,* una descripción de una curva llamada en la actualidad «lemniscata de Bernoulli», cuya ecuación en coordenadas polares es $r^2 = a \cos 2\theta$, y es la primera vez que estas coordenadas polares aparecen en un texto publicado (Newton había precedido a Bernoulli en este tipo de coordenadas en su método de fluxiones). La lemniscata es el lugar geométrico de un punto P, cuyo producto de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (dos focos que distan una constante $2a$) es igual a una constante a^2, es decir, $(F_1P)\ (F_2P) = a^2$. Al año siguiente, Bernoulli presenta la ecuación diferencial que lleva su nombre

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

y en 1696 proporciona una solución de la misma mediante el método de separación de variables, que había sido propuesto por Leibniz.

Jakob Bernoulli se interesó igualmente por problemas que están en la base del cálculo de variaciones, el primero de los cuales se refiere al célebre problema de la braquistócrona, uno de los propuestos por su hermano Johann en un desafío lanzado a los matemáticos en general. El problema consiste en determinar la trayectoria descendente según la cual un móvil pasa de un punto A a otro B, no situado directamente debajo de A, en un mínimo de tiempo. Recordemos que Jakob Bernoulli, Newton y Leibniz encontraron soluciones exactas, así como L'Hospital; es de hecho la curva de descenso más rápido: la cicloide. Un segundo problema se refiere a la determinación de las geodésicas, es decir, de las trayectorias de longitud mínima entre dos puntos de una superficie, mientras que un tercer problema, el de los isoperímetros, consiste en determinar, entre un conjunto de curvas planas cerradas con un perímetro dado, la que rodea un área máxima. Con ocasión de un problema de este tipo, salieron públicamente a la luz desavenencias entre los hermanos Bernoulli, aunque éstas no eran las primeras. La solución de Jakob a este género de problemas le permitió establecer las bases del primer método del cálculo de variaciones.

La espiral logarítmica, mencionada por Descartes y rectificada por Torricelli, fue probablemente la curva que más le fascinó. Por lo demás, demostró varias propiedades inéditas de esta curva: la evoluta de una espiral logarítmica es una espiral logarítmica igual,

su cáustica por reflexión y su cáustica por refracción son también espirales. Siendo ya de edad avanzada, Jakob Bernoulli imitó a Arquímedes pidiendo que se grabara sobre su tumba la *spira mirabilis* con la divisa *Eadem mutata resurgo* para mostrar que el renacimiento de esta curva es un símbolo de la resurrección.

El Ars conjectandi

Su obra póstuma, titulada *Ars conjectandi,* fue publicada en 1713, ocho años después de su muerte. Es la primera contribución teórica importante a la teoría de las probabilidades que contiene, además, una reedición comentada del *De ludo aleae* de Huygens y de un tratado de análisis combinatorio. De las cuatro partes de esta obra, la primera comprende el tratado de Huygens acompañado de un comentario de Bernoulli, la segunda está consagrada a la teoría de permutaciones y combinaciones, la tercera comprende las soluciones a veinticuatro problemas diversos sobre juegos de azar y, en la cuarta, Jakob Bernoulli se propone aplicar la teoría de probabilidades a temas de interés.

El prefacio de esta obra fue escrito por Nikolaus Bernoulli, sobrino de Jakob, quien menciona que la cuarta parte no fue acabada por el autor antes de su muerte. El comentario al tratado *De ludo* de Huygens contiene demostraciones suplementarias de las proposiciones del pequeño tratado, así como nuevos problemas acompañados de su solución.

En la segunda parte, consagrada a la teoría de permutaciones y combinaciones, es de notar una demostración del teorema del binomio para potencias enteras mediante inducción matemática completa (expresión que Bernoulli no utiliza) y la suma de un número finito de términos de la serie de los números elevados a una potencia c-ésima dada por

$$\int n^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} A n^{c-1} +$$

$$+ \frac{c.c-1.c-2}{2.3.4} B n^{c-3}$$

$$+ \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4}{2.3.4.5.6} C n^{c-5}$$

$$+ \frac{c.c-1.c-2.c-3.c-4.c-5.c-6}{2.3.4.5.6.7.8} D n^{c-7}$$

y así sucesivamente, de manera que los exponentes de n decrecen continuamente por saltos de dos hasta n ó nn. Las letras mayúsculas A, B, C, D designan los coeficientes de los términos de n. Así, $\int n^c$ designa la suma de las potencias c-ésimas de los n primeros números naturales, mientras que los coeficientes A, B, C, D, ... reciben el nombre de «números de Bernoulli». En particular,

$$A = \tfrac{1}{6},\ B = -\tfrac{1}{30},\ C = \tfrac{1}{42},\ D = -\tfrac{1}{30}$$

Bernoulli añade el valor numérico de la suma de los mil primeros números naturales elevados a la potencia 10 y subraya que este trabajo fue realizado en menos de 10 minutos gracias a una tabla de sumas de potencias que proporciona

$$\int n,\ \int nn,\ \int n^3,\ \ldots,\ \int n^{10}.$$

Se encuentra, en esta segunda parte, la fórmula exacta que da el número de permutaciones de n elementos tomando c a la vez.

La cuarta parte, la más importante de su tratado, contiene el célebre teorema que lleva su nombre y que se refiere a la ley de los grandes números, relativo a la repetición de un gran número de pruebas semejantes. Es enunciado por Laplace en estos términos:

> Si se multiplican indefinidamente las observaciones y las experiencias, la razón de los sucesos se aproxima a la de sus posibilidades respectivas, en los límites en los que el intervalo se reduce cada vez más, a medida que se multiplican, y llega a ser menor que cualquier cantidad previamente fijada.

Este teorema, al que Laplace dio su forma definitiva y cuya verificación experimental abordaron Buffon y Poisson, estaría llamado a desempeñar un papel importante en el campo de las aplicaciones. En su forma algebraica, puede enunciarse como sigue: si p es la probabilidad de un suceso, si m es el número de veces que se obtiene el suceso en n ensayos, si c es un número positivo arbitrariamente pequeño, y si P es la probabilidad de que se satisfaga la desigualdad $| m/n - p | < c$, entonces $\lim_{n \to \infty} P = 1$.

En apéndice a su tratado, figura una larga memoria de cerca de setenta páginas sobre las series infinitas que comprende resultados encontrados anteriormente. La obra termina con un texto de treinta

y cinco páginas titulado «Carta a un amigo sobre las partidas del juego de pelota».

Dado que la publicación del *Ars conjectandi* de Bernoulli es posterior a los tratados del francés Pierre Raymond de Montmort (1678-1719) y del inglés Abraham de Moivre, su influencia no se manifestó tanto como la de estos últimos, aunque las investigaciones de Bernoulli en este campo fueran anteriores.

JOHANN BERNOULLI

Johann Bernoulli (1667-1748), décimo hijo de la familia de Nikolaus, nació en Basilea cuando su hermano Jakob cumplía trece años. Nikolaus había intentado vanamente que Jakob se hiciera teólogo, y también estaba determinado a que Johann se hiciera comerciante para secundarle en sus negocios. Pero Johann, siguiendo los pasos de su hermano mayor, opta por la medicina y las humanidades. Después de haber terminado sus estudios literarios, se traslada a Neuchâtel para estudiar allí comercio y aprender francés durante un año. Después vuelve a Basilea y obtiene sucesivamente un diploma de primer y segundo ciclo, este último a los dieciocho años. En 1690 publica una tesis de doctorado sobre la efervescencia y la fermentación. El mismo año, se encuentra en Ginebra dando clases sobre ecuaciones diferenciales; después viaja a París y conoce a científicos significados como Malebranche, Cassini, La Hire, Varignon. En 1691, conoce allí a L'Hospital, que le invita a su castillo de Ouques para que le inicie en los misterios de la nueva doctrina de las diferencias de Leibniz. L'Hospital le pagó ciertos emolumentos por sus servicios profesionales.

Después, Johann Bernoulli vuelve a su ciudad natal para estudiar allí medicina y en 1694 recibe el título de doctor en medicina. Pero Johann no se siente muy atraído por la medicina y, estimulado e instruido al parecer por su hermano Jakob, decide dedicarse a las ciencias, y en particular a la física, la astronomía y las matemáticas. En 1695 acepta un puesto de profesor de matemáticas y física en la universidad de Groninga y, mientras tanto, mantiene una correspondencia regular con L'Hospital. Fue profesor en esta universidad durante diez años y, a la muerte de Jakob, acaecida en 1705, le sucedió en Basilea hasta su muerte. El entusiasmo manifestado en

su enseñanza atraerá a un alumno poco corriente en la persona de Euler.

Aunque Jakob poseía un sentido crítico más desarrollado que Johann, este último manifestó una mayor originalidad e imaginación; fue incluso más prolífico que su hermano mayor en matemáticas. Profesor altamente reconocido a pesar de su carácter celoso y desabrido, estaba animado de un celo por las matemáticas tan vivo como su empeño en iniciar y mantener controversias. Johann reconoció siempre a Leibniz como su maestro y fiel amigo, y manifestó con respecto a Newton una antipatía incondicional, denigrándole de una manera imperdonable, sobre todo a raíz de la célebre controversia entre Newton y Leibniz. Los dos hermanos se distanciaron con motivo de la solución del problema de los isoperímetros y, en los debates que siguieron, Johann manifestó una áspera animosidad. De su espíritu celoso no se salvó ni su propio hijo, Daniel, a quien reprochó su falta de respeto por haber ganado un premio de la Academia de Ciencias que él mismo ansiaba. Su renombre se basa sobre todo en sus contribuciones en el campo de las matemáticas.

Durante el período 1691-1692, Johann Bernoulli escribió varios manuscritos sobre el cálculo diferencial e integral, pero su publicación no tuvo lugar hasta 1922. Sin embargo, el primer tratado sobre el cálculo diferencial e integral fue publicado en 1696 en París por L'Hospital, que escribió en la introducción: «Por lo demás, reconozco deber mucho a las luces de los señores Bernoulli, y sobre todo a las del joven, en la actualidad profesor en Groninga», lo que confirma que fue influenciado por Johann Bernoulli. Por otra parte, en una carta fechada en 1695, L'Hospital señala a Bernoulli que está a punto de publicar un trabajo sobre las cónicas y que se propone añadirle un pequeño tratado sobre el cálculo diferencial. Además, subraya su intención de hacer justicia a Johann, su maestro, en el libro que proyecta publicar.

DE L'HOSPITAL

Guillaume François de L'Hospital (1661-1704), marqués de Saint-Mesme, conde de Autremont, señor de Ouques, nació en París en 1661. Desde muy pronto se interesó por la geometría y, a los quince

años resolvió, según se dice, problemas difíciles propuestos por Pascal sobre la ruleta. Como todo personaje señalado de la época, con títulos de nobleza por añadidura, era obligado que hiciera una carrera militar. Fue, pues, capitán de caballería durante algunos años, pero debió reintegrarse a la vida civil a causa, según parece, de una miopía muy manifiesta. Así, se vio llevado a poner sus miras en las matemáticas, de las que se hizo un ferviente aficionado, muy respetable.

Análisis de los infinitamente pequeños *de L'Hospital*

En la introducción del *Análisis de los infinitamente pequeños,* el marqués de L'Hospital, al tiempo que reconoce deber mucho a los Bernoulli, subraya haberse «servido libremente de sus descubrimientos y de los del señor Leibniz» y acepta que «reivindiquen todo lo que quieran», contentándose con lo que quieran dejarle. Después de haber recibido un ejemplar del *Análisis* enviado por su autor, Johann Bernoulli le da las gracias por haberle mencionado en la obra y promete devolverle el cumplido en su próxima publicación. Bernoulli subraya también en su carta que el tratado está admirablemente bien hecho, y alaba la disposición de las proposiciones así como la presentación inteligible del conjunto.

El prefacio del *Análisis* contiene un breve resumen histórico del cálculo, en el cual el autor reconoce que Newton está en posesión de un cálculo semejante al de Leibniz; prefiere, sin embargo, hacer hincapié en el cálculo de Leibniz, que es más fácil y más expeditivo. La obra está dividida en diez secciones.

En la primera sección, el autor presenta las definiciones fundamentales, las hipótesis y las reglas de procedimiento. Por ejemplo, define una «diferencia» como «la porción infinitamente pequeña en que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente». Propone, a continuación, dos postulados: «se requiere que se pueda tomar indiferentemente una u otra de dos cantidades que no difieren entre sí más que en una cantidad infinitamente pequeña», es el primero, mientras que la segunda hipótesis o requisito consiste en aceptar que «una línea curva pueda ser considerada como la reunión de una infinidad de líneas rectas, cada una de ellas infinitamente pequeña». Es de señalar la desenvoltura con que se exponen los

«requisitos», pero para Leibniz estamos en presencia de hechos lo suficientemente conocidos como para tomarlos como puntos de partida, sin preocuparse demasiado por su justificación. Sin embargo, L'Hospital subraya que habría sido capaz de demostrarlos como en la antigüedad si hubiera tenido espacio suficiente.

L'Hospital presenta también en esta primera sección las reglas de diferenciación para funciones algebraicas —suma, producto, cociente, potencia y raíz— a la manera de Leibniz, y «*d*» se utiliza únicamente para marcar la «diferencia» de una cantidad variable.

En la sección II, se sirve del cálculo de diferencias para encontrar las tangentes a todo tipo de líneas curvas: parábola, hipérbola, espiral, cuadratriz, conchoide, cisoide, cicloide, curva logarítmica, etc.

La sección III se refiere al estudio de los máximos y mínimos, y la determinación de estos extremos se hace igualando a cero la diferencial del numerador y del denominador, descartando los resultados que conducen a una contradicción. Los puntos de inflexión y de retroceso constituyen el objeto de la sección IV. A pesar de una definición incompleta de la diferencial de orden superior, «la porción infinitamente pequeña en que la diferencia de una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente se llama diferencia de la diferencia de esa cantidad, o bien su diferencia segunda... denotada ddx, la diferencia tercera $dddx$ o d^3x, etc...», los resultados obtenidos son exactos porque L'Hospital utiliza una regla pragmática que se enuncia como sigue: se considera constante una diferencia (diferencial) elegida y se tratan las otras como cantidades variables. Por ejemplo, la diferencial de la función xy es

$$d(xy) = xdy + ydx$$

la diferencial segunda será

$$dd(xy) = xddy + 2dxdy$$

$$dd(xy) = yddx + 2dxdy$$

Se presentan los dos casos porque no se distingue suficientemente entre variable dependiente y variable independiente. Los puntos de inflexión y de retroceso son determinados por L'Hospital haciendo cero o infinitamente grande la diferencial segunda.

El marqués estudia en la sección V las evolutas y envolventes, así como el radio de curvatura de ciertas curvas en un contexto que recuerda el desarrollo histórico de estos conceptos. Las dos secciones siguientes se refieren a un tema popular en la época: las cáusticas por reflexión y por refracción, mientras que las envolventes de familias de rectas constituyen el objeto de la sección VIII. Las dos últimas secciones tratan de la resolución de problemas que precisan de los métodos utilizados en las secciones precedentes, pero una regla de diferenciación para las formas indeterminadas que se encuentra en la sección IX dio origen a una cuestión de prioridad. Esta regla se formula así: para encontrar el valor de una expresión racional en x que para un valor de abscisa dado (x) toma la forma 0/0, se determina el cociente de las diferencias del numerador y del denominador para este valor de abscisa. En la actualidad se enuncia de la manera siguiente:

Si f y g son funciones diferenciables en $x = a$ tales que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$ y tales que existe el

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

En su carta de agradecimiento a L'Hospital por el ejemplar del *Análisis,* Johann Bernoulli no formula ninguna reclamación al marqués. Pero en 1698, en una carta dirigida a Leibniz, se lamenta amargamente de que el marqués haya plagiado de manera descarada sus notas manuscritas. Hará lo mismo en otra carta, esta vez dirigida a Brook Taylor, algún tiempo después de la muerte de L'Hospital. ¿Tiene motivos para quejarse Bernoulli? ¿En qué medida puede reprochar al marqués haber publicado esta regla por su cuenta? Se entabló la controversia, y los contemporáneos se inclinaron a tomar partido por el marqués. Sin embargo, la publicación del tratado de Bernoulli sobre el cálculo diferencial en 1922, así como la publicación de la correspondencia de Johann Bernoulli en 1955, vienen a aclarar el problema de la paternidad de la regla.

La comparación de los dos textos revela una imbricación considerable, lo que parece indicar que se debe atribuir a Johann Bernoulli una parte importante del contenido matemático del *Análi-*

sis. Además, en la correspondencia de Bernoulli se menciona que un acuerdo establecido entre las dos partes, en 1694, le obligaba a transmitir a L'Hospital todos sus descubrimientos y a abstenerse de enseñar o comunicar a los demás una copia de las notas transmitidas a este último, mediante una asignación anual de 300 libras. Por esta razón, Bernoulli podía, a lo sumo, expresar su amargura en privado, pero después de la muerte de L'Hospital no dudó en reclamar justicia públicamente.

El *Análisis* de L'Hospital tuvo un gran éxito y aparecieron varias ediciones durante el siglo XVIII, aunque en el período 1697-1704 fuera objeto de un ataque que se inscribe en el movimiento de oposición al nuevo análisis. No pudo asistir al triunfo del infinitamente pequeño, que sobrevino algún tiempo después de su muerte en 1704. En 1707, se publicó su *Tratado analítico de las secciones cónicas,* que desempeñó un papel tan útil para la geometría analítica como el *Análisis* para el cálculo. En suma, estos dos tratados se convirtieron en obras clásicas en el siglo XVIII.

Contribuciones matemáticas de Johann Bernoulli

Durante el período en que Johann Bernoulli debió guardar silencio sobre sus descubrimientos, hizo numerosos estudios sobre la línea isócrona, los sólidos de menor resistencia, las curvas cáusticas, las trayectorias ortogonales, las geodésicas, la braquistócrona, el problema de los isoperímetros, etc. En el estudio de las ecuaciones diferenciales de la forma $Mdx - Ndy = 0$, donde M y N son funciones de x e y, Johann Bernoulli encontró soluciones para los casos específicos en que las ecuaciones eran exactas, u homogéneas, o lineales de primer orden, o en que las ecuaciones podían resolverse por separación de variables. En 1702, descubrió la relación entre la función arcotangente y el logaritmo de un número imaginario.

Se atribuye a menudo a Johann Bernoulli la invención del cálculo exponencial, porque ya en 1694, en una carta dirigida a Leibniz, habla de la construcción de las curvas exponenciales $x^x = y$ mediante la curva logarítmica simple que representa, según él, una curva del mismo tipo que tiene como ecuación $a^x = y$. Su procedimiento de construcción equivale a pasar de $x^x = y$ a $x \log x = \log y$, aunque no escribe esta última ecuación. Leibniz responde a Bernou-

lli algún tiempo después, y formula en su carta las relaciones $x^x = y$ y $x \log x = \log y$. Ya en esta época, Bernoulli y Leibniz tienen una idea bastante completa de la función exponencial. Para el área bajo la curva $y = x^x$, de $x = 0$ a $x = 1$, Bernoulli encontró una representación en serie de la forma

$$\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots$$

resultado que se obtiene escribiendo en primer lugar $x^x = e^{x \ln x}$, desarrollando en serie exponencial e integrando a continuación término a término, mediante el procedimiento de integración por partes.

El 16 de marzo de 1712, Leibniz menciona en una carta a Bernoulli la posible existencia de los logaritmos de números negativos e imaginarios. Los dos amigos entablan una controversia amistosa sobre este tema durante dieciséis meses, y parece que son los únicos en esta época en interesarse por este tema. Después de la muerte de Leibniz, Johann Bernoulli y su alumno Euler mantendrán una correspondencia sobre el mismo tema a partir de 1727, pero Euler será el verdadero iniciador de la teoría de los logaritmos de númeos negativos e imaginarios. En 1734, Johann Bernoulli compartió con su hijo Daniel un premio de la Academia de Ciencias por un ensayo sobre las probabilidades ligadas a las inclinaciones de los planos orbitales de los planetas.

Otros dos miembros de la familia Bernoulli se distinguieron igualmente por sus contribuciones en matemáticas: Nikolaus y, sobre todo, Daniel, hijo de Johann.

NIKOLAUS III

Nikolaus Bernoulli (1695-1726) nació en Groninga en 1695. Era el hijo mayor de Johann, nieto de Nikolaus y primo de Nikolaus II. A los ocho años hablaba correctamente alemán, holandés, latín y francés. A los dieciséis años, obtuvo un doctorado en filosofía y cuatro años más tarde se le otorgó la más alta distinción académica en jurisprudencia. No descuidó por ello sus estudios de matemáticas, como atestiguan sus trabajos sobre el cálculo diferencial e integral y sobre el cálculo exponencial. Nikolaus III viajó mucho

por Europa y principalmente por Francia, donde se hizo amigo de Varignon, y de Riccati en Italia. Permaneció dos años en Italia, y después volvió a Basilea para intentar obtener la cátedra de jurisprudencia. Sin embargo, habiendo fracasado en su tentativa, aceptó la de la Universidad de Berlín. En 1725, su hermano Daniel y él fueron nombrados simultáneamente profesores de matemáticas en la Academia de San Petersburgo. Murió ocho meses más tarde, a los treinta y dos años, de una fiebre persistente. Los trabajos matemáticos de Nikolaus se encuentran principalmente en las memorias de su padre; los demás fueron publicados en las *Acta Eruditorum* y los *Commentarii* de la Academia de San Petersburgo. Durante su estancia en la Academia, presentó un estudio sobre la geometría de curvas, y propuso el célebre problema conocido con el nombre de «paradoja de San Petersburgo».

DANIEL BERNOULLI

Daniel Bernoulli (1700-1782), segundo hijo de Johann, nació en Groninga en 1700. Johann intentó obligar a Daniel a seguir la carrera de comercio, pero este último se negó igual que su padre lo había hecho anteriormente. A los once años, su hermano Nikolaus III se convirtió en su profesor y más tarde, en Italia, estudió con Michelo y Morgagni. Doctor en medicina, rechazó en 1724 la presidencia de una nueva academia que estaba a punto de fundarse en Génova y aceptó en cambio ir a trabajar en 1725 a la Academia de San Petersburgo en compañía de su hermano Nikolaus III. En 1733, la muerte prematura de su hermano y una salud vacilante le empujaron a volver a afincarse en compañía de su hermano menor Johann II en Basilea, donde enseñó anatomía, física, botánica y filosofía. En 1738, publicó su principal tratado, titulado *Hidrodinámica,* como resultado de sus trabajos sobre el flujo del agua en las cañerías, canales o ríos. De 1741 a 1751, Daniel emprendió con éxito estudios sobre la elasticidad sirviéndose de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en derivadas parciales. En relación con el estudio de la caída de los cuerpos, propuso la notación de la «energía cinética y potencial», lo que dio lugar al principio de conservación de la energía. Durante sus últimos años, Daniel orientó sus trabajos hacia las probabilidades aplicadas a sectores prácti-

cos, como la economía. Abandonó su puesto de profesor en 1777 y murió en 1782 después de haber sido uno de los grandes filósofos naturales y un gran matemático.

El conjunto de sus trabajos se refiere sobre todo a la física, pero hace también una contribución a las matemáticas, principalmente en el cálculo de las funciones trigonométricas, las fracciones continuas, las ecuaciones diferenciales, y, en particular, el problema de Riccati. Entre sus resultados en matemáticas, mencionemos las soluciones de la ecuación diferencial de Riccati por separación de variables, una fórmula aproximada de las funciones de Bessel, la formulación del problema de la cuerda vibrante en términos de una ecuación diferencial en derivadas parciales, una notación eficaz para representar las funciones trigonométricas inversas, una de las primeras utilizaciones de las series de Fourier y una teoría de la esperanza moral.

La paradoja de San Petersburgo es un problema que apareció en los *Commentarii* de la Academia, cuya similitud con los problemas propuestos por Nikolaus en Montmort es notable. Puede formularse así: supongamos que A y B deciden jugar una partida de cara o cruz. Si se obtiene cara en la primera tirada, B deberá dar una moneda a A; si, por el contrario, se obtiene cruz en la primera tirada, seguida de cara en la segunda, B deberá dar dos monedas a A; si aparece cara sólo en la tercera tirada, B deberá dar a A cuatro monedas, y así sucesivamente, si la cara aparece en la tirada *n*-ésima, B deberá dar 2^{n-1} monedas a A. Se pide calcular la esperanza matemática de B. Esta esperanza de B viene dada por

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{8}{2^4} + \ldots$$

que es lo mismo que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

Así, la esperanza matemáticas de B es infinita, y deberá dar una suma infinita a A para persuadirle de jugar con él la partida propuesta. Por tanto, el problema se convierte en una paradoja, porque la suma infinita que B deberá pagar está en contradicción con lo que nos sugiere el sentido común. En particular, Georges Louis Leclerc, más conocido por el nombre de conde de Buffon (1707-1788), hizo una verificación empírica de ello y encontró que

después de 2 084 partidas, B debía a A la suma de 10 057 monedas. Esto indica que, para una partida cualquiera, la esperanza de B, en lugar de ser infinita, se sitúa alrededor de las cinco monedas. Daniel Bernoulli aplicó también su teoría de la esperanza moral a este problema, y numerosos matemáticos se interesaron asimismo por la cuestión, como Cramer, Laplace y Poisson, entre otros.

LOS OTROS BERNOULLI

Johan II (1710-1790), hijo menor de Johann, nació en Basilea en 1710. Recibió una formación en matemáticas y jurisprudencia, y fue profesor de retórica durante cinco años en Basilea. Sucedió a su padre en 1748 como profesor de matemáticas en la universidad de su ciudad natal. Sus contribuciones pertenecen esencialmente al campo de la física, y se refieren a la propagación de la luz, los imanes y el cabrestante.

Nikolaus II (1687-1759), hijo de Nikolaus y sobrino de Jakob y Johann, nació en Basilea en 1687. Estudió leyes pero se interesó particularmente por las matemáticas. De 1716 a 1719, fue profesor de matemáticas en Padua, titular de la cátedra que había sido ya ocupada por Galileo. Más tarde, volvió a Basilea y en 1731 fue nombrado profesor de romance y jurisprudencia. Murió en 1759, después de haber sido profesor de lógica en Basilea. Aplicó la teoría de probabilidades a los asuntos legales y consagró una gran parte de sus trabajos a las ecuaciones diferenciales y a la geometría. Editó el célebre *Ars conjectandi* de su tío Jakob, además de haber sido miembro de las Academias de Ciencias de Londres y Berlín.

Johann III (1744-1807), hijo de Johann II y nieto de Johann, estudió en Basilea y Neuchâtel y, como su padre, emprendió estudios de jurisprudencia y después se orientó hacia las matemáticas. Con sólo trece años era doctor en filosofía y a los diecinueve años ocupaba el cargo de astrónomo real en Berlín. Después de haber viajado durante bastante tiempo por Francia, Inglaterra, Alemania, Italia, Rusia y Polonia, se hizo responsable de las clases de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín, donde murió en 1807. Publicó memorias sobre probabilidades, factorización y ecuaciones indeter-

minadas, pero sus contribuciones importantes están fuera de las matemáticas.

Entre los demás miembros de la familia Bernoulli, podemos citar a Jakob II (1759-1789) y Daniel II (1751-1834), hijos de Johann II, Christophe (1782-1863), hijo de Daniel II, y Johann Gustav (1811-1863), hijo de Christophe. Pero ninguno de ellos contribuyó de una manera significativa en el campo de las matemáticas.

Jakob y Johann Bernoulli, así como Guillaume de L'Hospital, fueron los principales promotores del cálculo de diferencias de Leibniz en el continente, además de enriquecerlo y desarrollarlo. Asimismo, en Inglaterra los discípulos de Newton se esforzaron por promover el cálculo de fluxiones e incluir en él enriquecimientos originales y sustanciales. Además, un matemático inglés de talento, De Moivre, se distinguió particularmente por sus contribuciones a la teoría de probabilidades, y por ello lo hemos escogido para comenzar con él la exposición de las contribuciones matemáticas de la escuela inglesa.

DE MOIVRE

Abraham De Moivre (1667-1754), nació el 26 de mayo de 1667 en Vitri, Champagne. Era hijo de un médico protestante que planificó con esmero la educación de su hijo, la cual comenzó en casa bajo la supervisión de un tutor. Aunque protestante, su padre no dudó en inscribir a Abraham en una escuela de Vitri dirigida por los padres de la Doctrina Cristiana, institución que había sido fundada en 1667 precisamente con el fin confesado de combatir el protestantismo. A los once años, el joven De Moivre asistió a la universidad protestante de Sedán, donde vivió en compañía de un profesor de griego, llamado Du Rondel, que le estimaba mucho. Un día, el joven De Moivre encontró un ejemplar de la *Aritmética* de François Le Gendre y, con la desaprobación de su profesor Du Rondel, que preconizaba el estudio de los clásicos, Abraham pasaba sus ratos libres dedicado a escondidas a su pasatiempo favorito, la *Aritmética*. Su padre fue informado de ello enseguida e, inmediatamente, le procuró un ejemplar de los *Elementos de Algebra* de Prestet. La

presentación demasiado filosófica de la obra desanimó a Abraham, quien dejó de lado el libro por algún tiempo.

En 1681, la Universidad de Sedán cerró sus puertas y De Moivre acudió a Saumur para estudiar filosofía. Allí tuvo lugar un acontecimiento importante: Abraham hojeó *De ludo aleae* de Huygens, y aunque no lo pudo asimilar completamente, su contenido fue como una simiente cuya germinación produciría un día frutos de una calidad excepcional. Después de Saumur, fue a París para estudiar física y matemáticas con Ozanam (1640-1717). Había completado sus estudios de matemáticas antes de los dieciocho años; con motivo de la revocación del Edicto de Nantes, el 18 de octubre de 1685, fue encarcelado en Saint-Martin, y liberado después, el 27 de abril de 1688. A los veintiún años, viajó a Inglaterra desde Francia, adonde no volvería ya nunca.

En Inglaterra, Abraham se hizo amigo del astrónomo Halley y de Newton, y a pesar de todos los esfuerzos desplegados entre sus amigos y los grandes matemáticos con quienes mantenía correspondencia, como Johann y Johann Gustav Bernoulli entre otros, para obtener una cátedra de matemáticas, se vio forzado a recorrer durante toda su vida las calles de Londres con el fin de dar clases particulares a domicilio. Debía dedicar muchas horas a desplazarse para subvenir a sus necesidades, y a pesar de ello publicó dos obras sobre probabilidades y al menos quince memorias en las *Philosophical Transactions* sobre temas menores, la primera de las cuales se refiere a una extensión de la ideas newtonianas de las fluxiones que fue presentada a la Royal Society por su gran amigo Edmund Halley en 1695. En 1697, fue elegido miembro de esta sociedad, como reconocimiento por una memoria sobre un polinomio infinito para el que sugirió un procedimiento que proporciona una raíz. En una larga memoria publicada en 1711 y titulada *De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus,* expuso sus ideas fundamentales sobre las leyes de azar.

En 1718, publicó su célebre *Doctrina de las probabilidades,* método para calcular las probabilidades de los sucesos en juego, que era una extensión de su memoria de 1711. Fue reeditada en 1738 y en 1756, pero mientras tanto publicó, en 1730, sus *Miscellanea analytica,* segundo libro sobre probabilidades, que le valió ser elegido, por aclamación, miembro de la Academia de Ciencias de Berlín el 23 de agosto de 1735. Algunos meses antes de su muerte, el

27 de junio de 1754, la Academia de Ciencias de París le nombró «miembro asociado-extranjero» y De Moivre se sintió tan feliz por ello que manifestaba a quien quería escucharle que esta elección constituía para él su «título de nobleza». Desgraciadamente, siendo ya de edad avanzada, su salud no le permitía más que algunas horas de trabajo al día, y aunque su mente seguía alerta y vigilante, murió el 27 de noviembre de 1754, a la respetable edad de ochenta y siete años.

De Moivre y las probabilidades

La primera edición de este libro, aparecido en 1718, está dedicada a Newton, y contiene un prefacio que explica el plan y la utilidad de la obra, así como un resumen de su contenido. En el último párrafo de este prefacio, se refiere al *Ars conjectandi* e invita a Nikolaus II y a Johann Bernoulli a profundizar en el tema que constituye el objeto de la cuarta parte. En la tercera edición, la introducción, de 33 páginas, contiene las principales reglas del tema tratado, así como las soluciones a los problemas mencionados. Recurre a una notación algebraica propia de las probabilidades e insiste en la utilidad de tal notación. Así, si x designa la probabilidad de un suceso probable, $1 - x$ designa la probabilidad de que no se produzca. Recurre también en esta introducción al uso de las fracciones continuas, tomadas de Wallis, Huygens y otros. En la tercera edición pueden encontrarse 74 problemas, si se excluyen los relativos a anualidades.

En la *Doctrina de las probabilidades,* sus *Anualidades* (1725) y sus *Miscellanea analytica* (1730) De Moivre precisó los principios del cálculo de probabilidades, desarrolló una teoría de sucesiones recurrentes y numerosos problemas de aplicación (problemas de dados, urnas, partidas), trató de la teoría de permutaciones y de combinaciones a partir de los principios de la probabilidad y encontró extensiones del teorema de Bernoulli. También en estas obras se encuentra el enunciado de la regla de las probabilidades compuestas, un esbozo del uso de las ecuaciones en diferencias finitas, una fórmula de aproximación para n muy grande de $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (llamada fórmula de Stirling), y la aproximación de la fórmula de probabilidad $\int_0^x e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Sus contribuciones al campo de la esta-

dística se refieren, entre otras cosas, a una demostración del teorema central del límite aplicado al lanzamiento de una moneda y el descubrimiento de la distribución normal de frecuencia (ley de los errores o curva normal).

De Moivre y la trigonometría

Además de las probabilidades, De Moivre contribuyó al desarrollo del aspecto analítico de la trigonometría. En 1722, afirma que se puede obtener una relación entre x y t que represente los *sinus versus** de dos arcos que estén en la relación de 1 a n por eliminación de z entre las dos ecuaciones

$$1 - 2z^n + z^{2n} = -2z^n t \qquad \text{y} \qquad 1 - 2z + z^2 = -2zx$$

En este resultado de De Moivre, la fórmula es implícita, porque si se hace

$$x = 1 - \cos\theta \qquad \text{y} \qquad t = 1 - \cos n\theta$$

se deduce que

$$(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta \pm i \operatorname{sen} n\theta, \quad \text{donde} \quad i^2 = -1$$

Se encuentra también en una memoria de 1707 la fórmula que expresa el seno en términos de números complejos:

$$\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} n\theta + i\cos n\theta)^{1/n} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} n\theta - i \operatorname{sen} n\theta)^{1/n}$$

Asimismo, expresa en 1730 el equivalente de

$$(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta)^{1/n} = \cos\frac{2k\pi \pm \theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi \pm \theta}{n}$$

que le sirve para encontrar los factores de

$$x^{2n} + 2x\cos n\theta + 1$$

en factores cuadráticos de la forma

$$x^2 + 2x\cos\theta + 1.$$

Finalmente, en 1739, mostró que la raíz n-ésima de un «imposible

* El *sinus versus* de un ángulo es uno menos el coseno del ángulo (N. del T.).

binómico» $a + \sqrt{-b}$ (número complejo) se efectúa, como lo hacemos actualmente, tomando la raíz n-ésima en módulo, dividiendo la amplitud por n, y añadiendo los múltiplos de $\frac{2\pi}{n}$ (hay n raíces).

COTES

Roger Cotes (1682-1716), nació cerca de Leicester en 1682. Fue alumno y después profesor en Cambridge. Discípulo de Newton, este último le tenía en alta estima, y deploró en estos términos su muerte prematura, en 1716: «Si Cotes hubiera vivido, habríamos aprendido muchas más cosas.» A él se debe la publicación de la segunda edición de los *Principia* de Newton, a la que consagró la mayor parte de su tiempo entre 1709 y 1713. El conjunto de sus trabajos fue publicado, después de su muerte, bajo el título de *Harmonia mensurarum*, donde trata de las fracciones racionales y de su integración por descomposición en fracciones parciales, y de la trigonometría, en la que hace intervenir cantidades imaginarias. Se encuentra también el desarrollo en fracción continua del número «e», en la forma:

$$e - 1 = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}$$

obtenida por reversión de la serie logarítmica, la «propiedad de Cotes de la circunferencia», muy próxima del teorema de De Moivre sobre las raíces n-ésimas de un número complejo, además de la relación $i\theta = \log e(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ (en notación moderna) en la que se adelantó a Euler sobre el tema. Euler formuló esta relación escribiendo la forma exponencial. Cotes fue uno de los primeros matemáticos que reconoció la periodicidad de las funciones trigonométricas y que dio a conocer el período de las funciones tangente y secante. Aplicó también el cálculo diferencial e integral a las funciones logarítmicas y trigonométricas, y utilizó un método llamado «de integración logarítmica» que recuerda a un método de sustitución para integrales definidas, además de elaborar una tabla de integrales construida a partir de estas aplicaciones. Otro amigo de Newton, Stirling, se interesó por la geometría analítica, pero se hizo célebre por su fórmula de aproximación de $n!$ y una serie que lleva su nombre.

STIRLING

James Stirling (1692-1770), publicó en 1717 las *Lineae tertii ordinis Neutonianae* en donde demuestra el contenido del *Enumeratio linearum tertii ordinis* de Newton (clasificación de las cúbicas) e incorpora numerosas demostraciones nuevas, además de cuatro cúbicas que no aparecían entre las 72 ya contenidas en el texto de Newton. Demuestra, por otra parte, que una curva de orden n sólo puede tener $n - 1$ asíntotas diferentes, como máximo, y que toda asíntota de una curva no puede cortarla en más de $n - 2$ puntos. Además, si el eje de las y es una asíntota, la ecuación de la curva no puede contener un término en y^n, y Stirling demuestra que una curva de orden n está determinada, en general, por $\frac{n(n+3)}{2}$ puntos.

En la obra de Stirling se encuentra, posiblemente por primera vez, un estudio analítico formal de la ecuación de segundo grado en el que reduce la cuadrática general a formas canónicas. Partiendo de la ecuación $y^2 + By + Axy + Cx^2 + Dx + E = 0$, en coordenadas oblicuas, muestra su reducción a $y^2 = Ax^2 + Bx + c$ donde A es menor, igual o mayor que cero si la figura es una elipse, una parábola o una hipérbola. Después, mediante una traslación del origen sobre el eje de abscisas, reduce la ecuación de la elipse y de la hipérbola a las ecuaciones respectivas $y^2 = B - Ax^2$ e $y^2 = Ax^2 + B$. Determina, además, desde un punto de vista analítico, las propiedades características de las cónicas según los ejes, los vértices, las asíntotas y los parámetros, a partir de las formas canónicas. Se encuentran también en su obra numerosas gráficas de curvas de la ecuación cuadrática general, de la cúbica, de las funciones polinómicas bicuadráticas, con o sin raíz imaginaria. Observemos que, en esa época, el eje de las y no se traza, y que las gráficas obtenidas no sirven para determinar el valor de las raíces, sino que indican sólo si las raíces son reales o imaginarias. En lo que respecta a las gráficas de las funciones racionales, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, determina la asíntota vertical haciendo $g(x) = 0$.

En su *Methodus differentialis*, publicado en 1730, se encuentra una serie que lleva su nombre

$$\log n! = \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} +$$

$$+ \frac{B_2}{1.2} \frac{1}{n} + \frac{B_4}{3.4} \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{B_2k}{2k(2k-1)} \frac{1}{n^{2k-1}} + \ldots$$

donde los B_i son los números de Bernoulli. Esta serie es esencialmente equivalente a

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ 10^{\left[\frac{B_2}{1.2}\frac{1}{n} + \dots + \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\frac{1}{n^{2k-1}} + \dots\right]}$$

Stirling da los cinco primeros coeficientes B_i y una fórmula de recurrencia para encontrar los siguientes. Aunque la serie log $n!$ sea divergente, calcula $\log_{10}(1000!)$, que es 2567 más una parte decimal, sirviéndose de los primeros términos de la serie. De Moivre se había anticipado a él en este tema, aunque esta serie lleve su nombre.

MACLAURIN

Colin Maclaurin (1698-1746), hijo menor de una familia de tres hermanos, nació en Kilmodan, condado de Argyll, Escocia, en febrero de 1698. Su padre, John, que era un pastor notable, murió cuando Colin no tenía más que seis semanas; a los nueve años perdió a su madre y fue su tío, Daniel Maclaurin, pastor de Kilfinnan, quien se hizo cargo de la educación de los niños. Dotado para el estudio, y después de estudios prometedores de los clásicos, el joven Maclaurin entró en la Universidad de Glasgow bajo la tutela del profesor Carmichael; a los doce años se inició en matemáticas, asimilando rápidamente los *Elementos* de Euclides, que había encontrado por casualidad en la habitación de un amigo.

Su extraordinaria habilidad para las matemáticas llamó la atención del joven profesor de matemáticas Robert Simpson, entablándose entre el maestro y el alumno una sólida amistad que contribuyó a desarrollar favorablemente los talentos prometedores del joven Maclaurin. A los quince años, éste terminó con brío sus estudios de bachillerato en la Facultad de Artes, con una tesis sobre la gravedad. Hacia 1710, volvió a casa de su tío Daniel para proseguir allí con diligencia sus estudios matemáticos y literarios, y en 1717 se presentó como candidato a la cátedra de matemáticas del Marischal College de Aberdeen; después de un examen que duró, según se dice, diez días, venció al otro candidato, un joven de Aberdeen también muy hábil.

A los diecinueve años se convirtió, pues, en profesor de matemáticas en Aberdeen y, gracias a su trabajo incesante e innovador, hizo

que el nivel de las matemáticas en esa universidad se elevara. Después, en 1718 y 1719, publicó en la *Philosophical Transactions* sus dos primeras memorias de matemáticas, una sobre la construcción y medida de las curvas, y la otra sobre un nuevo método para describir todo tipo de curvas. En 1719, viajó por primera vez a Londres y, por mediación de un tal Dr. Clarke, conoció a Newton, por quien su admiración aumentaba de día en día. Su veneración por Newton se tradujo, por otra parte, en su manifiesta intención de popularizar los descubrimientos del gran matemático inglés. Discípulo de Newton, su *Geometria organica* recibe la aprobación del gran maestro quien, gracias a su autoridad como presidente de la Royal Society, consiguió que este libro fuera publicado en 1720. Más tarde, vivió en Francia algunos años como tutor del hijo de lord Polworth, sin dimitir por ello de su puesto de profesor, y durante su estancia en Francia, recibió en 1724 un premio de la Academia de Ciencias por una memoria de física. A causa de la muerte prematura de su pupilo, tuvo que regresar a Aberdeen en 1725 y, según los registros de la universidad, las autoridades competentes no parecieron satisfechas con las razones invocadas por Maclaurin para justificar su ausencia.

Afortunadamente, en 1725, y por recomendación de Newton, fue invitado a ocupar la cátedra de matemáticas de la Universidad de Edimburgo, juntamente con James Gregory, pues al envejecer éste, no era ya capaz de asegurar eficazmente su enseñanza. Mientras que Gregory recibía una suma de 83 libras, 6 chelines y 8 peniques, los emolumentos de Maclaurin eran de 53 libras sólo, durante siete años y sólo en caso de fallecimiento de Gregory el joven profesor escocés recibiría el salario completo. Su *Tratado de las fluxiones,* elaborado hacia 1737 con el fin de defender el cálculo de Newton frente a los ataques del obispo Berkeley, iniciados en 1734, no será publicado hasta 1742. Mientras tanto, contrajo matrimonio con Anne, hija de Walter Stewart, solicitador general de Escocia, y de esta unión nacieron siete hijos. Muy ocupado con su trabajo de profesor, se interesó sin embargo por diversas actividades públicas, tales como la de promover la fundación de un observatorio astronómico, obtener un mapa topométrico más preciso de la costa de Escocia, interesarse vivamente por la búsqueda de un paso en las regiones árticas y tomar parte en los combates contra el pretendiente Carlos Eduardo, intentando en vano, en 1745, organizar la

defensa de Edimburgo. Pero ante los éxitos conseguidos por los combatientes de Carlos Eduardo, hubo de huir y pedir refugio en el arzobispado de York. Al año siguiente su salud se deterioró considerablemente, pero decidió sin embargo volver a Edimburgo y durante los pocos meses que le quedaban de vida, dictó el último capítulo de su *Recopilación de los descubrimientos filosóficos de Sir Isaac Newton,* petición que le había sido hecha por Conduitt, sobrino de Newton, en 1728 a la muerte de éste.

El 14 de junio de 1746, murió Maclaurin a los 48 años, rodeado de sus amigos. Fue enterrado en el cementerio de Greyfriars, en Edimburgo, en donde puede leerse el epitafio compuesto por su hijo lord Dreghorn.

Maclaurin y la geometría

Las dos primeras memorias de Maclaurin aparecidas en las *Philosophical Transactions* antes de cumplir los veintiún años, fueron incorporadas y ampliadas en su *Geometria organica* de 1720 bajo el *imprimatur* de Newton. Su tratado está dividido en dos partes: la parte I se refiere a la descripción de las curvas de todo orden, utilizando solamente ángulos dados constantes y líneas rectas fijas. Desarrolla allí la descripción orgánica de las curvas de Newton, tanto si son cónicas, cúbicas o cuárticas. En la parte II, los lugares planos reemplazan a las curvas. Se encuentran en esta obra proposiciones importantes: dos curvas de órdenes respectivos m y n se interceptan, en general, en mn puntos (capítulo V); una curva de grado n está, en general, determinada por $\frac{(n^2 + 3n)}{2}$ puntos; en particular, una cónica está determinada de manera única por cinco puntos. Dos curvas de grado n se cortan en n^2 puntos; por tanto 9 puntos pueden no ser suficientes para determinar una cúbica, mientras que 10 puntos son excesivos. Esta última proposición se conoce con el nombre de «paradoja de Cramer», aunque este último reconoce a Maclaurin la paternidad de este enunciado. La respuesta a esta paradoja será dada por Plücker, en el siglo XIX. Puede encontrarse también una generalización del hexagrama místico de Pascal.

Maclaurin y el análisis

Gran admirador de Newton, Maclaurin decidió responder al ataque de Berkeley contra el cálculo newtoniano, pero este motivo, suficiente de por sí, se convirtió progresivamente en un *Tratado de fluxiones,* del que envió pruebas para la crítica a su amigo James Stirling. Con el fin de establecer la teoría sobre bases lógicas y sobre unos cimientos indiscutibles, Maclaurin se sirve del rigor en las demostraciones de la antigüedad como modelo, y utiliza plenamente demostraciones geométricas sintéticas para presentar el cálculo. Evita así el uso de cantidades infinitamente pequeñas y sigue a Newton en las concepciones cinemáticas de la noción de límite. Sin embargo, la preocupación por el rigor que Maclaurin impone en sus demostraciones, y el modo retórico de presentación de la obra, hacen que este tratado resulte poco atractivo para el lector. Además, la notación de las fluxiones no aparece hasta la última cuarta parte de su libro, y los temas habituales del cálculo diferencial e integral son tratados de una manera parecida a la de los antiguos. Se encuentran, sin embargo, resultados relativamente nuevos que incluyen el desarrollo en serie de Maclaurin de una función f (la aparición de este resultado en los *Methodus incrementorum* de Taylor es confirmada por Maclaurin en su texto) y el criterio de la integral para la convergencia de series infinitas (encontrado anteriormente por Euler en 1732).

La demostración de Maclaurin del desarrollo en serie de una función $y(x)$ dada es esencialmente, en notación moderna, un método de coeficientes indeterminados: sea $y(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots$ en donde hay que determinar los coeficientes B_i. Entonces

$$\frac{dy(x)}{dx} = B_1 + 2B_2x + 3B_3x^2 + \dots$$

y para $x = 0$, $\frac{dy(0)}{dx} = B_1$; de manera análoga,

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = 2B_2 + 3.2B_3x + 4.3B_4x^2 + \dots$$

y para $x = 0$, $\frac{d^2y(0)}{dx^2} = 2B_2$. Se obtienen de la misma manera los demás valores de los coeficientes, y así

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} = n!\,B_n + (n+1)\,(n)\,(n-1)\ldots 2B_{n+1}x$$
$$+ (n+2)\,(n+1)\ldots 3B_{n+2}x^2 + \ldots$$

y para $x = 0$,

$$\frac{d^n y(0)}{dx^n} = n!\,B_n$$

por lo que

$$y(x) = y(0) + x\,\frac{dy(0)}{dx} + \frac{x^2}{2!}\,\frac{d^2y(0)}{dx^2} + \frac{x^3}{3!}\,\frac{d^3y(0)}{dx^3} + \ldots$$

No se preocupa de la convergencia de la serie ni de los valores de x que representan la función.

Maclaurin y el álgebra

Su tratado de álgebra, publicado en 1748, dos años después de su muerte, se convirtió rápidamente en una obra popular que fue reeditada al menos seis veces a lo largo del siglo XVIII, y que mantuvo su popularidad hasta fin de siglo. Una vez más, Maclaurin quiso rendir homenaje a Newton y este tratado de álgebra debe ser leído como un comentario a la *Arithmetica universalis*. En el capítulo XI de su tratado de álgebra, Maclaurin presenta la solución habitual de las ecuaciones lineales simultáneas por eliminación sucesiva de incógnitas, y en el capítulo XII describe una solución alternativa mediante lo que se llaman los determinantes. El último capítulo contiene un enunciado de la regla que se atribuye generalmente a Cramer. La solución para y en el sistema de ecuaciones

$$a_1x + b_1y = c$$
$$a_2x + b_2y = d$$

viene dada por $y = \dfrac{a_1d - a_2c}{a_1b_2 - a_2b_1}$

y aplica su regla para sistemas de tres y cuatro ecuaciones simultáneas.

CRAMER

Gabriel Cramer (1704-1752), publicó en 1750 un tratado de geometría titulado *Introducción al análisis de las líneas curvas algebraicas* en el que clasifica las líneas curvas planas según el grado de su ecuación y en el que dedica una atención particular a las ramas infinitas y a los puntos singulares. Además, muestra que una curva de orden n está definida, en general, por $\frac{n(n+3)}{2}$ puntos, pero señala igualmente los casos excepcionales. Habiendo procedido él también por eliminación sucesiva de las incógnitas en el caso de un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, añade: «Creo haber encontrado para esto una regla bastante cómoda y general, cuando se tiene un número cualquiera de ecuaciones y de incógnitas, ninguna de las cuales pasa del primer grado. Puede encontrarse en el Apéndice».

Esta regla fue, pues, conocida por el tratado de Cramer más que por el de Maclaurin, debido, quizá, a la superioridad de la notación de Cramer, aunque Maclaurin la hubiera publicado dos años antes que Cramer, pues está fuera de toda duda que conocía esta regla desde sus primeros años en Edimburgo. Sin embargo, si el renombre de Cramer se debe esencialmente a una regla que publicó después de Maclaurin, también éste debe su reputación a un desarrollo en serie que fue publicado anteriormente por Taylor.

TAYLOR

Brook Taylor (1685-1731) cursó estudios en el St. John's College de Cambridge, y se convirtió en un admirador entusiasta de Newton. Fue durante algún tiempo secretario de la Royal Society; sus intereses variados no le impidieron, sin embargo, destacar particularmente por dos trabajos sobre perspectiva, publicados en 1715 y 1719, e igualmente por su célebre *Methodus incrementorum directa e inversa,* que lleva su nombre, aparecido en 1715.

Su *Methodus incrementorum* se refiere esencialmente al desarrollo de una nueva rama de las matemáticas, conocida en la actualidad bajo el nombre de «cálculo de diferencias finitas». Su contenido es casi enteramente original, y el libro tuvo cierto renombre a pesar de su notación complicada y del estilo oscuro del autor. Recordemos que la fórmula de Gregory-Newton fue desarrollada por Gregory mediante un cálculo de diferencias finitas y que Taylor conocía los trabajos de Gregory y de Newton sobre el tema, pero omite mencionar sus conocimientos de los trabajos de Leibniz de 1673 en la materia. Se sabe que Johann Bernoulli publicó en 1694 un resultado prácticamente equivalente a la serie de Taylor.

El desarrollo de la serie de Taylor se encuentra en la proposición VII, teorema III, pp. 21-23 de su «Método» y se presenta con una notación simplificada, como sigue:

Sean z y x dos cantidades variables, una de las cuales, z, aumenta uniformemente con un incremento dado z. Sean $n\Delta z = v$, $v - \Delta z = \acute{v}$, $\acute{v} - \Delta z = \ddot{v}$, etc. Entonces, cuando z aumenta hasta $z + v$, x aumenta hasta

$$x + \Delta x \frac{v}{1 . \Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\acute{v}}{1.2(\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\acute{v}\ddot{v}}{1.2.3(\Delta z)^3} + \ldots$$

Demostración

x	Δx
$x + \Delta x$	$\Delta x + \Delta^2 x$
$x + 2\Delta x + \Delta^2 x$	$\Delta x + 2\Delta x + \Delta^3 x$

$\Delta^2 x$	$\Delta^3 x$	$\Delta^4 x$	etc.
$\Delta^2 x + \Delta^3 x$	$\Delta^3 x + \Delta^4 x$	etc.	
$\Delta^2 x + 2\Delta^3 x + \Delta^4 x$	etc.		

$x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$	$\Delta x + 3\Delta^2 x + 3\Delta^2 x + \Delta^4 x$
$x + 4\Delta x + 6\Delta^2 x + 4\Delta^3 x + \Delta^4 x$	etc.

Los valores sucesivos de *x*, obtenidos por adición continua, son

$$x,\ x + \Delta x,\ x + 2\Delta x + \Delta^2 x, x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x, \text{ etc.},$$

que coinciden con los calculados más arriba. Pero los coeficientes numéricos de los términos x, Δx, $\Delta^2 x$, etc., para estos valores de x están formados de la misma manera que los términos correspondientes del desarrollo binómico. Y si n es exponente del desarrollo, entonces los coeficientes (en virtud del teorema de Newton) serán

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1}\ \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}\ \frac{n-1}{2}\ \frac{n-2}{3}, \text{etc.}$$

Además, cuando z aumente hasta $z + n\Delta z$, es decir, $z + v$, entonces x será igual a la serie

$$x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n}{1}\ \frac{n-1}{2}\ \Delta^2 x + \frac{n}{1}\ \frac{n-1}{2}\ \frac{n-2}{3}\ \Delta^3 x + \text{ etc.}$$

Pero

$$\frac{n}{1} = \left(n\frac{\Delta z}{\Delta z}\right) = \frac{v}{\Delta z}, \frac{n-1}{2} = \frac{n\Delta z - \Delta z}{2\Delta z} = \frac{\dot v}{2\Delta z},$$

$$\frac{n-2}{3} = \frac{n\Delta z - 2\Delta z}{3\Delta z} = \frac{\ddot v}{3\Delta z}, \text{ etc.}$$

Cuando z aumenta hasta $z + v$, x aumenta hasta

$$x + \Delta x\ \frac{v}{1.\Delta z} + \Delta^2 x\ \frac{v\dot v}{1.2(\Delta z)^3} + \Delta^3 x\ \frac{v\dot v\ddot v}{1.2.3(\Delta z)^3} + \text{ etc.}$$

En notación moderna, la serie de Taylor puede escribirse:

$$y(a + v) = y(a) + v\ \frac{dy(a)}{dx}$$

$$+ \frac{v^2}{2!}\ \frac{d^2y(a)}{dx^2} + \frac{v^3}{3!}\ \frac{d^3y(a)}{dx^3} + \ldots$$

donde a es un número arbitrario, $v = n\Delta x$, y es una función de x,

$$\Delta y(x) = y(x + \Delta x) - y(x),$$

$$y(a + \Delta x) = y(a) + \Delta y\,(a),$$

$$\frac{v(v - \Delta x)(v - 2\Delta x)\ \ldots\ (v - (k-1)\Delta x)}{k!}\ \frac{\Delta^k y(a)}{(\Delta x)^k}$$

se convierte en $\frac{v^k}{k!}\frac{d^k y(a)}{dx^k}$ para cada k porque v es fija y cuando n tiende a infinito, Δx tiende a cero, según la argumentación de Taylor. Su método no es, evidentemente, riguroso, y no considera el problema de la convergencia.

Este método de Taylor se aplica igualmente para efectuar diferenciaciones o integraciones, y Taylor se sirve de él para esbozar la determinación de las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales, para la búsqueda de fórmulas que liguen la derivada de una función a la derivada de la función inversa, como, por ejemplo, $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy^3}{dx}$, y para el estudio profundo de los cambios de variable independiente. Considera también uno de los primeros ejemplos de problemas de física matemática, la determinación de la frecuencia de vibración y de la forma de una cuerda vibrante.

Después de la publicación del tratado de las fluxiones de Maclaurin, la escuela inglesa de matemáticas dejó prácticamente de existir, y habrá que esperar a comienzos del siglo XIX para que renazca gracias al contacto con las matemáticas continentales, que no cesaron de desarrollarse durante todo el siglo XVIII. Antes de abordar las críticas del nuevo análisis, mencionaremos algunos matemáticos italianos que se interesaron sobre todo por la geometría.

ALGUNOS MATEMÁTICOS ITALIANOS

Giovanni Ceva (1648-1734) dejó su nombre unido a un teorema de geometría. Una condición necesaria y suficiente para que rectas que salen de los vértices *A, B, C* de un triángulo y que pasan por los puntos *D, E, F* de los lados opuestos sean concurrentes es que

$$\frac{AF.BD.CE}{FB.DC.EA} = -1$$

Este resultado está estrechamente ligado al teorema de Menelao, que será publicado también por Ceva en 1678.

La ecuación de Riccati adquirió importancia al ser introducida por *Jacopo Francesco, conde de Riccati,* natural de Venecia (1676-1754), quien dio a conocer los trabajos de Newton en Italia.

Interesado por la acústica, Riccati quiso resolver ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden y, considerando curvas cuyos radios de curvatura dependen sólo de las ordenadas, llegó a la ecuación

$$x^m \frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2$$

y por un cambio de variable apropiado, la redujo a una ecuación de primer orden

$$x^m \frac{dq}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{u^2}{q}$$

Llamando q a una potencia de x, x^n por ejemplo, obtuvo la forma

$$\frac{du}{dx} + \frac{u^2}{x^n} = nx^{m+n-1}$$

ó

$$\frac{du}{dx} = A(x) + B(x)u + C(x)u^2$$

Mostró cómo resolver esta ecuación para valores particulares de n por el método de separación de variables. Sus trabajos son significativos, no sólo por haber estudiado ecuaciones diferenciales de segundo orden, sino también por haber introducido la idea de reducir ecuaciones de segundo orden a ecuaciones de primer orden.

El *conde Giulio Carlo de Toschi di Fagnano* (1682-1766), matemático aficionado, emprendió hacia 1714 estudios sobre la determinación de arcos de curvas cuya suma o diferencia puede calcularse algebraicamente y que conducen al cálculo de integrales elípticas. Por ejemplo, para la curva $y = \frac{x^3}{a^2}$, la diferencia de dos arcos cuyos valores extremos x e y están relacionados por la expresión $\frac{xy}{a^2} = 1$ puede expresarse como un segmento de recta. Para los casos de la elipse y de la hipérbola, Fagnano muestra que es posible encontrar indefinidamente diversos arcos cuya diferencia se expresa algebraicamente, aunque no se pueda rectificar cada arco individualmente, y en 1716 encuentra que la diferencia de dos arcos elípticos es algebraica. Se interesó igualmente por la lemniscata de Bernoulli y encontró resultados específicos, como el de determinar los puntos

de la lemniscata (los valores de r en $r^2 = a^2 \cos 2\theta$) que dividen una mitad en n partes iguales para ciertos valores de n, y el de encontrar un punto I sobre un arco dado que lo divide en dos partes iguales. En la actualidad, lleva su nombre un teorema sobre los arcos de curvas.

El matemático *Girolamo Saccheri* (1667-1733) estuvo muy cerca de fundar una geometría no euclídea con su demostración irrefutable de que el quinto postulado de Euclides (o postulado de las paralelas) es independiente de los otros. Nacido en San Remo, Italia, el 4 de septiembre de 1667, Saccheri mostró desde su infancia un espíritu vivo y curioso. En 1685, entró en la orden de la Compañía de Jesús y, habiendo completado su noviciado en 1690, fue enviado al Collegio di Brera, en Milán, para enseñar allí gramática y estudiar al mismo tiempo teología y filosofía. En ese colegio se inició en las matemáticas y tomó contacto con los *Elementos* de Euclides y los trabajos de Wallis, pero pareció poco interesado por los descubrimientos de Newton y Leibniz. Ya en esta época atrajo su atención el postulado de las paralelas, y durante toda su vida continuó investigando para demostrar la consistencia de los postulados de Euclides.

En 1694, se encuentra en el Collegio dei Gesuiti de Turín, y durante su estancia allí publica, en 1697, sin nombre de autor, un pequeño libro titulado *Logica demonstrativa,* que fue reeditado en 1701 y después en 1735, dos años después de su muerte. Reconocido como brillante profesor y dotado de una memoria prodigiosa, enseñó también matemáticas en la Universidad de Padua. Allí, Saccheri se unió a las filas de los descontentos que intentaban poner de manifiesto fallos en los postulados fundamentales de Euclides. Parece que conocía bien la historia de las diversas tentativas para determinar estas imperfecciones aparentes, cuyo origen se remonta a Tolomeo. Con toda certeza, conocía los trabajos de Nasir al-Din sobre el tema, y decidió aplicar el método de reducción al absurdo para intentar demostrar que Euclides tenía razón al enunciar su postulado de las paralelas en lugar de hacer de él un teorema.

Comienza su demostración sirviéndose de un cuadrilátero birrectangular, conocido actualmente con el nombre de «cuadrilátero de Saccheri», en el que los lados AC y BD son iguales y perpendiculares a la base AB. Sobre la base de los cuatro primeros postulados,

consigue demostrar que los ángulos $\widehat{ACD}$ y $\widehat{BDC}$ son iguales, y distingue para estos ángulos tres posibilidades: son rectos, obtusos o agudos. Demuestra entonces que el quinto postulado es una consecuencia de que los ángulos sean rectos. No le quedaba a Saccheri más que demostrar la incoherencia de las otras dos hipótesis. Tomando como cierto que una recta es infinitamente larga, demostró que la hipótesis de los ángulos obtusos es contradictoria. Finalmente, demostrando un teorema tras otro, no consiguió demostrar que la hipótesis de los ángulos agudos es contradictoria. Rechazó intuitivamente esta última hipótesis, con el pretexto de que repugnaba a la naturaleza de la línea recta, pero ésta era la vía nueva, la vía de las geometrías no euclídeas, que Saccheri no llegó a vislumbrar, pues estaba probablemente demasiado convencido de que la geometría euclídea era la única. Sus contemporáneos no tuvieron en cuenta sus trabajos, que cayeron en el olvido; habrá que esperar a los trabajos de Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann para asistir a la invención de estas nuevas geometrías, sin que ninguno de ellos hubiera conocido el trabajo de este matemático italiano.

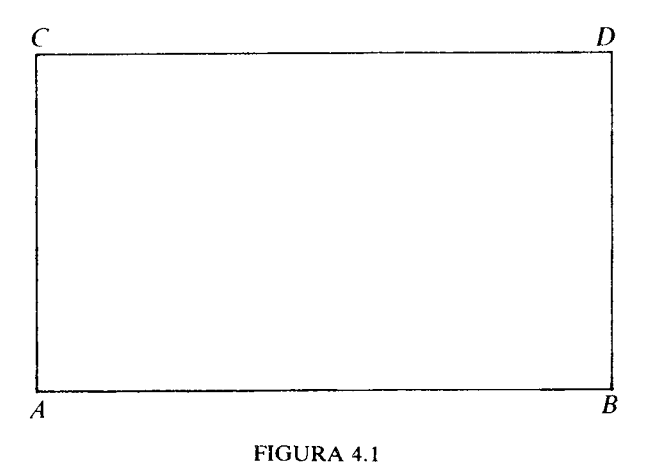


FIGURA 4.1

Guido Grandi (1671-1742), alumno de Saccheri, debe su renombre

sobre todo a sus trabajos sobre las curvas que representan los pétalos de las rosas, y cuyas ecuaciones son

$$r = a \cos n\theta \qquad \text{y} \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

conocidas también con el nombre de «rosas de Grandi». Profesor de matemáticas en la Universidad de Pisa, en un pequeño libro titulado *Quadratura circuli et hyperbolae,* publicado en 1703, estudia el problema de la convergencia de la célebre serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

Hace $x = 1$ en el desarrollo en serie de $\frac{1}{(1 + x)} = 1 - x + x^2 - - x^3 + \ldots$ (obtenido por división), lo que proporciona

$$\tfrac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

y sostiene que este resultado, $\frac{1}{2}$, es verdaderamente la suma de la serie. Siguiendo su argumentación, Grandi considera que la suma de $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, escrita reagrupando los términos así

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

es cero. Considera entonces haber demostrado que el mundo ha sido creado de la nada.

Grandi incluye también en su libro una curva cuya denominación inglesa *«witch of Agnesi»* proviene de una mala interpretación del término italiano *«versiera»*. En efecto, Grandi utiliza este término o su equivalente latino *«versoria» (sinus versus)* para indicar la manera en la que se produce la curva, mientras que la traducción literal de la palabra «versiera» proporciona el término inglés *«witch»* o bruja. En cuanto al nombre de *Agnesi,* se refiere aquí a Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) que trazó la curva a partir de su ecuación (Fermat había encontrado su ecuación un siglo antes), la cual se encuentra en su volumen titulado *Instituzioni analitichi,* publicado en 1748, bajo la forma

$$y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x} \quad \text{o} \quad y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$$

PRIMERAS DIFICULTADES DEL NUEVO ANÁLISIS

Los fundadores del cálculo diferencial e integral definieron claramente las reglas y operaciones que debían seguirse correctamente, y los numerosos y sorprendentes resultados obtenidos por los discípulos de Leibniz y Newton crearon un clima de confianza casi ciega en la eficacia de este nuevo cálculo. Sin embargo, hubo quien se interrogó sobre las bases lógicas de este cálculo y sobre las definiciones más o menos vagas de ciertos conceptos fundamentales de este nuevo análisis.

En 1694, el holandés Bernard Nieuwentijt (1654-1718), físico y geómetra, esboza el primer ataque verdadero contra la falta de claridad en los trabajos de Newton y la existencia dudosa de las diferenciales de orden superior de Leibniz. Aunque admite de manera general la exactitud de los resultados del nuevo cálculo, considera sin embargo que éstos están viciados por una cierta oscuridad y que a veces conducen a absurdos. Critica la inexactitud de despreciar las cantidades infinitesimales en Newton, Barrow y Leibniz, y juzga oscuros y peligrosos sus métodos de cálculo.

En 1695, Leibniz se defiende en las *Acta eruditorum* contra este ataque preciso de Nieuwentijt, pero la respuesta de Leibniz es, de hecho, bastante confusa y muestra alguna indecisión en cuanto a la naturaleza de las diferenciales. En efecto, responde hábilmente al hecho de despreciar las cantidades infinitesimales, considerándolas como cantidades que pueden tomarse tan pequeñas o tan grandes como se quiera; en lugar de despreciarlas, se podrían siempre conservar como cantidades tan pequeñas como se desee, y entonces el error cometido sería menor que cualquier cantidad dada. Su respuesta a la existencia dudosa de las diferenciales de orden superior es más bien floja mientras que, por lo que se refiere a las otras objeciones, las ignora simplemente. Jacob Hermann (1678-1733), alumno devoto de Jakob Bernoulli, proporciona en 1701 una refutación mucho más detallada de los argumentos del geómetra holandés.

La publicación del *Análisis de los infinitamente pequeños* de L'Hospital en 1696 levantó también en Francia críticas y ataques violentos por parte de los cartesianos de la Academia de Ciencias de París. El más eminente de los oponentes fue Michel Rolle (1652-1719), cuyo renombre se debe a su teorema, publicado en 1691, en

una oscura obra de geometría y álgebra titulada *Método para resolver las igualdades*. Recordemos este teorema: Si una función f es diferenciable en el intervalo de a a b, y si $f(a) = 0 = f(b)$, entonces $f'(x)$ tiene al menos una raíz real entre a y b. El teorema fue obtenido por Rolle de una manera casual mientras buscaba soluciones aproximadas de ecuaciones. Rolle sostenía en su crítica que los nuevos métodos conducían a paralogismos, y que el cálculo estaba lleno de ellos. En Francia, el mejor amigo de Johann Bernoulli, Varignon, respondió vigorosamente a las objeciones presentadas por Rolle.

Pierre Varignon (1654-1722), profesor de matemáticas en París, miembro de la Academia de Ciencias, publicó en las *Memorias* de la Academia, en 1704, estudios sobre la utilización de las coordenadas polares y una clasificación elaborada de las espirales obtenidas de curvas algebraicas interpretando la ordenada como un radio vector y la abscisa como un arco vectorial. Fue uno de los primeros matemáticos franceses que adoptó el nuevo cálculo; había preparado un comentario sobre el *Análisis* de L'Hospital, pero no fue publicado hasta 1725. La postura de Varignon en el debate que le enfrenta a Rolle era clara; Bernoulli decía de este último que no comprendía el cálculo: intentaba clarificar la situación mostrando indirectamente que los métodos infinitesimales podían reconciliarse con la geometría de Euclides. Además, Varignon era consciente de que en el uso de las series infinitas había que tener en cuenta el resto. En su correspondencia con Leibniz reconoce que una diferencial es una variable más que una constante. Con toda certeza, Varignon llegó a convencer al algebrista Rolle de la solidez esencial del nuevo análisis, lo que marcó la victoria definitiva del nuevo cálculo en Francia.

A principios del siglo XVIII en Inglaterra, la célebre polémica con respecto a la prioridad que opuso a los partidarios de Leibniz y Newton conoció momentos de tregua intermitente, con recrudecimientos inesperados. Recordemos que una crítica anónima, aparecida en las *Acta,* sobre la teoría de las fluxiones despertó la ira de los matemáticos ingleses, y John Keill (1671-1721), profesor en Oxford y discípulo de Newton, apoyó vigorosamente las reivindicaciones de éste frente a las de Leibniz, acusando incluso a Leibniz de plagio puro y simple. Habiendo solicitado Leibniz, por dos veces, el arbitraje de Newton y de la Royal Society, consiguió finalmente que

una comisión se encargara de reunir los documentos relativos a este asunto y de establecer un informe detallado.

Este informe, el *Commercium epistoticum,* publicado en 1712, concluía simplemente que Newton había sido el primer inventor, cuestión que no había sido puesta en duda seriamente en el debate, y daba a entender que Leibniz no había elaborado su «cálculo de diferencias» sino después de haber conocido ciertos documentos relativos a los trabajos de Newton. Sabemos actualmente que Leibniz no tuvo nunca en su poder esos documentos. Muy afectado por la conclusión de este informe, tanto más cuanto que su testimonio no había sido nunca solicitado, Leibniz y sus partidarios se entregaron a un debate áspero y penoso con los de Newton, y las molestas consecuencias que resultaron de ello marcaron el desarrollo de las matemáticas durante el siglo XVIII.

A las primeras críticas formuladas contra el nuevo análisis en el continente europeo, vinieron a añadirse las de Jonathan Swift (1667-1745) y George Berkeley (1685-1753). La publicación del «panfleto» *El analista,* de Berkeley, marcó un giro en la historia de las matemáticas de Gran Bretaña, y constituyó una reacción saludable para el cálculo de las fluxiones. La crítica de Berkeley, aun reconociendo la utilidad del nuevo análisis, se refería a varios puntos: concepción vaga de las fluxiones como proporcionales a los crecimientos evanescentes, la eliminación de las cantidades infinitamente pequeñas, la existencia misma de estas cantidades infinitamente pequeñas, la imposibilidad de una velocidad instantánea, la demostración dudosa del momento de un rectángulo *AB,* etc.

Precisemos aquí que el texto de Berkeley es, de hecho, tanto una apología de la teología como una crítica tendente a poner de relieve la debilidad de las bases lógicas del nuevo análisis. Además, el título ilustra bien, por sí mismo, el objeto de este «panfleto»: *El analista o discurso dirigido a un matemático infiel* (se refiere aquí al amigo de Newton, Halley), *donde se examina si el objeto, los principos y las inferencias del análisis moderno son concebidos de forma más distinta o deducidos de forma más evidente que los misterios y artículos de fe religiosos. «Primero extrae la viga de tu propio ojo; y entonces verás claramente para sacar la mota del ojo de tu hermano».*

Durante un período de siete años después de la aparición de *El analista,* fueron publicados cerca de treinta textos para remediar la situación. Las primeras réplicas, las de James Jurin, en 1634, fueron

excesivamente débiles y fácilmente refutadas por Berkeley, y éste abandonó la controversia. Sin embargo, la naturaleza insatisfactoria de los argumentos de Jurin condujo a Benjamin Robins a precisar la naturaleza y la certeza de los métodos de fluxiones y de las «primeras y últimas razones» de Newton. La controversia se estableció entonces entre Jurin y Robins, y estas discusiones contribuyeron a precisar ciertos fundamentos del cálculo de fluxiones y del concepto de límite y obligaron a los autores a prestar una mayor atención a las bases lógicas del nuevo análisis. El *Tratado de fluxiones* de Maclaurin, publicado en 1742, marca la cima de la precisión lógica alcanzada por las matemáticas en Inglaterra durante el siglo XVIII.

La muerte de Maclaurin en 1746, y después la de Johann Bernoulli en 1748, marcan la desaparición de los últimos discípulos directos de Newton y Leibniz. La próxima época estará dominada por el célebre alumno de Johann Bernoulli, Euler, y un matemático francés de talento, D'Alembert.

BIBLIOGRAFÍA

Bell, Eric T., *Men of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1965, pp. 131-138.

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean geometry,* Nueva York, Dover, 1955, pp. 1-44.

Boyer, Carl B., «The first calculus textbooks», *The Mathematics Teacher,* 39, 1947, pp. 159-167.

Boyer, Carl B., «Colin Maclaurin and Cramer's rule», *Scripta Mathematica,* 27, 1965, pp. 377-379.

Boyer, Carl B., *The history of the calculus and its conceptual development,* Nueva York, Dover, 1959, pp. 224-246.

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley & Sons, 1968, pp. 455-480.

Boyer, Carl B., *History of analytic geometry,* Nueva York, *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 150-163.

Cajori, Florian, «History of the exponential and logarithmic concepts», *The American Mathematical Monthly,* 20, 1913, pp. 5-14, 35-47, 75-84, 107-117, 148-151, 173-182, 205-210.

Cajori, Florian, «Discussion of fluxions: from Berkeley to Woodhouse», *The American Mathematical Monthly,* 24, 1917, pp. 145-154.

Cajori, Florian, «Historical note on the Newton-Raphson method of approximation», *The American Mathematical Monthly,* 18, 1911, pp. 29-32.

Coolidge, Julian Lowell, *The mathematics of great amateurs,* Nueva York, Dover, 1963, pp. 147-170.

Clerke, Agnès M., «Moivre, Abraham de (1667-1754)», *Dictionary of National Biography,* 38, 1894, pp. 116-117.

Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 586-594.

David, F. N., *Games, gods and gambling,* Londres, Charles Griffin and Co., 1962, pp. 130-180.

Dedron, Pierre y Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens,* París, Magnard, 1959, pp. 238-246.

Evans, W. D., «Berkeley and Newton», *The Mathematical Gazette,* 7, 1901, pp. 418-421.

Eves, Howard, *An introduction to the history of mathematics,* Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1964, pp. 348-357.

Fitzpatrick, Sister M., «Saccheri, forerunner of non-Euclidean geometry», *The Mathematics Teacher,* 57, 1964, pp. 323-332.

Fleckenstein, J. O., *«L'école mathématique baloise des Bernoulli à l'aube du XVIIIe siècle»,* D-62, París, Palais de la Découverte, 1958.

Kattsoff, L. O., «The Saccheri quadrilateral», *The Mathematics Teacher,* 55, 1962, pp. 630-636.

Kennedy, H. C., «The witch of Agnesi — exorcised», *The Mathematics Teacher,* 62, 1969, pp. 480-482.

Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 319-324, 381-399, 406-409, 411-417, 426-429, 440-448, 451-456, 459-463, 471-476, 478-484.

Lick, Dale W., «The remarkable Bernoulli family», *The Mathematics Teacher,* 62, 1969, pp. 401-409.

National Council of Teachers of Mathematics (The), *Historical Topics for the Mathematics Classroom,* 31st. Yearbook, Washington, D.C., N.C.T.M., 1969, pp. 229, 281-282, 399-402, 427-429, 435-440, 443-446.

Rolwing, R. H. y M. Livine, «The parallel postulate», *The Mathematics Teacher,* 62, 1969, pp. 665-669.

Smith, David. E., comp., *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vols. I y II, 1959, pp. 85-90, 253-260, 271-277, 351-359, 566-575, 627-634, 644-655.

Speziali, Pierre M., *Gabriel Cramer et ses contemporains,* D-59, París, Palais de la Découverte, 1958.

Spiess, O., «Une édition de l'oeuvre des mathématiciens Bernoulli», *Archives internationales d'histoire des sciences,* 1, 1947, pp. 356-362.

Struik, Dirk J., «The origin of L'Hôpital's rule», *The Mathematics Teacher,* 55, 1963, pp. 257-260.

Struik, Dirk J., comp., *A source book in mathematics 1200-1800,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969, pp. 178-183, 312-341.

Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. II, *La science moderne,* París, P.U.F., 1969, pp. 435-454, 461, 463, 464-465, 468-470. [*Historia general de la ciencia,* vol. II, *La ciencia moderna,* Barcelona, Destino, 1972].

Tweedie, Charles, «A study of the life and writings of Colin Maclaurin», *The Mathematical Gazette,* 8, 1915, pp. 133-151; 9, 1919, pp. 303-305.

Todhunter, Isaac, *A history of the mathematical theory of probability,* Nueva York, G. E. Stechert and Co., 1931, pp. 56-196, 213-238.

Walker, Helen M., «Abraham De Moivre», *Scripta Mathematica,* 2, 1934, pp. 316-333.

Wollan, G. N., «Maclaurin and Taylor and their series», *The Mathematics Teacher,* 61, 1968, pp. 310-312.

EJERCICIOS

1. Enumerar al menos cuatro revistas científicas que publicaban memorias a comienzos del siglo XVIII. ¿Cuáles eran los temas matemáticos más populares en esa época?
2. En la época de Bernoulli, ¿cuáles eran los centros matemáticos más importantes? Para cada centro, enumerar al menos un matemático activo.
3. Admitiendo que las críticas de Berkeley fueran fundadas, ¿cómo le respondería Vd. si fuera un matemático discípulo de Newton?
4. Demostrar el teorema de De Moivre por inducción matemática.
5. Desarrollar en serie de Maclaurin las funciones sen x, cos x, e^x.
6. Demostrar que el desarrollo en serie de Maclaurin de la función cos x puede obtenerse diferenciando término a término el desarrollo en serie de Maclaurin de la función sen x.
7. Demostrar formalmente que $\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}$.
8. Utilizar el desarrollo en serie de Maclaurin de la función sen x para mostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
9. Sirviéndose del teorema de De Moivre, expresar cos $8x$ y sen $8x$ en términos de sen x y cos x.

10. Demostrar, mediante el teorema de De Moivre, que

$$(-1 - i)^{15} = -128 + 128\, i.$$

11. Probar que $i^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$.
12. Estimar 1000! mediante la fórmula de Stirling.
13. Demostrar que la sustitución $y = z^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli $y' + p(x)y = q(x)y^n$ a una ecuación diferencial lineal.
14. Verificar que los cuatro primeros números de Bernoulli son

$$\frac{1}{6},\ -\frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ -\frac{1}{30}$$

15. Dada la ecuación siguiente, verificar las transformaciones efectuadas por Riccati para obtener la ecuación que lleva su nombre:

$$x^m \frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2$$

5. LA EPOCA DE EULER

INTRODUCCIÓN

La figura dominante del período que se extiende desde 1727 hasta 1783 es, indiscutiblemente, Leonhard Euler. Genio universalmente reconocido, dotado de una gran inteligencia y de una magnífica memoria, Euler enriqueció casi todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas. Sus trabajos consagrados a la mecánica, al álgebra, al análisis matemático, a la teoría de los logaritmos de los números negativos e imaginarios, a la geometría analítica y diferencial, y al cálculo de variaciones, se han convertido en clásicos por excelencia. En varios campos específicos de las matemáticas, sus contribuciones fueron casi completas. Por ejemplo, nuestra trigonometría moderna proviene esencialmente de su *Introductio* de 1748. El prestigio asociado a su persona fue tan grande que diversas cuestiones de notación en álgebra y en análisis fueron definitivamente zanjadas en sus tratados.

Euler, el matemático más prolífico del siglo XVIII y probablemente de todos los tiempos, componía sus memorias con una facilidad desconcertante, y la compilación de sus trabajos reunirá cerca de novecientos títulos que formarán aproximadamente setenta y cinco volúmenes. Es una obra de una riqueza excepcional, que contiene una lista considerable de descubrimientos originales y de ideas que han fascinado e influenciado a numerosos matemáticos. Si es cierto que se encuentra su nombre en todas las ramas de las matemáticas, asociado a fórmulas, teoremas, números, integrales y constantes, se encuentran también en ellas frases que expresan el respeto y la gratitud hacia su obra. Entre otros, Laplace decía a menudo a los jóvenes matemáticos: «Leed a Euler, es el maestro de todos nosotros».

Si Euler fue el matemático más importante de mediados del siglo XVIII, otros matemáticos, como D'Alembert y Clairaut, contribuye-

ron también a enriquecer ciertas ramas de las matemáticas. D'Alembert colaboró con Diderot en la publicación de la *Enciclopedia* y aprovechó esta ocasión para presentar sus principales concepciones matemáticas en diversos artículos aparecidos en esta célebre obra. Clairaut adquirió renombre en el campo de las ecuaciones diferenciales y en la teoría de curvas, así como gracias a obras didácticas sobre álgebra y geometría.

Aunque menos importantes que Euler, D'Alembert y Clairaut, algunos matemáticos como Goldbach, Waring, Lambert y Buffon se significaron también, sobre todo en algunos aspectos específicos de las matemáticas.

EULER

Leonhard Euler (1707-1783) nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza. Paul, su padre, casado con Marguerite Brucker, llevó a su familia al año siguiente al pueblo vecino de Riechen, en el que llegó a ser pastor calvinista. Como antiguo alumno de Jakob Bernoulli, el padre de Leonhard era un matemático consumado, y fue él quien le instruyó en los rudimentos de las matemáticas, aunque esperando que su hijo le sucediera como pastor en el pueblo. Leonhard entró en la Universidad de Basilea para estudiar teología y hebreo, pero sus conocimientos y sus aptitudes en matemáticas eran tales que atrajo la atención de Johann Bernoulli. Este último le reservó una sesión semanal para responder a sus preguntas relativas a los libros y artículos que debía leer, y se dice que para Euler era una cuestión de amor propio reducir al mínimo el número de preguntas a su maestro. Bernoulli reconoció pronto el inmenso talento de este estudiante, así como sus hijos Nikolaus, Daniel y Johann II, que se convirtieron también en amigos de Leonhard. Mientras tanto, obtuvo su bachillerato a los quince años, y en 1724 le fue otorgada una licenciatura; en este momento su padre insistió para que su hijo abandonara las matemáticas en beneficio de la teología. Parece ser que Bernoulli intercedió ante el padre para hacerle comprender que su hijo estaba abocado a un porvenir de gran matemático y no al de futuro pastor de Riechen.

Euler publicó su primera memoria a los dieciocho años, y en 1727 la Academia de París propuso un problema sobre la arboladura

de los barcos a partir del cual Euler, sin ninguna experiencia práctica, escribió una memoria que mereció una mención honorífica. En la conclusión de su ensayo, considera que no es necesario verificar los resultados mediante la experimentación, lo que caracteriza bien la actitud de Euler durante toda su vida. Nunca dejó de considerar la potencia deductiva de la inteligencia como la supremacía indiscutible, y aun cuando los resultados del cálculo contradijeran el sentido común, no dudaba nunca en adoptarlos. A los veinte años dejó su ciudad natal para reunirse con sus amigos Daniel y Nikolaus en la Academia de San Petersburgo en donde estos últimos, establecidos desde 1725, le consiguieron un puesto de profesor de fisiología. En el camino se enteró de la muerte prematura de Nikolaus, víctima del riguroso clima del norte, y a su llegada a Rusia murió la emperatriz Catalina I. La existencia misma de la Academia fue puesta en peligro por los nuevos dirigentes, que no tenían la misma visión liberal de sus predecesores acerca de esta institución. Incorporado a la sección de matemáticas, los primeros años fueron difíciles, y Euler estuvo tentado de aceptar un puesto de teniente en la marina rusa, pero la partida de Daniel Bernoulli para Suiza en 1733 le permitió, sin embargo, mejorar su situación financiera.

A los veintiséis años Euler ocupó la cátedra de matemáticas que había dejado vacante Daniel, y bajo el gobierno autócrata y cruel del ministro Biren, Euler tomó cada vez más conciencia de su posición precaria, de la que no veía cómo salir. Por ello decidió casarse y establecerse, esperando aprovechar al máximo la situación. Se casó, pues, con Catherina, hija del pintor Gsell, que Pedro el Grande había traído a Rusia. Los nacimientos se sucedieron a un ritmo rápido y un deterioro gradual de las condiciones políticas de la época acentuaron sus condiciones de dependencia con respecto a los suyos, por lo que se refugió en un trabajo incesante y, a pesar de la pérdida de su ojo derecho, cuando sólo tenía treinta y tres años, había ya redactado cerca de ochenta memorias y libros sobre las ciencias, sin contar sus otras actividades de orden más práctico. En efecto, durante su estancia en Rusia de 1727 a 1741, trabajó para el gobierno como director del departamento de geografía y como comisario de pesos y medidas —en particular, su trabajo consistió en construir y verificar las escalas e instrumentos de medida—, siendo además autor de manuales escolares de matemáticas elemen-

tales para las escuelas de Rusia, etc. Fue durante este período cuando Euler publicó su célebre tratado de mecánica en 1736, que consagraba su genial talento. Esta obra de mecánica era, de hecho, el primer tratado de importancia reconocida, basado enteramente en el nuevo análisis, sin recurrir a las demostraciones sintéticas, largas y tortuosas que se encuentran en los tratados anteriores.

A la muerte de la emperatriz Ana en 1740, el gobierno se hizo más liberal, pero Euler decidió, sin embargo, aceptar la invitación del rey de Prusia para incorporarse a la Academia de Berlín en 1741. Fundada en 1700 por Leibniz, la Academia de Berlín estaba en período de decadencia en el momento en que Federico el Grande accedió al trono, y este último recurrió a los servicios del matemático Maupertuis para vivificarla, reorganizarla y presidirla. Durante veinticinco años, Euler permaneció al servicio de la Academia, enviando numerosas memorias tanto a la Academia de Prusia como a la de San Petersburgo, de la cual seguía recibiendo una pensión. Su estancia en Berlín no fue siempre dichosa, porque su ineptitud para tratar cuestiones filosóficas le hacía, al parecer, impopular ante el emperador, que habría preferido un filósofo sofisticado capaz de divertir a su corte más que un matemático, aun con un nombre tan prestigioso como el suyo. Sin embargo, aunque Federico el Grande no fuera un entendido en matemáticas, apreciaba lo suficientemente su talento como para ocuparle en todo tipo de trabajos prácticos tales como la acuñación de moneda, las conducciones de agua, los canales de navegación, el régimen de seguros para un sistema de pensiones, etc.

Además de sus *Cartas a una princesa de Alemania,* obra de vulgarización que comprende sus lecciones a la princesa de Anhalt-Dessau, sobrina del rey de Prusia, obra traducida a varias lenguas y que recibió una enorme difusión, Euler publicó trabajos muy importantes durante su estancia en Berlín. En particular, su *Introductio in analysim infinitorum,* escrita en 1748, es la más célebre de sus obras de matemáticas; fue traducida al francés y al alemán y se convirtió rápidamente en el texto por excelencia de análisis. En esta obra se encuentran las célebres fórmulas que relacionan las funciones trigonométricas y la exponencial, expresiones del seno y el coseno en forma de productos infinitos, una geometría analítica en tres dimensiones, proposiciones relativas a la teoría de las curvas algebraicas, el uso de los símbolos e, π e i, etc.

En 1766, Catalina II de Rusia le invita a volver a la Academia de San Petersburgo, y le recibe como una personalidad, poniendo a la disposición de su numerosa familia, que cuenta ya con trece hijos, una casa bien amueblada. Poco después de su vuelta, su vista, ya disminuida por los rigores del clima, baja hasta tal punto que debe recurrir a una pizarra en la que escribe y calcula con tiza. Pero sus años de ceguera no son menos fecundos que los anteriores, gracias a su prodigiosa memoria. De 1768 a 1770 aparecen, en tres volúmenes, las *Institutiones calculi integralis* que, con las *Institutiones calculi differentialis,* publicadas en 1755, recogen todos los trabajos y resultados acumulados en este vasto campo y contienen además numerosas contribuciones personales tales como un desarrollo del cálculo de diferencias finitas, las formas habituales de las integrales elípticas, una teoría de las funciones beta y gamma fundada en las integrales eulerianas y métodos sistemáticos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior de coeficientes constantes. En 1771, el fuego destruyó completamente su casa, y haciendo gala de gran valentía, su servidor Pierre Grimmon, natural de Basilea, llevó a hombros a su amo ciego para salvarle de las llamas. Afortunadamente, los manuscritos de Euler pudieron salvarse, y la emperatriz Catalina remedió rápidamente la situación. A los 69 años, su mujer Catherina se murió y Euler se volvió a casar al año siguiente con la hermanastra de su primera mujer. El 7 de septiembre de 1783, después de haber hablado sobre temas populares de la época, como el descubrimiento de Urano y los montgolfieres, según la frase célebre de Condorcet, «dejó de calcular y vivir».

En todas las ramas de las matemáticas, pueden encontrarse su nombre y sus contribuciones principales: el cálculo, las ecuaciones diferenciales, la geometría analítica y diferencial de curvas y superficies, la teoría de números, las series y el cálculo de variaciones. Sus *Opera omnia,* en proceso de publicación, formarán un conjunto de cerca de 75 volúmenes en cuarto, los cuales reunirán cerca de 900 trabajos, memorias y libros consagrados al dominio científico, lo que corresponde como media a una producción anual de 800 páginas durante la mayor parte de su vida. Dotado de una gran inteligencia y una magnífica memoria, conoce de memoria todas las fórmulas corrientes de análisis y trigonometría, y las seis primeras potencias de los cien primeros números. Euler calcula sin esfuerzo aparente y compone sus memorias con la misma facilidad con que un escritor

escribe una carta a un amigo íntimo. Llamado por sus contemporáneos «el analista encarnado», Euler fue un matemático de un virtuosismo sin parangón, que supo manejar hábilmente las teorías anteriores, y utilizar los recursos de la geometría, el álgebra y el análisis con un arte inigualable para obtener de ellos resultados admirables. Euler, a diferencia de Descartes y Newton antes o Cauchy y Riemann después, no creó nuevas ramas de las matemáticas, pero su técnica incomparable y el espíritu de inventiva que mostró en el campo de la metodología hacen que hablemos todos los días de las fórmulas de Euler, de los polinomios de Euler, de la constante de Euler, de las integrales de Euler y de los números de Euler.

De sus trece hijos, ocho murieron siendo pequeños, y a su muerte contaba con veintiséis nietos. La actividad incesante y prodigiosa de Euler no le impidió disfrutar instruyendo a sus hijos, construirles juguetes científicos, y, a la caída de la tarde, reunirles para la lectura de la Biblia. Rodeado del respeto de sus allegados y del mundo científico, bien merecido por la nobleza de su carácter, pudo considerar, al final de su vida, como alumnos suyos a todos los matemáticos de Europa.

Sus contribuciones matemáticas son tan numerosas y diversificadas que sólo nos es posible extraer de ellas algunos elementos de las principales ramas en las que más se distinguió.

La noción de función en Euler

Los predecesores de Euler, en la mayoría de los casos, elaboraron el cálculo diferencial e integral en relación estrecha con la geometría, el método antiguo. En cambio, él transforma el cálculo en una teoría formal de funciones que no requiere concepciones geométricas. Además, Euler fue el primer matemático que hizo hincapié en el concepto de función y realizó un estudio sistemático de todas las funciones elementales, así como de su derivada e integral.

El concepto de función comienza con las primeras relaciones observadas entre dos variables, y se pueden rastrear estas relaciones hasta el mismo comienzo del desarrollo de las matemáticas entre los babilonios y los egipcios. Sin embargo, la relación matemática expresada de una manera explícita no aparece hasta mucho más

tarde y, en particular en los trabajos de Galileo sobre la mecánica. Después, en el siglo XVII, se aborda esta relación funcional debido al estudio de las curvas y, gradualmente, se introducen los términos y el simbolismo para las diferentes funciones representadas por esas curvas. Ya en esa época, los matemáticos distinguían entre funciones algebraicas y funciones transcendentes y fue Gregory quien, en 1667, subrayó que un sector circular no podía ser una función algebraica del radio y de la cuerda. Asimismo, Leibniz demostró que sen x no podía ser una función algebraica de x y proporcionó una demostración del resultado enunciado por Gregory. La función se define, según Gregory, como una cantidad obtenida de las otras cantidades mediante operaciones algebraicas sucesivas o mediante cualquier otra operación que se pueda imaginar, refiriéndose aquí al paso al límite. El término «fluente» utilizado por Newton, representa una relación entre variables, mientras que Leibniz se sirve de la palabra «función» para designar toda cantidad que varía de un punto a otro de una curva, por ejemplo, la longitud de la tangente o de la subtangente y de la normal. En su *Historia* de 1714, Leibniz emplea el término «función» para designar cantidades que dependen de una variable, y Johann Bernoulli considera que una cantidad formada de cualquier manera con variables y constantes constituye una función.

En el mismo comienzo de su *Introductio,* Euler define la función de una cantidad variable como una «expresión analítica» formada de cualquier manera con esta cantidad variable, con números y con constantes. Engloba bajo esta denominación a los polinomios, las series de potencias y las expresiones trigonométricas y logarítmicas. Después, da una definición de función algebraica como aquella en la que sólo están permitidas las operaciones algebraicas sobre la variable independiente y distingue, además, dos clases de funciones algebraicas: la función racional, que implica las cuatro operaciones aritméticas habituales, y la función irracional, que incluye además la radicación. Euler distingue la función algebraica de la función transcendente diciendo que esta última requiere la repetición ilimitada de combinaciones de la primera, de lo que se sigue que la función transcendente viene dada por una serie infinita. Las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son todas ellas trascendentes así como algunas integrales y variables con potencias irracionales. Añade, además, que toda función es desarrollable en

serie de potencias, y llega incluso a afirmar que toda función puede ser desarrollada en la forma

$$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \ldots$$

en la que los exponentes α, β, γ, ... pueden ser números cualesquiera. Para él no cabe la menor duda de que toda función es desarrollable en serie, lo que, por otra parte, era una opinión muy extendida entonces, fundada en la experiencia adquirida por Euler y sus contemporáneos a partir de la manipulación de las series infinitas.

Euler considera por separado las funciones explícitas y las implícitas, y distingue las funciones que tienen una sola imagen de las que pueden tener más de una imagen para el mismo valor de la variable independiente (uniformes y multiformes). En cuanto a las funciones polinómicas, afirma que pueden ser descompuestas en factores de primero y segundo grado con coeficientes reales. El concepto de «función continua» durante el siglo XVIII se asocia esencialmente a la función que puede ser especificada mediante una expresión analítica, y la palabra «continua» adquiere el sentido que se le da en la actualidad al término «analítica».

Aunque la representación matemática de una cuerda vibrante condujo a una controversia entre varios matemáticos a propósito de la solución de este problema en términos de una «función arbitraria», estos matemáticos y en particular Euler no lograron definir claramente lo que podía significar la «expresión analítica» o la «función arbitraria». Sin embargo, Euler aceptó que una función pudiera tener derivadas discontinuas. El punto de vista que predominó durante todo el siglo fue el aspecto puramente «formal» del concepto de función, más que el aspecto de relación conceptual entre dos variables. Para decirlo brevemente, una función es una combinación de operaciones. Subrayemos que Euler admitió, después de 1749, que la función podía ser definida por una curva trazada al azar sobre un plano.

Las notaciones de Euler

Euler es probablemente uno de los grandes creadores de las notaciones matemáticas modernas, además de haber introducido nuevas constantes. Desde la invención de los logaritmos por Napier y Bürgi

a comienzos del siglo XVII y la introducción del concepto de «base» de los logaritmos por Briggs y Speidell, se sintió la necesidad de utilizar una letra apropiada para designar la «base natural» del logaritmo. Hará falta, sin embargo, esperar más de un siglo después de la publicación de los primeros logaritmos en 1614 para que la letra *e*, utilizada frecuentemente por Euler, designe en adelante la base natural del logaritmo. En una carta de 1731 dirigida a Goldbach, Euler utiliza su letra *e* para «el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a uno», y es en su *Mechanica,* publicada en 1736, donde esta letra *e* aparece impresa por primera vez.

Aunque Euler no fuera el primero en utilizar la letra π para representar la razón de la circunferencia al diámetro en una circunferencia, pues ya había aparecido con anterioridad en la *Sinopsis palmariorum matheseos* de William Jones (1675-1749), publicada en 1706, su uso se extendió y mantuvo gracias a Euler, que adoptó el símbolo π en 1737.

El símbolo *i* para designar la $\sqrt{-1}$ es una notación introducida por primera vez por Euler en 1777. En sus primeros trabajos, utilizaba el símbolo *i* para designar un «número infinito», un poco a la manera de Wallis con su símbolo ∞. Así, Euler escribió $e^x = (1 + x/i)^i$, mientras que actualmente se escribiría

$$e^x = \lim_{h \to 0} (1 + x/h)^h.$$

El símbolo *i* para $\sqrt{-1}$, no publicado hasta 1794, conocerá una amplia difusión gracias a Gauss, que lo adoptó en su obra clásica *Disquisitiones arithmeticæ* de 1801.

Debemos a Euler la designación de los lados de un triángulo mediante las letras minúsculas *a, b* y *c* y de los ángulos opuestos a sus lados mediante las letras *A, B* y *C,* así como el uso de las letras *r, R* y *s* para designar respectivamente los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas y el semiperímetro de un triángulo. Le debemos también la designación *lx* para el logaritmo de *x,* el símbolo Σ para indicar la sumación, y la notación funcional *fx* introducida en 1734 en los *Comentarios* de la Academia de San Petersburgo. Añadamos además que en su *Introductio* de 1748 utiliza las abreviaturas sen, cos, tg, cotg, sec y cosec para las funciones trigonométricas habituales.

Las ideas de Euler sobre los fundamentos del cálculo

Sus ideas sobre las bases lógicas del cálculo son elementales y reposan esencialmente sobre una concepción formal de las operaciones que intervienen para la obtención de los resultados. Según él, las nociones de infinitamente grande e infinitamente pequeño no son tan misteriosas como se desea dar a entender, y se propone eliminar las sospechas que pesan sobre el cálculo dando las explicaciones que juzga suficientes.

Una cantidad infinitamente pequeña no es otra cosa que una cantidad que va disminuyendo y, consecuentemente, es en realidad igual a cero. Para Euler, el cálculo de lo infinitamente pequeño consiste en el estudio de las razones geométricas de las cantidades infinitamente pequeñas. Por ejemplo, si dx designa una cantidad infinitamente pequeña, entonces $dx = 0$, así como $adx = 0$ (donde a es una cantidad finita cualquiera). La razón geométrica adx/dx será finita, es decir $a/1$, y éste es el motivo por el que, según él, estas dos cantidades infinitamente pequeñas dx y adx, aun siendo nulas, no pueden ser confundidas cuando se estudia su razón.

Además, como lo infinitamente pequeño es de hecho nada, está claro, según Euler, que una cantidad finita no cambia si se le añade o quita una cantidad infinitamente pequeña. Sea a una cantidad finita y dx una cantidad infinitamente pequeña. Entonces $a + dx$, así como $a - dx$, y, en general, $a \pm ndx = a$. En efecto, la razón aritmética de la igualdad es evidente, y puesto que $ndx = 0$, tenemos

$$a \pm ndx - a = 0$$

lo que proporciona claramente la razón geométrica de la igualdad, que es

$$\frac{a \pm ndx}{a} = 1$$

Se deduce, pues, una regla aceptada generalmente según la cual «las cantidades infinitamente pequeñas tienden a cero en comparación con las cantidades finitas, y, además, pueden ser despreciadas cuando están implicadas estas cantidades finitas».

Puesto que una cantidad infinitamente pequeña es, de hecho, igual a 0, según Euler, su cuadrado dx^2, su cubo dx^3, etc., serán

también iguales a cero, y estas cantidades tienden a cero en comparación con cantidades finitas. Además, lo mismo ocurrirá con la cantidad infinitamente pequeña dx^2 cuando se la compare con dx porque, dice, $dx \pm dx^2$ está, con respecto a dx en la relación de la igualdad. Es decir

$$(dx \pm dx^2) : dx = \frac{dx \pm dx^2}{dx} = 1 \pm dx = 1.$$

Se obtendría de la misma manera que $dx \pm dx^3 = dx$ y, en general, que $dx \pm dx^n = dx$, con tal que n sea mayor que cero, y la razón geométrica dada por Euler es

$$(dx \pm dx^{n+1}) : dx = 1 \pm dx^n$$

y como $dx^n = 0$, se deduce que esta razón geométrica es la de la igualdad.

Euler determina la diferencial de $y = x^2$ de la manera siguiente: w es el incremento de x, $n = 2xw + w^2$ es el incremento de y, la razón w/n de los incrementos de x y de y es $1 : (2x + w)$, y como $w = 0$, se deduce que $\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{2x}{1}$. Como Euler elimina las diferenciales, la derivada $\frac{dy}{dx}$, que significa para él el cociente 0/0, puede ser igual a un número, de la manera siguiente: para todo número n, $n. 0 = 0$, entonces $n = 0/0$, y en consecuencia la derivada resulta ser un método apropiado para determinar el cociente 0/0. En lo que respecta al infinito, la concepción de Euler es más bien intuitiva y a sus aplicaciones les falta a veces previsión. Simboliza el infinito mediante el símbolo ∞, el cual representa una cantidad mayor que cualquier cantidad finita. Euler interpreta que la relación $\frac{a}{0} = \infty$ significa que una cantidad infinita multiplicada por cero o nada puede ser igual a una cantidad finita. Además, las razones $\frac{a}{dx}$, $\frac{a}{dx^2}$, ..., $\frac{a}{dx^n}$, puesto que los $dx^i = 0$, corresponden respectivamente al infinito de primer orden, de segundo orden, ..., de orden n-ésimo, de manera que el orden de la diferencial determina el orden del infinito. Su falta de previsión es particularmente evidente en el tema de la manipulación de las series infinitas. Por ejemplo, Euler sostiene que de $\frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$ se puede deducir que la serie infinita $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots$

tiene por suma $\frac{1}{4}$. En otras ocasiones, afirma que

$$1 - 3 + 5 - 7 + \ldots = 0$$

porque de $\frac{1}{(1 - x - x^2)}$ se obtiene

$$-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots$$

para $x = 1$ y de $\frac{1}{(1 - x)}$ se obtiene

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

para $x = 2$, contradicción que Euler no puede más que señalar; sumando luego las dos series siguientes

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1 - x}$$

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots = \frac{x}{x - 1}$$

se obtiene

$$\ldots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + 1 + x + x^2 + \ldots = 0.$$

Afortunadamente para él, al trabajar con funciones regulares, Euler no encontró en general problemas en los que sus concepciones del infinito, de la diferencial o de la continuidad pudieran conducirle a situaciones embarazosas o inextricables. Sin embargo, aunque sus ideas sobre los fundamentos del cálculo fueran juzgadas ingenuas y poco rigurosas, por los matemáticos del siglo XIX, permitieron no sólo liberar al nuevo cálculo de las trabas de la geometría, sino también hacer más convincente la interpretación aritmética por medio del concepto de límite, que será formulada por sus sucesores.

El logaritmo y el número complejo en Euler

Los trabajos emprendidos por los hermanos Bernoulli y Leibniz con vistas al desarrollo de las técnicas de integración les condujeron a obtener formas directamente integrables mediante la regla logarítmica. En particular, para calcular

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

el método consiste en descomponer el trinomio en factores lineales por descomposición en fracciones simples, y después integrar las fracciones de la forma

$$\int \frac{dx}{cx + d}$$

sirviéndose de la regla: $\int \frac{dx}{x} = ln\ x$.

Sin embargo, si el trinomio $ax^2 + bx + c$ es complejo, la integración de las fracciones simples exige el logaritmo de un número complejo, porque $cx + d$ puede ser complejo, o si no, d es complejo. Ni Johann Bernoulli ni Leibniz dudaron en integrar estas expresiones englobando números complejos, y este último llegó incluso a pretender que la presencia de números complejos no constituye un inconveniente en sí. En 1702, en una memoria de Johann Bernoulli se puede encontrar una transformación de la diferencial $adz / (b^2 + z^2)$, por medio de la sustitución $z = b\sqrt{-1}\,(t - 1) / (t + 1)$, que proporciona

$$-\ adt/\sqrt{-1}\ 2bt.$$

Como la integral inicial conducía también a un arcotangente, Bernoulli demostró así una relación entre el logaritmo de un número imaginario y una función trigonométrica inversa.

En un intercambio de correspondencia entre Leibniz y Johann Bernoulli, del 16 de marzo de 1712 al 29 de julio de 1713, se entabla una discusión sobre la existencia de logaritmos de los números negativos e imaginarios: Leibniz afirma que el logaritmo de un número negativo no existe o es imaginario, mientras que Bernoulli pretende que ese logaritmo debe ser real; los dos amigos tampoco se ponen de acuerdo sobre la definición de la media proporcional y de la tercera proporcional, aplicada a las cantidades negativas. Una segunda correspondencia, de 1727 a 1731, esta vez entre Johann Bernoulli y su alumno Euler, no aporta mucha luz sobre el tema, porque Bernoulli continua defendiendo que $\log(n) = \log(-n)$, mientras que Euler plantea críticas esclarecedoras a las afirmaciones de su maestro, pero no está en condiciones, en esta época, de contribuir en forma más sustancial a resolver este problema. Habrá que esperar a la memoria de 1749 titulada *De la controversia entre los señores Leibniz y Bernoulli sobre los logaritmos negativos e*

imaginarios, en la que Euler realiza una contribución importante a la teoría de los logaritmos de los números complejos. Entre tanto, Cotes y De Moivre encontrarán, como ya hemos mencionado, fórmulas que relacionan los números complejos con las funciones logarítmicas y trigonométricas.

La correspondencia entre Johann Bernoulli y Leibniz sobre la existencia del logaritmo de los números negativos e imaginarios, publicada en 1745, estimuló grandemente al joven Euler que, ya en 1747, explica correctamente, en una carta a D'Alembert, la naturaleza de los logaritmos de los números negativos. Después, en su memoria de 1749, vuelve a considerar sistemáticamente los argumentos de Leibniz y Bernoulli y, tras haberlos refutado, demuestra el teorema siguiente: «Para cada número existe una infinidad de logaritmos», sirviéndose de la relación $i\theta = \log(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, descubierta por él en 1748, 34 años después de la publicación de Cotes. Euler afirma, púes, que para los números reales positivos hay un solo valor del logaritmo que es real, siendo todos los otros imaginarios, pero que para los números negativos y los números complejos todos los valores del logaritmo son imaginarios. En particular, de la relación

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

si $\theta = \pi$, $e^{i\pi} = -1$, de donde $ln(-1) = \pi i$; por otra parte, si $a + bi = e^{x+iy}$, se puede escribir

$$e^x \cdot e^{iy} = a + bi = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

de donde

$$a = e^x \cos y, \quad bi = e^x \cdot i \operatorname{sen} y,$$

y se deduce que

$$y = \operatorname{arctg}\frac{b}{a},\ x = ln\left(a \sec \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Por lo que respecta a los números complejos, se pueden mencionar también otros resultados muy importantes. Partiendo de la solución general del logaritmo de los números complejos, Euler obtiene la relación siguiente:

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-2\lambda\pi - \pi/2} = 0{,}2078795763507,$$

para $\lambda = 0$ que, según sus propias palabras, «es tanto más notable, cuanto que es real y encierra incluso una infinidad de valores reales diferentes». Este resultado aparece por primera vez en una carta a Christian Goldbach en 1746. Partiendo de $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, se obtiene fácilmente este resultado haciendo $\theta = \frac{\pi}{2}$, de lo que se deduce que $e^{i\pi/2} = i$, de donde, a su vez,

$$(e^{i\pi/2})^i = e^{\pi i^2/2} = e^{-\pi/2}$$

por lo que

$$i^i = e^{-\pi/2}$$

Euler demostró también que todo número complejo elevado a una potencia compleja, es decir $(a + bi)^{(c + di)}$ puede escribirse como un número complejo $p + qi$. Subrayemos que, a pesar de los resultados importantes obtenidos por Euler en el tema de los números complejos, éste los considera como «números imposibles», números que existen sólo en la imaginación y que son útiles, sin embargo, en el estudio de problemas para los que no sabemos si existe una respuesta. En efecto, si se quiere dividir 12 en dos partes cuyo producto sea 40, se encontrará

$$6 + \sqrt{-4} \text{ y } 6 - \sqrt{-4}$$

para esas partes, y reconocemos así que el problema no puede ser resuelto.

Euler y las series infinitas

Hemos mencionado ya que Euler manipula a veces las series infinitas con una falta de previsión particularmente evidente. Sin embargo, esto no le impidió contribuir de manera importante al estudio de las series infinitas mediante la aportación de resultados originales y sumamente significativos, gracias a una audacia poco común y un virtuosismo sin parangón.

Uno de estos resultados, que desconcertó a buen número de sus

contemporáneos, se refiere a la suma de los recíprocos de los cuadrados perfectos. Euler comienza con la serie del seno.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

y cuando sen $x = 0$, la serie puede concebirse como una ecuación polinómica infinita que, después de dividir por x, puede representarse como

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \text{ ó } 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \ldots$$

donde

$$z = x^2.$$

Después, utiliza la teoría de las ecuaciones algebraicas que se refiere a la relación entre las raíces y los coeficientes (la suma de los recíprocos de las raíces es igual al coeficiente del término lineal con signo contrario). Además, sabe que

$$\operatorname{sen} x = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

donde los ceros de sen x son $\pm\,\pi$, $\pm\,2\pi$, ... Entonces, las raíces de la ecuación en z son

$$\pi^2,\ (2\pi)^2,\ (3\pi)^2,\ \ldots$$

de donde

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6},$$

y de la misma manera obtiene

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Utilizando la serie infinita del coseno, obtiene de forma análoga

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32},$$

y así sucesivamente hasta la potencia $n = 26$.

En el curso de sus trabajos sobre las series armónicas Euler obtiene, por medio de la función logarítmica, una sumación de n

términos de la serie armónica en la que aparece por primera vez la «constante de Euler». Comienza con el desarrollo de

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \ldots$$

despeja $\frac{1}{x}$, y escribe el desarrollo de la siguiente forma

$$\frac{1}{x} = \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} - \ldots$$

Para $x = 1, 2, 3, \ldots i$, sustituyendo, se obtiene

$$\frac{1}{1} = \log 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots$$

$$\frac{1}{2} = \log\frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{64} - \ldots$$

$$\frac{1}{i} = \log\left(\frac{i+1}{i}\right) + \frac{1}{2i^2} - \frac{1}{3i^3} + \frac{1}{4i^4} - \ldots$$

Sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta que

$$\log\left(\frac{i+1}{i}\right) = \log(i+1) - \log i,$$

obtiene

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i} = \log(i+1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{i^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{i^3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \ldots + \frac{1}{i^4}\right) - \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i} = \log(i+1) + C$$

en donde $C = 0.577218$, resultado obtenido por Euler en 1734-35. En 1769, calcula esta constante con 16 cifras decimales para $x = 10$.

La constante de Euler «γ» (notación actual) se define ahora como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$$

y no sabemos todavía si esta constante, calculada en la actualidad con más de cien cifras decimales, es racional o irracional.

Se le debe también una generalización de la fórmula de Bernoulli para la suma de las potencias enteras positivas de los números naturales, conocida en la actualidad como «la fórmula de sumación de Euler-Maclaurin», así como la relación siguiente

$$\frac{1}{s(e^s - 1)} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{s^i}{i!}$$

que define los «números de Bernoulli» B_i. Euler introdujo también la transformación siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}},$$

donde Δ^n significa la n-ésima diferencia finita; este resultado nos permite transformar una serie convergente en una serie que converge más rápidamente. Añadamos que Euler la utilizaba también para transformar series divergentes en series convergentes, puesto que no distinguía en general entre unas y otras.

Los trabajos de Euler en teoría de números

La teoría de números ocupó un lugar importante en los trabajos de Euler. En 1736 demuestra el pequeño teorema de Fermat —si p es primo, $a^p - a$ es divisible por p— que se publicará más tarde en una memoria aparecida en 1761 en los *Comentarios* de San Petersburgo bajo el título *Teoremas sobre los residuos obtenidos por la división de las potencias*. Precedida de nueve teoremas sobre los residuos, su demostración se basa en la inducción matemática y se presenta así (Euler utiliza el método de descenso infinito de Fermat):

1) Si $a = 1$, el teorema es evidentemente cierto.
2) Aceptemos el teorema para $a = k$, donde a es un entero positivo.
3) Demostremos que el teorema es cierto para $a = k + 1$; utilizando el teorema del binomio, se puede escribir $(k + 1)^p$ como $k^p + mp + 1$ donde m es un entero. Restando $k + 1$ a cada miembro, se ve que $(k + 1)^p - (k + 1) = mp + (k^p - k)$. Como $(k^p - k)$ es divisible por p, por hipótesis, se deduce que todo el segundo miembro es divisible por p, y por lo tan-

to, también el primero. El teorema es válido para todo valor de a con tal que a sea primo con p.

Euler generaliza este teorema de Fermat en 1760 introduciendo la función $\varphi(n)$, número de enteros inferiores a n y primos con n (aunque la notación $\varphi(n)$ fue introducida por Gauss). Demuestra que «si a es un número primo con n, entonces $a^{\varphi(n)} - 1$ es divisible por n». Por ejemplo, partiendo de $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, etc., para $n = 60$ con $a = 23$, se encuentra que $\varphi(60) = 16$, utilizando la descomposición

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

donde los p_i son factores distintos, primos con 60, de donde $23^{16} - 1$ es divisible por 60.

En una memoria de 1738, demuestra los casos $n = 3$ y $n = 4$ del gran teorema de Fermat: $a^n + b^n = c^n$ (ya en 1676, un corresponsal de Fermat, Bernard Frénicle de Bessy había demostrado la conjetura para $n = 4$). Su demostración, por medio del descenso infinito consiste en demostrar que si $a^4 + b^4$ es un cuadrado para un solo triplete (a, b, c), cualquiera que sea el orden de magnitud de a y b, está en condiciones de encontrar progresivamente números a y b menores y obtener al final los menores números enteros. Como no existen números tales que la suma de sus cuadrados sea también un cuadrado, debemos concluir, dice, la inexistencia de tales números.

A propósito de la conjetura de Fermat que dice que $2^{2^n} + 1$ es siempre un número primo, Euler indicó, ya en 1732, que para $n = 5$ esta afirmación es inexacta porque $2^{2^5} + 1 = 4{,}294{,}967{,}297$ puede expresarse como el producto de

$$6{,}700{,}417 \times 641.$$

Uno se sentiría inclinado actualmente a conjeturar lo contrario, porque para $n > 4$, a pesar de múltiples tentativas, todas han fracasado salvo para $n = 1, 2, 3$ y 4 (para $n = 4$, la fórmula proporciona 65537, un número primo).

Euler se interesó igualmente por el problema de particiones y por la determinación del número de descomposiciones posibles de un número N en una suma de m términos. Entre los resultados que dejó Euler, podemos mencionar la demostración del enunciado de Fermat: «Todo número primo de la forma $4n + 1$ se descompone de

manera única en una suma de dos cuadrados»: las demostraciones de que «todo divisor de la suma de dos cuadrados primos entre sí es la suma de dos cuadrados», que

$$x^4 + y^4 \text{ y } x^4 - y^4$$

no pueden ser cuadrados y que «un número primo de la forma $3n + 1$ se descompone de manera única en la forma $x^2 + 3y^2$».

En 1747, Euler añadió tres pares de números amigos a la lista de Fermat y más tarde, en 1750, enumeró 62 pares, dos de los cuales resultaron más tarde inexactos. En una memoria póstuma, demostró el recíproco del teorema de Euclides: «Todos los números perfectos pares son de la forma dada por Euclides, es decir,

$$2^{n-1}(2^n - 1), \text{ donde } 2^n - 1$$

es un número primo». Subrayemos que la existencia de números perfectos impares es todavía un problema no resuelto.

Los progresos introducidos por Euler en la teoría de las fracciones continuas y el uso de la ecuación de Pell (atribuida falsamente a John Pell (1611-1685) por Euler) le permitieron mejorar la resolución de las ecuaciones indeterminadas, y en 1759 ofreció un método de resolución de la ecuación de Pell, $x^2 - Ay^2 = 1$, expresando $\sqrt{A}$ como una fracción continua, pero su método no es enteramente satisfactorio.

La teoría de los residuos cuadráticos suscitó igualmente importantes investigaciones de Euler y el descubrimiento más original, si no el más importante, del siglo XVIII en teoría de números, la ley de reciprocidad cuadrática. En el lenguaje de Euler, si existe un x tal que $x^2 - p$ es divisible por q, entonces p es un residuo cuadrático de q; si no, p no es un residuo cuadrático de q. En 1808, Legendre estableció la formulación actual:

Para todo número p y todo número primo q

$$(p/q) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \text{ es un residuo cuadrático de } q \\ -1 \text{ si } p \text{ no es un residuo cuadrático de } q, \end{cases}$$

y la ley de reciprocidad, en su forma moderna, enuncia que si p y q son dos números primos distintos, entonces

$$(p/q)\,(q/p) = (-1)^{(1/4)\,(p-1)\,(q-1)}.$$

Euler enunció hacia 1755 esta ley de reciprocidad en una formulación equivalente a la adoptada por Gauss en el siglo XIX, pero no la demostró.

Otras contribuciones matemáticas de Euler

En su *Introductio* Euler estudia las funciones trigonométricas desde un punto de vista estrictamente analítico, de modo que, por ejemplo, el seno no es ya la longitud de un segmento sino que se convierte en un número o una razón: la ordenada de un punto sobre la circunferencia unidad o el número dado por la serie infinita del seno. Habiendo encontrado muy pronto las series infinitas de e^z, sen z y cos z, Euler dedujo de ellas las «identidades célebres».

$$\text{sen}\ z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Encuentra también fórmulas trigonométricas a partir de ellas, como

$$z = \frac{1}{2i}\, ln\, \frac{\cos z + i\ \text{sen}\ z}{\cos z - i\ \text{sen}\ z}$$

entre otras, y puesto que

$$\frac{\text{sen}\ z}{\cos z} = \text{tg}\ z,$$

Euler expresa el arco z en términos de la tangente:

$$z = \frac{1}{2i}\, ln\, \frac{1 + i\ \text{tg}\ z}{1 - i\ \text{tg}\ z}$$

y partiendo del desarrollo de $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, la sustitución $x = i$ tg z le lleva a escribir

$$z = \frac{\text{tg}\ z}{1} - \frac{(\text{tg}\ z)^3}{3} + \frac{(\text{tg}\ z)^5}{5} + \frac{(\text{tg}\ z)^7}{7} + \ldots, \text{etc.}$$

Euler proporciona así a la trigonometría su forma moderna y utiliza abundantemente los desarrollos en serie y en productos infinitos de las diversas funciones trigonométricas. En lo que respecta a los productos infinitos, fue Euler quien reconoció su importan-

cia y, mediante su uso, obtuvo resultados importantes en teoría de funciones y en teoría de números.

En la teoría de ecuaciones, Euler afirmó, sin demostrarlo en general, que un polinomio con coeficientes reales de grado arbitrario puede descomponerse en factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales. Además, subrayó que las raíces complejas se presentan en pares conjugados y demostró que el producto de

$$x - (a + b\sqrt{-1}) \text{ por } x - (a - b\sqrt{-1}),$$

$$\text{donde } a + b\sqrt{-1} \text{ y } a - b\sqrt{-1}$$

son un par conjugado, proporciona una expresión cuadrática con coeficientes reales. Demostró su teorema para polinomios de grado 6,

$$4n + 2,\ 8n + 4,\ \ldots,\ 2^n p,$$

donde p es impar. Sin embargo, la clave del problema consistía en demostrar el teorema fundamental del álgebra, lo que Euler no consiguió realizar, y su demostración puramente algebraica se reveló incompleta, aunque él creía que «no se encontrará en ella nada que criticar».

En el tema de las ecuaciones diferenciales, los trabajos de Euler son numerosos y sumamente significativos. Estableció la teoría del factor integrante, introducida por Johann Bernoulli, y en 1750 integró las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. Hacia 1760, estudiando la ecuación de Riccati

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x),$$

demostró que, si se conoce una solución particular $y = f(x)$, la sustitución $y = n + \frac{1}{u}$ transforma esta ecuación de Riccati en una ecuación diferencial lineal en u. Además, si se conocen dos integrales particulares (soluciones), la solución de la ecuación original se reduce a una simple cuadratura. También resolvió completamente la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes de orden n y acometió también la integración de las ecuaciones no homogéneas. Desarrolló el método de las series para la resolución de ecuaciones diferenciales y, en particular, introdujo la utilización de las series hipergeométricas.

Introducido por Euler en 1734, el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales no comenzó realmente hasta 1747 con el problema de las cuerdas vibrantes que, por otra parte, suscitó una larga controversia entre diversos matemáticos de la época y cuyo debate no sería zanjado hasta el siglo XIX.

Volviendo a considerar diversos problemas relativos a extremos de integrales, ya estudiados por discípulos de Leibniz, Euler generalizó el problema de la braquistócrona en términos de cantidades mínimas e introdujo un nuevo enfoque para estudiar estos tipos de problemas, como los isoperimétricos y las superficies mínimas de revolución. De 1736 a 1744, mejoró su método, equivalente a transformar la integral

$$\mathrm{J} = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

de manera que la función $y(x)$, que hace mínimo o máximo el valor de J, satisfaga la relación

$$f_x - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y}y'' = 0.$$

Como f es conocida, esta ecuación de segundo orden, no lineal en general, es una ecuación diferencial ordinaria en $y(x)$. Esta ecuación constituye, incluso en la actualidad, la ecuación fundamental del cálculo de variaciones. Aunque sus argumentos se complicaran por la consideración simultánea de elementos geométricos y analíticos (diferencias sucesivas y series), Euler expuso el primer método general para resolver los problemas de extremos, creando así una disciplina nueva: el cálculo de variaciones.

La *Introductio* de Euler realiza también una contribución importante a la teoría de curvas planas, fundamentada esencialmente en el concepto de función. Su minucioso estudio de las cónicas se efectúa mediante coordenadas rectangulares y oblicuas y en él se encuentra, probablemente por primera vez, una exposición analítica de los cambios de coordenadas. Adopta la clasificación de las curvas por el grado de Newton, justificando minuciosamente cada una de las etapas, y después presenta el estudio general de las propiedades de las curvas, forma, singularidades, curvatura, etc. En un capítulo sobre las curvas trascendentes, se encuentran relaciones funcionales trascendentes habituales, y otras como $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^x$, $y^x = x^y$ e $y =$

$(-1)^x$, algunas de las cuales fueron estudiadas por su maestro Johann Bernoulli.

En su *Introductio*, Euler utiliza las coordenadas polares de forma sistemática y presenta las ecuaciones de transformación de las coordenadas rectangulares en coordenadas polares bajo una forma trigonométrica moderna. Representa las curvas en el espacio mediante las ecuaciones paramétricas $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, donde s es la longitud del arco, y obtiene de estas ecuaciones las relaciones

$$dx = p\, ds,\ dy = q\, ds,\ dz = r\, ds$$

donde p, q y r son los cosenos directores que verifican la igualdad

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

y donde ds, la diferencial de la variable independiente, se utiliza como una constante.

En 1760, Euler funda la teoría de superficies en su memoria titulada *Investigaciones sobre la curvatura de superficies*, lo que representa su contribución más importante al campo de la geometría diferencial. Su idea consiste en determinar el radio de curvatura de toda sección plana de una superficie, aplicar a continuación la solución obtenida a las secciones que son perpendiculares a la superficie en todo punto dado, y por último comparar los radios de curvatura de estas secciones con respecto a su inclinación mutua, lo cual le permite establecer la curvatura de las superficies.

En un *Apéndice* a su *Introductio*, encontramos una larga exposición sistemática sobre la geometría analítica sólida que comprende esencialmente un estudio de las superficies y algunos elementos de las curvas, las cuales serán estudiadas más sistemáticamente en una memoria publicada en 1775. Puede mencionarse que esta exposición constituye el primer tratado de geometría analítica sólida en el que se encuentran, entre otras cosas, las primeras fórmulas para la traslación y rotación de ejes en el espacio, las nociones de superficies algebraicas y trascendentes, así como la noción de superficie de segundo grado que constituyen una familia de cuádricas en el espacio.

En el siglo XVIII fueron descubiertas diversas funciones trascendentes a partir de problemas de cálculo de primitivas y de interpolación. Entre estas nuevas funciones trascendentes, la función gamma

fue obtenida por Euler a partir de sus trabajos en el problema de la interpolación de $n!$ para valores no enteros de n. Partiendo de la expresión de $n!$ mediante un producto infinito, Euler observó que, para $n = 1/2$, el producto infinito, transformado mediante operaciones algebraicas, conducía al de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2.2}{1.3}\right)\left(\frac{4.4}{3.5}\right)\left(\frac{6.6}{5.7}\right)\ldots$$

En la notación $\Gamma(n + 1) = n!$, introducida más tarde por Legendre, Euler demostró que $\Gamma(n + 1) = n\,\Gamma(n)$, y obtuvo así $\Gamma(3/2)$, $\Gamma(5/2)$, etc. Sin embargo, el resultado obtenido por Euler, idéntico al de Wallis, le condujo a la generalización del concepto de factorial por medio de la integral siguiente, conocida también por Wallis:

$$\int_0^1 x^e\,(1 - x)^n\,dx \quad \text{(primera integral euleriana).}$$

Euler calculó esta integral desarrollando el binomio $(1 - x)^n$ y obtuvo

$$\int_0^1 x^e\,(1 - x)^n\,dx = \frac{1}{1 + e} - \frac{n}{1(2 + e)} + \frac{n(n - 1)}{1.2(3 + e)} - \frac{n(n - 1)(n - 2)}{1.2.3(4 + e)} + \ldots$$

y para $n = 0, 1, 2, \ldots$, las sumas del segundo miembro son, respectivamente,

$$\frac{1}{1 + e},\ \frac{1}{(1 + e)(2 + e)},\ \frac{1.2}{(1 + e)(2 + e)(3 + e)},\ \frac{1.2.3}{(1 + e)(2 + e)(3 + e)(4 + e)},\ \ldots$$

Encontró, pues, para valores enteros positivos, que

$$\int_0^1 x^e\,(1 - x)^n\,dx = \frac{n!}{(1 + e)(2 + e)\ldots(n + 1 + e)}$$

y después, para n cualquiera y mediante ciertas transformaciones, Euler obtuvo la relación

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n\,dx \quad \text{(segunda integral euleriana).}$$

Por medio de una sustitución adecuada, Euler dio la forma moderna

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx, \text{ donde } \Gamma(n + 1) = n!,$$

llamada «función gamma» por Legendre. La primera integral euleriana se conoce ahora, en su forma habitual, como la «función beta»:

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1}\, dx.$$

Euler consiguió también obtener la relación entre estas dos funciones transcendentes:

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m + n)} \text{ (en notación moderna).}$$

Los resultados obtenidos por Euler en el campo de estas funciones trascendentes fueron desarrollados y enriquecidos por los trabajos de Legendre y Gauss.

También el problema de interpolación aplicado a funciones llevó a Euler a considerar, ya en 1729, la representación de una función $y = f(x)$ mediante una serie trigonométrica. Partiendo de las condiciones $f(n) = 1$ para cada n, buscó una solución periódica es decir, que valiera 1 para x entero, y encontró

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \operatorname{sen} 2k\pi x + b_k(\cos 2k\pi x - 1)\}$$

donde los coeficientes a_k y b_k dependen de las condiciones $f(n) = 1$ para cada n. Encontró, pues, un resultado idéntico a lo que se conviene en llamar el desarollo de Fourier de una función arbitraria, así como la determinación de los coeficientes mediante integrales. Euler obtuvo también representaciones de funciones mediante series trigonométricas partiendo no del problema de interpolación, sino de una serie geométrica de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n, \quad \text{donde} \quad i^2 = -1.$$

Durante el período que nos interesa aquí, la figura dominante

fue, evidentemente, Euler. Sin embargo, también se distinguieron otros matemáticos de talento y, aunque nos sea imposible detenernos en cada uno de ellos, hemos querido, a pesar de todo, reconocer el mérito de algunos de ellos, comenzando por el más ilustre de los matemáticos franceses de este período, D'Alembert.

D'ALEMBERT

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) nació en París el 16 de noviembre de 1717. Su madre, la marquesa de Tencin, era escritora y aristócrata y le abandonó, según parece, «en una caja de pino», en las escaleras de la iglesia de Saint-Jean-le-Rond, cerca de Notre-Dame. Su padre, el caballero Destouches, general de artillería, ausente en el momento del nacimiento, le sacó del hospicio donde se albergaba para alojarle en casa de Mme. Rousseau, y le legó una pensión de 1200 libras. A los doce años, D'Alembert dejó esa casa y entró en el colegio de las Cuatro Naciones, fundado por Mazarin para los jóvenes nobles, pero conservó siempre un profundo agradecimiento hacia esa mujer, esposa de un vidriero, con quien pasó toda su infancia. Fue en este colegio, cuya cátedra de matemáticas había sido distinguida por Varignon, donde Jean Le Rond, sobrenombre tomado del nombre de la iglesia en donde fue depositado por su madre, se aficionó a las matemáticas y, aunque al salir del colegio estudió derecho, continuó estudiando matemáticas por su cuenta.

Después de sus estudios de derecho quiso hacer medicina y, tras intentar en vano dejar de lado las matemáticas para consagrarse a los estudios de medicina, cedió a su inclinación y se dedicó para siempre a las matemáticas. Una memoria sobre el cálculo integral en la que corregía algunos puntos del *Análisis demostrado* del padre Reyneau le abrió las puertas de la Academia de Ciencias, y el 19 de mayo de 1741 se convertía en académico cuando sólo tenía 23 años. En 1743 publicó su *Tratado de dinámica,* en el que se encuentra el principio que lleva su nombre: en un sistema, las fuerzas internas de inercia son iguales y opuestas a las fuerzas que producen la aceleración; su obra sobre la teoría general de los vientos fue galardonada por la Academia de Berlín en 1746. En 1747, D'Alembert aplicó su

principio al problema de las cuerdas vibrantes, lo que le condujo a una ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

para la que dio la solución

$$u = f(x + t) + g(x - t)$$

donde f y g son funciones arbitrarias. La naturaleza de estas funciones fue objeto de una viva disputa con Euler: D'Alembert sostenía que debían ser analíticas, representables por una ecuación, mientras que Euler, generalizando su concepción anterior, consideraba que podían ser cualesquiera, puramente gráficas e incluso discontinuas. El año anterior, D'Alembert había hecho un intento infructuoso de demostrar el teorema fundamental del álgebra que conserva su nombre.

De 1751 a 1772, colaboró con Denis Diderot (1713-1784) en los veintiocho volúmenes de la célebre *Enciclopedia* o *Diccionario razonado de las ciencias, las artes y los oficios.* Autor del *Discurso preliminar,* que le valió una gran celebridad, D'Alembert redactó casi completamente la parte matemática y filosófica de la *Enciclopedia.* En sus artículos de la *Enciclopedia,* D'Alembert exponía sobre todo sus puntos de vista, a menudo ingeniosos pero algunas veces paradójicos, sobre numerosas cuestiones matemáticas. Entre tanto, se convirtió en «secretario perpetuo» de la Academia de Ciencias en 1754, se hizo amigo de Voltaire y los «filósofos» y, juntos, prepararon el camino a la Revolución francesa. Rechazó las proposiciones del rey de Prusia, Federico II, que le llamó a Berlín para encargarse de la dirección de la Academia, porque no le pareció conveniente que nadie se erigiera en superior jerárquico de Euler. De la misma manera, declinó la invitación de Catalina II, que quería confiarle la educación de su hijo, y ello a pesar del muy tentador salario asignado a la tutela del joven príncipe. Murió en París el 29 de octubre de 1783, y la influencia que ejerció junto con Clairaut en la sociedad de su tiempo preparó a Francia para recuperar el rango que había perdido desde la época de Descartes y Fermat.

En un ensayo, *Sobre los logaritmos de las cantidades negativas* (1761), D'Alembert se refiere a su correspondencia de 1747 y 1748

con Euler sobre el tema y, aunque ha leído la memoria de Euler de 1749, sigue convencido de que este problema todavía no ha sido resuelto enteramente. En efecto, definiendo el logaritmo mediante dos progresiones, como Napier, D'Alembert sostiene que los logaritmos de los números negativos no son imaginarios o, mejor dicho, que pueden ser reales o imaginarios, según la elección del sistema de logaritmos. Apoyando las ideas de Bernoulli, emplea argumentos de naturaleza metafísica y geométrica para demostrar que las conclusiones de Euler no son necesariamente ciertas. En particular, no duda en cambiar varias veces la base de los logaritmos, y tan pronto se sirve de una base negativa como utiliza en el mismo sistema las bases -1 y $1/a$, y demuestra que $\log(-1) = 0$ y que, en general, $\log a^n = \log(-a^n)$. En la *Enciclopedia,* D'Alembert se sitúa más del lado de Bernoulli que del de Euler cuando expone sus ideas sobre los logaritmos de los números negativos o imaginarios.

Ya en 1746, D'Alembert había intentado demostrar el teorema enunciado antes por Girard que establece que toda ecuación polinómica $f(x) = 0$, con coeficientes complejos y de grado $n \geqslant 1$, posee al menos una raíz imaginaria. A pesar de un serio esfuerzo consagrado a ella, esta demostración, que se encuentra en su ensayo sobre la *Teoría general de los vientos,* publicado en las Memorias de la Academia de Berlín, resulta incompleta, aunque le permitiera asociarle su nombre.

D'Alembert presenta sus aclaraciones sobre el cálculo infinitesimal en algunas memorias filosóficas y en artículos escritos para la *Enciclopedia.* Para él, sin negar la existencia del infinito actual, la geometría no supone, al menos necesariamente, su existencia real. El infinito de las matemáticas, dice, no es más que «el límite de las cantidades finitas» en el sentido de que puede ser igual a un número tan grande como se quiera. Así, para él, la idea de número infinito no es más que una idea abstracta que expresa solamente un límite de naturaleza intelectual, al cual todo número finito no llega nunca. D'Alembert habla de infinitos de segundo y tercer orden en términos de líneas infinitas que recurren al concepto de función. Por ejemplo, si una línea llega a ser infinita, otra línea que dependa de ella es infinita de segundo orden, lo que significa, según dice, que «la razón de la segunda línea a la primera (suponiendo que las dos sean finitas) es tanto mayor cuanto mayor es la primera» y esta razón puede suponerse mayor que cualquier número finito. Para

definir las cantidades infinitamente pequeñas procede de la misma manera, lo que le conduce a rechazar las cantidades evanescentes de Newton y el concepto mismo de diferencial.

El cálculo diferencial consiste, según él, en encontrar el límite de la razón entre la diferencia finita de dos cantidades y la diferencia finita de otras dos cantidades. La razón será exactamente igual al límite en el momento en que estas diferencias sean nulas, pues entonces la razón desaparece y es reemplazada por un valor, el del límite. Refiriéndose, entre otros, a los trabajos de Leibniz, Newton y Euler, denuncia su concepción de las cantidades infinitesimales en estos términos: «Una cantidad es algo o nada; si es algo, no se ha anulado todavía; si ya es nada, ya está anulada. La suposición de un estado intermedio entre estos dos es una quimera.»

En el cálculo diferencial, no hay pues necesariamente cantidades infinitamente pequeñas, sino más bien límites de razones de dos cantidades finitas. ¿Qué representa ddy/dx^2? D'Alembert responde que es «el límite de la razón de ddy/dx dividido por dx; o, más claramente, es el límite de dz/dx, donde $dy/dx = z$ es una cantidad finita». De la misma manera, para la búsqueda de un máximo o un mínimo, D'Alembert iguala a infinito la cantidad dy/dx y demuestra que dy no es igual a infinito puesto que es un infinitésimo. Se trata, según D'Alembert, de encontrar el valor de x que hace infinito el límite de la razón de la cantidad finita dy a la cantidad finita dx. La formulación del concepto de límite en D'Alembert adoleció de una fraseología insuficientemente definida y a veces demasiado vaga para que fuera aceptable por sus contemporáneos. Los autores de tratados sobre el tema en el último tercio del siglo XVIII perpetuaron las ideas de Leibniz y Euler en lugar de los puntos de vista, más justos y rigurosos, de D'Alembert. D'Alembert propone la derivada como un límite, y su definición de límite en términos de una variable que se aproxima a una cantidad fija tanto como cualquier cantidad dada no engloba el paso al límite, pero representa probablemente la mejor definición del límite en esta época.

Aunque D'Alembert no habla de números complejos en sus artículos de la *Enciclopedia,* estudia la expresión $(a + bi)^{p+qi}$ donde considera en una ocasión la base $(a + bi)$ como una variable y procede a la diferenciación de esta función en su memoria de 1747 sobre la causa general de los vientos. Además, cree en la posibilidad de establecer un cálculo con variables complejas según una combi-

nación similar a la de variables reales, de forma que la expresión

$$f(x + iy)d(x + iy)$$

se exprese siempre bajo la forma $dp + idq$ donde dp y dq son reales e idq, una parte imaginaria. En particular, en un ensayo sobre la resistencia de los fluidos, publicado en 1752, llega, a partir del movimiento de un cuerpo en un fluido homogéneo ideal, a las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

donde dv y du son las diferenciales de la forma

$$dv = Mdx + Ndy, \; du = Ndx - Mdy$$

y consigue determinar en algunos casos los valores de v y u, además de demostrar que v y u son las partes real e imaginaria de una función compleja $f(x + iy) = u + iv$.

D'Alembert se interesó también por la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones, pero parece que sus ideas, expresadas en su artículo *Cara o cruz,* publicado en 1754 en la *Enciclopedia,* y en particular las que se refieren a la paradoja de San Petersburgo, resultaron poco significativas para establecer las bases de esta nueva ciencia. Los otros trabajos de D'Alembert, aparte de su obra literaria y filosófica, están consagrados casi todos a la mecánica celeste.

Otro matemático francés se destaca en el campo de las matemáticas en la misma época. Se trata de Clairaut.

CLAIRAUT

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) nació en París el 13 de mayo de 1713, segundo de los veintiún hijos de Jean-Baptiste, maestro de matemáticas de París y miembro correspondiente de la Academia de Berlín. A los doce años, Clairaut compone una memoria sobre cuatro curvas de cuarto grado, que presenta a la Academia, y después de haberse asegurado de que el joven Clairaut es efectivamente el verdadero autor de la memoria, los académicos le hacen grandes elogios. En 1729 termina una memoria célebre sobre las

curvas, que no será publicada hasta 1731, con el título de *Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura.* Es elegido miembro de la Academia de Ciencias el 14 de julio de 1731, cuando sólo tiene dieciocho años, gracias a una excepción al reglamento, que exige al menos dos años más. Se dice que fue un académico muy asiduo y fecundo.

Algo más tarde, a propósito de la figura de la Tierra, estudia las geodésicas de las superficies de revolución, y después da la solución de algunos problemas de máximos y mínimos. En su memoria de 1740, titulada *Sobre la integración o la construcción de las ecuaciones diferenciales de primer orden,* introduce, independientemente de Euler, el empleo del factor integrante. En 1743 aparece su importante tratado *Teoría de la figura de la Tierra.*

Mientras tanto, Clairaut hace gala de un gran talento didáctico componiendo una obra para principiantes titulada *Elementos de geometría,* publicada en 1741, y reeditada varias veces. Después, en 1746, publica otra obra, *Elementos de álgebra,* que consagra definitivamente sus cualidades de autor-pedagogo y que tuvo una influencia considerable en la enseñanza francesa. Abandonando el uso de las demostraciones geométricas, en estos manuales recurre sobre todo a la intuición y, por la manera en que excita la curiosidad natural del lector, éste se ve conducido a descubrir y explorar por sí mismo el campo de la ciencia elemental. Desgraciadamente parece que, según el abate Bossut, una afición excesiva por los placeres del mundo y la compañía de las mujeres, junto con su trabajo cotidiano, le hizo perder el reposo y la salud, y murió a los cincuenta y dos años, el 17 de mayo de 1765.

Conocido en la historia como «el menor de los Clairaut», su hermano menor, cuyo nombre desconocemos, publicó en 1731 a los quince años un libro sobre cálculo titulado *Tratado de cuadraturas circulares e hiperbólicas.* En opinión de Montucla, el menor de los Clairaut poseía todo el talento necesario para seguir las huellas de su hermano, pero este genio precoz murió prematuramente de viruela en 1732.

En su tratado de 1731, Alexis Clairaut desarrolló las ideas que Descartes había sugerido en el estudio de las curvas del espacio mediante la consideración de las dos proyecciones sobre los planos coordenados. Henri Pitot (1695-1771), bien conocido como ingeniero hidráulico y como el célebre constructor del acueducto de Payrou

a Montpellier, había dado su nombre a estas curvas. Siguiendo los pasos de Pitot, Clairaut las llamó curvas de doble curvatura, porque la curvatura de estas curvas está determinada por la de dos curvas que se obtienen por proyección de la curva original en dos planos perpendiculares. Determinó así numerosas curvas del espacio mediante intersecciones de superficies variadas, dio las ecuaciones de algunas superficies y demostró que dos de estas ecuaciones son necesarias para describir una curva en el espacio. Se encuentran también en este tratado las fórmulas de la distancia para dos y tres dimensiones, ecuaciones de superficies cuádricas, y las tangentes de curvas del espacio. Clairaut demostró también que una ecuación homogénea en x, y y z (todos los términos del mismo grado) representa un cono cuyo vértice está situado en el origen.

Newton determinó de manera teórica que el radio ecuatorial de la tierra era 1/230 más largo que el radio polar. Un método consistía en medir la longitud de un arco de 1° de latitud cerca del ecuador y cerca del polo. Jacques Cassini (1677-1756), acompañado por miembros de su familia, efectuó una medición en 1720 y su resultado reveló que el diámetro que unía los dos polos era 1/95 más largo que el diámetro ecuatorial, lo que contradecía el resultado teórico de Newton. La Academia de Ciencias organizó dos expediciones hacia 1730, una a Laponia (1736-1737) bajo la dirección de Maupertuis, y la otra a Perú (1735-1744). Clairaut acompañó a Maupertuis a Laponia y las mediciones efectuadas en las dos expediciones confirmaron que la Tierra estaba achatada en los polos. Ya no cabía duda, la teoría de Newton había triunfado y el debate entre newtonianos y cassinianos quedaba zanjado. Sin embargo, la cuestión de la forma de la Tierra seguía abierta a especulaciones, y la respuesta definitiva no se conocería hata el siglo XX.

A la vuelta de la expedición a Laponia, Clairaut escribió su célebre *Teoría de la figura de la Tierra* (1743), y en 1752 publicó su *Teoría de la Luna.* En estas dos obras, aplica las matemáticas al problema de la atracción gravitacional y a la configuración de la Tierra, lo que le coloca en los orígenes de la teoría del potencial.

Por lo que respecta a las ecuaciones diferenciales, Clairaut se interesó en 1734 por una ecuación que lleva su nombre:

$$y = xy' + f(y').$$

Si se hace $p = y'$, entonces

$$y = xp + f(p)$$

y, diferenciando con respecto a x, Clairaut obtiene

$$p = p + (x + f'(p))\frac{dp}{dx},$$

ecuación de primer orden que puede resolverse así:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad x + f'(p) = 0.$$

La ecuación $\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0$ conduce a $y' = C$, y de la ecuación original obtenemos $y = Cx + f(C)$, solución general que representa una familia de líneas rectas. La ecuación de Clairaut posee también una solución singular, siendo una de las primeras veces en la historia que este tipo de solución se pone de relieve. La ecuación $x + f'(p) = 0$, asociada a la ecuación original, permite eliminar p, lo que nos proporciona una nueva solución. Es la solución singular, a propósito de la cual Clairaut indica claramente que no está comprendida en la solución general.

Clairaut se interesó igualmente por las ecuaciones en derivadas parciales en sus trabajos sobre la figura de la Tierra y encontró, en particular, la ecuación diferencial total $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ donde P, Q y R son funciones de x, y y z. Si el primer miembro es una diferencial exacta, se sabe que existe una función $v(x, y, z) = C$, tal que $dv = Pdx + Qdy + Rdz$. Clairaut pone de manifiesto que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

y muestra cómo resolver la ecuación diferencial total. Si, por el contrario, la expresión $Pdx + Qdy + Rdz$ no es una diferencial exacta, Clairaut demuestra también que el empleo de un factor integrante $g(x, y, z)$ transforma esta expresión de manera que $g(x, y, z)\,[Pdx + Qdy + Rdz]$ es una diferencial exacta.

Los otros trabajos de Clairaut tocan también otros campos, como la teoría de superficies, el cálculo de varias variables y las series trigonométricas, en el que enuncia que toda función puede ser expresada bajo la forma

$$f(x) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$$

y llega a demostrar, por interpolación, que

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nxdx$$

donde A_n es el coeficiente n-ésimo del desarrollo de Fourier de la función f.

Entre los otros matemáticos de esta época, dominada por Euler y los matemáticos Daniel Bernoulli, D'Alembert y Clairaut, podemos mencionar también algunos matemáticos que se señalaron particularmente en temas muy específicos.

GOLDBACH

Christian Goldbach (1690-1764) mantuvo correspondencia con Euler, y su nombre se hizo célebre por la conjetura que formuló en 1742: «Todo entero par es la suma de dos números primos». Enviado a Rusia por el gobierno prusiano, enunció esta conjetura sin demostrarla, así como un corolario de la misma: todo entero impar es, o bien un número primo, o una suma de tres números primos. La conjetura de Goldbach sigue siendo todavía un problema sin resolver. Goldbach se interesó también por la teoría de ecuaciones, las series infinitas y las integrales elípticas. La conjetura de Goldbach fue publicada por primera vez en Inglaterra en 1770 en las *Meditationes algebraicae* de Waring.

WARING

Edward Waring (1734-1793), profesor lucasiano de matemáticas en Cambridge a partir de 1760, se ocupó del problema de la convergencia de las series infinitas y de la descomposición de los números. En el tema de la serie

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots,$$

considera que converge para $n > 1$ y diverge para $n < 1$. Enunció también el «criterio del cociente», atribuido a Cauchy: si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

es menor que uno, la serie converge, si es mayor que uno, diverge, y si el límite es igual a uno, no se puede concluir nada respecto de la convergencia.

Además de la conjetura de Goldbach enunciada sin demostración, Waring presenta en sus *Meditationes* diversos resultados importantes. Se encuentran allí, entre otras cosas, el «teorema de Waring» —todo entero es, o bien un cubo , o bien la suma de, como mucho, nueve cubos— y el enunciado de que «todo entero es, o bien una potencia cuarta o la suma de, como mucho, diecinueve potencias cuartas». El teorema de Waring no sería demostrado hasta principios del siglo XX. Se encuentra también en esta obra un teorema que recibió el nombre de su alumno y amigo John Wilson (1741-1793), estudiante de matemáticas brillante, aunque se dedicó a la magistratura. Wilson enuncia, sin demostración, el teorema siguiente: «Para cada número primo p, si $(p-1)!+1$ es divisible por q, q es un número primo». Lagrange ofrecerá una demostración de este teorema en 1773.

LAMBERT

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) adquirió celebridad gracias a sus trabajos sobre las fracciones continuas y a su tentativa de demostrar el postulado de las paralelas. De una habilidad excepcional, se interesó por muchas cosas diferentes: cosmografía, cartas geográficas, lógica, geometría descriptiva, filosofía de las matemáticas, etc., y, convencido de que podía dominar toda la ciencia, sus esfuerzos dispersos le impidieron contribuir más ampliamente en el campo de las matemáticas.

Lambert utilizó los trabajos de Euler sobre las fracciones continuas para demostrar que «si x es un número racional diferente de cero, entonces e^x y tg x no pueden ser racionales». Demostró también que no sólo e^x es irracional para x entero positivo, sino que todos los números racionales tienen logaritmos en base e irracionales. En 1761 presentó en la Academia de Berlín la prueba de que «π es un número irracional» que se deduce de la irracionalidad de tg x. En efecto, como tg $\pi/4 = 1$, un número racional, se deduce que $\pi/4$ no puede serlo y por tanto tampoco π. Lambert demostró también que el desarrollo de tg x en fracciones continuas es convergente.

Hacia 1757, Vincenzo Riccati (1707-1775), hijo de Giacomo, quien introdujo la ecuación de Riccati, sugirió el desarrollo de las funciones hiperbólicas a partir de la relación observada entre el área encerrada bajo la circunferencia de radio *a*, dada por $\int\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ y el área encerrada bajo la hipérbola de parámetro *a*, dada por $\int\sqrt{x^2 - a^2}\, dx$. Esta relación conducía a desarrollar una idea que relacionaba las funciones trigonométricas y logarítmicas mediante los números complejos. Lambert emprendió un estudio completo de estas funciones hiperbólicas, y fue quien introdujo las notaciones modernas de sh x, ch x y th x, además de promover estas nuevas funciones.

Lambert es también conocido por haber intentado demostrar el postulado de las paralelas. Según Bonola, los trabajos de Saccheri influyeron en Lambert, quien emprendió un estudio sobre este postulado. En efecto, en la *Theorie der Parallellinien* de Klügel, Lambert cita pasajes relativos a los trabajos de Saccheri y ciertas partes de su estudio recuerdan claramente al del célebre jesuita italiano. En 1766, Lambert redacta *Die Theorie der Parallellinien*, que no será publicada hasta después de su muerte en 1786.

Su estudio comienza con un cuadrilátero que tiene tres ángulos rectos (el cuadrilátero de Saccheri no posee más que dos) y aplica al cuarto ángulo las hipótesis del ángulo recto, obtuso y agudo. Las tres hipótesis son estudiadas minuciosamente, a la manera de Saccheri, y Lambert llega a las mismas conclusiones que su predecesor. Sin embargo, apunta ideas y observaciones muy sugestivas: la primera tiene que ver con la existencia de una «geometría plana», basada en la validez de la segunda hipótesis, la cual presenta semejanzas con la geometría esférica; una observación que estipula que la geometría esférica es independiente del postulado de las paralelas; por último, una tercera idea a propósito de la tercera hipótesis consiste en concluir que esta tercera hipótesis debería tener lugar en el caso de una esfera imaginaria (superficie real que será estudiada en el siglo XIX con el nombre de seudoesfera).

BUFFON

George-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1788), se hizo célebre por su monumental obra titulada *Historia natural*, pero manifestó

también un interés real por las matemáticas. Sus contribuciones en este campo se refieren sobre todo a una traducción de las *Fluxiones* de Newton, a un *Ensayo de aritmética moral* y a la probabilidad geométrica.

Su primera contribución matemática fue una traducción de la versión inglesa de Colson de el *Método de fluxiones* de Newton. En un largo prefacio, expresa su entusiasmo por el gran maestro Newton y reconoce que Leibniz es un gran matemático; después presenta sus ideas personales sobre el concepto de límite, en las cuales parece haber confusión entre el infinito cardinal y el infinito ordinal.

La obra matemática más importante de Buffon es su *Ensayo de aritmética moral,* publicada en 1777 en el cuarto volumen del *Suplemento a la historia natural,* que fue compuesto al parecer en 1760. Distingue, al comienzo de su *Ensayo* entre la certeza física, basada en una larga sucesión ininterrumpida de éxitos, y la certeza moral, que descansa esencialmente en un número restringido de casos similares; más tarde muestra que el valor aritmético del dinero es diferente de su valor moral, el cual depende del estado de la fortuna del que desea obtener el dinero. Por ejemplo, el valor moral de diez coronas es muy diferente para el que posee sólo cinco o para la persona muy acaudalada. Aplica a continuación este principio a los juegos de azar para demostrar que, en general, el juego «es un pacto mal entendido, un contrato desventajoso para ambas partes, cuyo efecto es hacer que la pérdida sea siempre mayor que la ganancia...». Discute largamente la paradoja de San Petersburgo, que le había sido propuesta por Cramer en 1730, y prsenta diversas razones que hacen imposible dicha paradoja. A propósito de esta paradoja, recordemos que hizo jugar a cara o cruz a un niño, y después de haber lanzado la moneda 2 084 veces, el resultado obtenido reveló que la media para cada parte era igual a 5.

Después de mencionar que sólo ha utilizado la aritmética para estimar las probabilidades, se propone demostrar, mediante ejemplos, que también la geometría puede servir como instrumento en la teoría de probabilidades. Se ocupa de las probabilidades geométricas simples, y después presenta ejemplos más complicados que requieren el empleo del cálculo integral. Buffon presenta, a continuación, su célebre «problema de la aguja»: un plano está reglado con líneas paralelas que equidistan una longitud *d.* Una aguja de

longitud $l < d$ es lanzada al azar sobre el plano. ¿Cuál es la probabilidad de que ésta atraviese una de las líneas? Su respuesta es correcta: $2l/\pi d$.

Su *Ensayo* incluye también discusiones sobre las bases de los sistemas aritméticos (recomienda el uso de la base duodecimal), las unidades de longitud y la cuadratura del círculo, así como una colección de tablas que contienen los nacimientos, matrimonios y defunciones ocurridos en París de 1709 a 1766.

BIBLIOGRAFÍA

Barbeau, E. J., «Euler's 1760 paper on divergent series», *Historia Mathematica,* 3, 1976, pp. 141-160.

Bell, Eric T., *Men of mathematics,* Nueva York. Simon and Schuster, 1965, pp. 139-152.

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean geometry,* Nueva York, Dover, 1955, pp. 44-51.

Boyer, Carl B., «Clairaut and the origin of the distance formula», *The American Mathematical Monthly,* 55, 1948, pp. 556-557.

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley & Sons, 1968, pp. 481-509.

Boyer, Carl B., *The history of the calculus and its conceptual development,* Nueva York, Dover, 1959, pp. 243-254.

Boyer, Carl B., *History of analytic geometry,* Nueva York, *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 164-170.

Boyer, Carl B., «Clairaut le cadet and the theorem of Thabît Ibn Qurra», *Isis,* 55, 1964, pp. 68-70.

Brunet, P., «La vie et l'oeuvre de Clairaut», *Revue d'Histoire des Sciences et leurs Applications,* 4, 1951, pp. 13-40, 109-153; 5, 1952, pp. 334-349; 6, 1953, pp. 1-17.

Cajori, Florian, «History of the exponential and logarithmic concepts», *The American Mathematical Monthly,* 20, 1913, pp. 5-14, 35-47, 75-84, 107-117, 148-151, 173-182, 205-210.

Coolidge, Julian L., «The beginnings of analytic geometry in three dimensions», *The American Mathematical Monthly,* 55, 1948, pp. 76-86.

Coolidge, Julian L., «The origin of polar coordinates», *The American Mathematical Monthly,* 59, 1952, pp. 78-85.

Coolidge Julian L., *A history of the conic sections and quadric surfaces,* Nueva York, Dover, 1968, pp. 79-81.
Coolidge, Julian L., *The mathematics of great amateurs,* Nueva York, Dover, 1963, pp. 171-177.
Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 594-601.
Dedron, Pierre e Itard, Jean, *Mathématiques et mathématiciens,* París, Magnard, 1959, pp. 246-257.
Eves, Howard, *An introduction to the history of mathematics,* Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1964, pp. 357-362.
Fitzpatrick, Sister M., «Saccheri, forerunner of non-Euclidean geometry», *The Mathematics Teacher,* 57, 1964, pp. 323-332.
Fleckenstein, J. O., «L'état actuel de l'édition des oeuvres d'Euler», *XI[e] Congrès International d'Histoire des Sciences,* Varsovia, 1965.
Glaisher, J. W. L., «On the history of Euler's constant», *Messengers of Mathematics,* 1, 1871, pp. 25-30.
Gridgeman, N. T., «Geometric probability and the number π», *Scripta Mathematica,* 25, 1960, pp. 183-195.
Grimsley, Ronald, *Jean d'Alembert (1717-83),* Oxford, Clarendon, 1963.
Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 400-420, 422-424, 426, 429-430, 446-460, 462-466, 476-477, 479-482, 484-486, 488-489, 503-510, 523-525, 531-532, 545-546, 548-560, 562-565, 577-579, 594-600, 608-612, 614-628.
Langer, R. E., «The life of Leonard Euler», *Scripta Mathematica,* 3, 1935, pp. 61-66, 131-138.
Müürsepp, P., «D'Alembert's letter to Euler of 3 March 1766», *Historia Mathematica,* 2, 1975, pp. 309-311.
National Council of Teachers of Mathematics (The), *Historical Topics for the Mathematics Classroom,* 31st. Yearbook, Washington, D.C., N.C.T.M., 1969, pp. 148-155, 267-271, 427-429, 432-433, 439-442, 446-448.
Petrova, S. S., «Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre», *Historia Mathematica,* 1, 1974, pp. 255-261.
Simonov, N. I., «Sur les recherches d'Euler dans le domaine des équations différentielles», *Revue d'Histoire des Sciences et leur Applications,* 21, 1968, pp. 131-156.
Smith, David E., *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vols. I y II, 1959, pp. 91-98, 638-643.
Struik, Dirk J., *A source book in mathematics 1200-1800,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969, pp. 31-48, 99-102, 180-187, 341-391, 399-406.

Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. II, *La science moderne,* París, P.U.F., 1969, pp. 454-461, 465-468, 470-471, 473, 476-478. [*Historia general de la ciencia,* vol. II, *La ciencia moderna,* Barcelona, Destino, 1972].
Todhunter, Isaac, *A history of the mathematical theory of probability,* Nueva York, G. E. Stechert and Co., 1931, pp. 239-294.
Turnbull, H. W., *The great mathematicians,* Londres, Methuen, University Paperbacks, 1962, pp. 108-113.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál fue el papel de las academias en la vida profesional de Euler?
2. ¿Qué ramas de las matemáticas fueron las más activas en la época de Euler? Precisar la respuesta mediante ejemplos.
3. Describir las contribuciones importantes de Euler a las notaciones matemáticas.
4. Las ideas de Euler a propósito del concepto de función evolucionaron en el curso de su vida. Precisar esta evolución mediante ejemplos adecuados.
5. Precisar las concepciones de Euler sobre los fundamentos del cálculo.
6. Euler fundó la teoría de las funciones de los logaritmos de los números negativos e imaginarios. ¿Por qué se le puede atribuir esta contribución?
7. Demostrar las tres identidades de Euler:

$$\text{sen}\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\ \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\ e^{ix} = \cos x + i\, \text{sen}\, x.$$

8. Encontrar el $ln(1 + i)$ mediante las identidades de Euler y dar el resultado en la forma $a + bi$.
9. Escribir sen $(1 + i)$ en términos de un número complejo de la forma $a + bi$.
10. Transformar e^{c+di} en un número complejo de la forma $a + bi$.
11. Si $\varphi(60) = 16$ y $a = 23$, donde $\varphi(m)$ es el número de los enteros inferiores a m y primos con m, demostrar que $23^{16} - 1$ es divisible por 60.
12. Demostrar que la ecuación diferencial de Riccati

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

puede transformarse en una ecuación diferencial lineal en u, si $v = f(x)$ es una solución particular e $y = v + \frac{1}{u}$.

13. Verificar las identidades siguientes:
    a) $\cosh^2 u - \text{sen h}^2 u = 1$
    b) $\text{senh } iu = i \text{ sen } u$.
    c) $\cosh iu = \cos u$.

6. LAS MATEMATICAS EN LA EPOCA DE LA REVOLUCION FRANCESA

INTRODUCCIÓN

En la época de la Revolución francesa, los matemáticos franceses dominan completamente la historia de las matemáticas. El año 1789 marca una etapa crucial en el desarrollo sociopolítico del pueblo francés, y los matemáticos de la Francia de esta época no sólo enriquecen el campo de las matemáticas, sino que son también responsables, en gran parte, de las principales líneas de fuerza que acarrearán una proliferación explosiva de las matemáticas en el siglo XIX. De los seis matemáticos franceses más ilustres: Lagrange, Laplace, Monge, Condorcet, Carnot y Legendre, tres de ellos, los tres L, no toman parte activa, en el momento de la caída de la Bastilla, en los acontecimientos políticos que transformarán completamente a Francia. Todos estos matemáticos, salvo Condorcet, que se envenenó en 1794, recibieron honores: Monge, Lagrange y Carnot fueron hechos condes del Imperio, Laplace marqués y Legendre ocupó diversos puestos importantes.

Lagrange se significó en varias ramas de las matemáticas: el cálculo de variaciones, la resolución algebraica de ecuaciones, la teoría de números, la teoría de las funciones analíticas y el cálculo diferencial e integral.

Condorcet fue uno de los pioneros en la aplicación de las matemáticas a las cuestiones sociales, y en particular a la estadística y la probabilidad.

Monge clarificó definitivamente los principios de conjunto que permiten erigir la geometría descriptiva a partir de una simple técnica gráfica, e influyó grandemente en los autores franceses en sus estudios sobre geometría analítica del espacio. Monge se distinguió también por la creación de la geometría diferencial de las

curvas del espacio y por sus contribuciones originales al progreso de la teoría de superficies.

Laplace realizó importantes contribuciones, tanto a los principios y a los métodos del cálculo de probabilidades como a sus aplicaciones. También se hizo célebre gracias a su *Mecánica celeste;* sus contribuciones matemáticas tocan diversas ramas de esta disciplina.

El nombre de Legendre va unido a un gran número de proposiciones muy variadas; destacó sobre todo en teoría de números, aunque sus contribuciones abarcaran un espectro muy amplio en el campo de las matemáticas.

Carnot destacó principalmente en geometría pura, y por su persistencia en querer generalizar teoremas o resultados ya existentes. Monge y Carnot son los verdaderos fundadores de la geometría pura moderna. Carnot dejó su nombre unido a un teorema sobre las transversales.

Finalmente, el agrimensor danés Wessel, publicó a finales de siglo la primera representación satisfactoria de los números complejos.

LAGRANGE

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nació el 25 de enero de 1736 en Turín, capital del reino de Cerdeña, y su partida de bautismo, escrita en italiano, lleva el nombre de Giuseppe Lodovico Lagrangia. Su bisabuelo, capitán de caballería en Francia, parisino de origen, entró al servicio del rey de Cerdeña, Manuel II. Su padre, Giuseppe Francesco Lodovico, era tesorero de los ejércitos sardos, pero especulaciones desafortunadas provocaron la ruina de su familia, de once hijos, de los que sólo dos sobrevivieron a la infancia. El benjamín de la familia, Joseph Louis, cursa sus primeros estudios en Turín; después, la lectura fortuita de una memoria sobre álgebra del astrónomo Halley le orienta hacia las matemáticas, y entra luego en contacto con los trabajos de Newton, Leibniz, Euler y los Bernoulli gracias al estudio de la *Instituzione* de María Gaetana Agnesi. Con sólo dieciocho años, se muestra dispuesto a volar con sus propias alas y comienza una correspondencia matemática con Fagnano y

Euler. En 1755, enseña en la Escuela de Artillería de Turín y, en esa misma época, redacta sus primeras memorias.

En las *Investigaciones sobre la naturaleza y propagación del sonido,* da la razón a Euler en contra de su amigo D'Alembert por lo que respecta a la solución del problema de las cuerdas vibrantes. Una segunda memoria, que se presenta primero en forma de cartas a Euler, trata del problema de los isoperímetros y comprende la primera exposición del cálculo de variaciones mediante un nuevo método que causa la admiración del gran analista de Basilea. Esta admiración de Euler por los trabajos del joven Lagrange le hace moverse hasta que consigue que sea admitido como miembro extranjero en la Academia de Berlín en 1756, después de presentar en la Academia el *Ensayo de un nuevo método para determinar los máximos y mínimos de las integrales definidas* de su joven protegido.

En 1758, Lagrange funda, en colaboración con científicos de Turín y alumnos suyos, una sociedad que más tarde se convertirá en la Academia de Ciencias de Turín. En el boletín publicado por esta nueva sociedad científica se encuentran los principales trabajos de Lagrange y en particular los cinco volúmenes conocidos generalmente bajo el título de *Miscellanea Taurinensia.* Laureado por la Academia de Ciencias de París en 1764 y 1766 por sus investigaciones sobre la libración de la Luna y las desigualdades de los satélites de Júpiter, Lagrange acepta acompañar a la marquesa de Caraccioli, embajadora del rey de Nápoles en el reino de Inglaterra, que viaja a Londres vía París. Lagrange conoce en París a los matemáticos D'Alembert, Fontaine, Clairaut, Condorcet y otros, y se hace amigo del enciclopedista D'Alembert. Una enfermedad le impide proseguir su viaje y, después de haberse recuperado, decide volver a casa, pasando por Ginebra, y llega a Turín en el mes de mayo de 1764. Aislado en su ciudad natal y deseoso de obtener un puesto de profesor de matemáticas menos molesto que el de la Escuela militar, por invitación de Federico II acepta ocupar el puesto que dejara vacante Euler en la Academia de Berlín. Gracias a las recomendaciones conjuntas de Euler y D'Alembert, Lagrange obtiene ese puesto y parte hacia París el 21 de agosto de 1766. En París, se reúne de nuevo con D'Alembert y, después de una estancia de varias semanas, viaja a Londres para visitar a la marquesa de Caraccioli y llega finalmente a Berlín a principios del mes de noviembre de 1766.

Lagrange reside en Berlín desde 1766 hasta 1787 al servicio del

que le había invitado en estos términos: «El más grande rey de Europa debía tener en su corte al más grande matemático». Lagrange lleva en Berlín una vida ordenada en la que cada día se desarrolla según un horario rigurosamente establecido que le permite repartir sus actividades, para evitar así el exceso de trabajo y sacar partido al máximo de las horas más aprovechables para sus trabajos científicos. Lagrange da siempre muestras de una gran dulzura de carácter y una amabilidad desconcertante; enemigo de las peleas y las intrigas de palacio, es modesto y desapasionado. Si se casa con una pariente a su llegada a Berlín, es porque todos sus compañeros están casados, aunque ello le deje indiferente.

Durante su estancia en Berlín, Lagrange redactará cerca de ciento cincuenta memorias consagradas a las matemáticas y a la mecánica. Sus memorias, todas escritas en francés, muestran un cuidado extremo por la perfección de forma y pensamiento, y no deja de comenzar por una exposición histórica y crítica de los trabajos publicados sobre el tema, para descartar a continuación los detalles superfluos e ir directamente al grano, siguiendo un camino que parece excluir todo esfuerzo, por lo natural que resulta. Muchas de estas memorias versan sobre el álgebra: resolución de ecuaciones, aproximación de raíces mediante fracciones continuas, determinantes, etc., así como sobre la teoría de números. Pero la gran obra de Lagrange durante este período es su *Mecánica analítica,* una obra maestra de matemática pura que presenta la mecánica por medio de un método puramente algebraico, sin la ayuda de ninguna figura. Aunque la *Mecánica analítica* es compuesta en Berlín, será publicada en París en 1788, un año después de haber aceptado la invitación de Luis XVI para entrar en la Academia de Ciencias de París, tras la muerte de Federico II de Prusia. Acogido con honores, alojado en el Louvre, recibe inmediatamente de la Academia, de la que es socio extranjero desde hace ya quince años, el título de pensionista veterano, lo que le asegura la plenitud del derecho de sufragio.

Después de la publicación de su *Mecánica analítica,* Lagrange parece perder el gusto por las matemáticas, y este desinterés puede explicarse en parte por una gran fatiga intelectual y un medio de trabajo muy diferente del que ha conocido en Berlín. Esta crisis de neurastenia se prolonga hasta la Revolución, y de ella saldrá lenta y gradualmente. En efecto, habiendo dejado Alemania para preservar la paz de su espíritu en el clima incierto provocado por la muerte

del rey de Prusia, se encuentra en el núcleo de la Revolución sin haberlo querido y, de grado o por fuerza, debe asegurar su existencia permaneciendo políticamente neutral con objeto de respetar sus propias convicciones. El 14 de julio de 1789, Lagrange está muy asustado por los acontecimientos que se producen, pero afortunadamente la Constituyente le deja los honores que debe a la monarquía. Más adelante, le piden que participe en diversos comités de la república, uno de los cuales está relacionado con la moneda. Mientras tanto, se vuelve a casar con la hija del astrónomo Le Monnier, unión feliz esta vez que contribuye sin duda a devolverle el gusto de vivir.

Desgraciadamente, algunos meses después de su matrimonio, que tiene lugar el 31 de mayo de 1792, la Revolución conocerá sus horas más dramáticas, y Lagrange se salvará por poco de las múltiples conspiraciones que se preparan. En efecto, la primera vez, gracias al químico Guyton de Morveau, una orden del Comité de Salvación Pública le permite librarse del decreto que destierra a los extranjeros, requisándole para proseguir sus trabajos sobre la teoría de proyectiles. Después, en los días del Terror, mientras que varios comisarios del sistema de pesos y medidas son expulsados de la Comisión (Lavoisier será incluso ejecutado después de su expulsión), Lagrange se salva por segunda vez, sin saber muy bien porqué. Después de este desmembramiento de la Comisión temporal, Lagrange piensa seriamente en irse de Francia, pero ante los grandes peligros que ocasionaría esta huida, decide no poner en práctica sus planes.

Como presidente de la Comisión encargada del establecimiento del nuevo sistema de pesos y medidas, se muestra defensor de la integridad del sistema métrico decimal. En 1795, ocupa la presidencia del Instituto nacional, recientemente creado, en el que se integran las antiguas academias. Profesor en la Escuela Normal en el año III, enseña aritmética, álgebra y sus aplicaciones a la geometría. Nombrado profesor de la Escuela Politécnica, sucesora de la Escuela Central de Obras Públicas, saca de sus enseñanzas la materia de diversas obras que serán publicadas durante el Directorio: *Teoría de las funciones analíticas* (1797), *Tratado de la resolución de las ecuaciones numéricas* (1798), *Lecciones sobre el cálculo de las funciones* (1799). Durante el Imperio, consagra sus energías a revisar y ampliar sus trabajos anteriores, y en particular su *Mecánica*

analítica. Napoleón le cubre de honores, haciéndole miembro del Senado conservador, gran oficial de la Legión de Honor, conde del Imperio. Concluye una carrera de sesenta años consagrados a las matemáticas el 10 de abril de 1813, a los setenta y siete años, «no habiendo odiado a nadie ni hecho ningún mal». Se celebran exequias solemnes en su honor y sus restos son depositados en el Panteón.

Su obra menos vasta que la de Euler, casi iguala a la de su padrino y rival en variedad y en importancia. El método analítico gozó de sus preferencias, siendo uno de los que más contribuyeron a introducirlo en la enseñanza. Las memorias y las obras de Lagrange contienen todas resultados originales importantes y presentan métodos que, frecuentemente, renuevan los temas estudiados. Las palabras de su émulo Laplace ilustran las calidades admirables de su obra: «Poseía en el más alto grado ese tacto afortunado que, al permitir discernir en los objetos los principios generales que encierran, constituye el verdadero genio de las ciencias, cuyo fin es el descubrimiento de esos principios; ese tacto, unido a una rara elegancia en la exposición de las teorías más abstractas, caracteriza a Lagrange.»

Los trabajos matemáticos de Lagrange en Turín

Con sólo diecinueve años, Lagrange se interesaba ya por los trabajos de Euler sobre los problemas de extremos, y en particular por los problemas isoperimétricos. Habiendo comprobado que los métodos de Euler en el cálculo de variaciones no tenían toda la simplicidad deseable en un tema de análisis puro, Lagrange arrincona las consideraciones geométrico-analíticas de los Bernoulli y de Euler para sustituirlas por un método puramente analítico y un simbolismo más apropiado. En 1755, describe en una carta dirigida a Euler su método, al que llama «método de variación», pero que Euler denominará «cálculo de variaciones» en 1756.

Su método puede ilustrarse brevemente a partir del problema fundamental de hacer máxima o mínima la integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} Z dx \quad \text{donde} \quad Z = f(x, y, y')$$

e y es la función a determinar. Lagrange realiza innovaciones desde el principio introduciendo una nueva función δ que expresa la variación entera de la curva y entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), en lugar de hacer variar las ordenadas de la curva que se debe optimizar. El incremento ΔA resulta entonces

$$\Delta A = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')\}dx.$$

La función $Z = f(x, y, y')$ puede desárrollarse en serie de Taylor como función de las dos variables (y, y'), lo que proporciona

$$\Delta A = \delta A + \frac{1}{2}\delta^2 A + \frac{1}{3!}\delta^3 A + \dots$$

donde δA representa la integral de los términos de primer grado en δy y $\delta y'$, $\delta^2 A$ representa la integral de los términos de segundo grado, y así sucesivamente. Lagrange llama a δA la primera variación, $\delta^2 A$ la segúnda variación, etc. Después, Lagrange muestra que δA debe ser igual a cero para hacer máxima o mínima la función y'. Además, escribe

$$\delta y' = \frac{d(\delta y)}{dx}$$

y se sirve de ello para escribir la primera variación de la manera siguiente:

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \{f_y \delta y + f_{y'} \frac{d}{dx}(\delta y)\}dx.$$

La integración por partes del segundo término y el hecho de que $\delta y = 0$ en los puntos x_1 y x_2, le permite escribir

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \{f_y \delta y - (\frac{d}{dx} f_{y'})\, \delta y\}dx.$$

Pero δA debe ser nula para cada variación δy, y así Lagrange concluye que el coeficiente de δy debe ser cero, o, lo que es equivalente,

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0,$$

ecuación diferencial en y. Euler reconoce la superioridad de la

demostración de Lagrange y utiliza desde entonces este nuevo método. El célebre matemático de Turín consagró varios estudios posteriores a este nuevo cálculo, que aplicó, en particular, al problema de las superficies mínimas y a la dinámica. Puede encontrarse en su *Mecánica analítica* todo el contenido de sus memorias consagradas al cálculo de variaciones. Vuelve a tomar el principio de mínima acción de Euler y lo expresa bajo una forma concreta, es decir, $\int mvds$ debe ser un mínimo o un máximo para la trayectoria actual de una partícula de masa m y de velocidad v entre dos puntos fijos. Deduce de ello sus célebres ecuaciones del movimiento y su principio de las velocidades virtuales. Añadamos también que Lagrange se interesó asimismo, hacia 1759, por el problema de la cuerda vibrante y participó activamente en la controversia que enfrentó a Euler, D'Alembert y Daniel Bernoulli.

La actividad matemática de Lagrange en Berlín

En el campo de las matemáticas puras, merecen el primer lugar sus trabajos sobre la resolución algebraica de ecuaciones. Sus investigaciones fundamentales en álgebra están contenidas en memorias publicadas por la Academia de Berlín desde 1771 hasta 1773, y son la base de los trabajos de Abel y Galois. Desde 1767, Lagrange utiliza las fracciones continuas para determinar aproximaciones de las raíces irracionales de las ecuaciones y presenta métodos para separar la raíz real de una ecuación algebraica. Pero es su voluminosa memoria de 1772 titulada *Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones,* la que abre un nuevo período en el estudio de la teoría de ecuaciones. Lagrange desea determinar, por medio de un análisis de los métodos de resolución conocidos para las ecuaciones de tercero y cuarto grado, las razones que hacen eficaces esos métodos para resolver tales ecuaciones y los indicios susceptibles de iluminarle en la investigación de métodos eficaces para las ecuaciones de grado superior a cuatro. Su análisis riguroso de los métodos existentes revela que las soluciones de la ecuación original se obtienen en términos de las soluciones de ecuaciones auxiliares, llamadas resolventes. Por ejemplo, partiendo de la ecuación

$$x^3 + mx + n = 0$$

la transformación $x = y - (\frac{m}{3y})$ permite obtener la ecuación auxiliar

$$y^6 + ny^3 - \frac{m^3}{27} = 0.$$

Esta ecuación, llamada resolvente, es cuadrática en y^3 con $s = y^3$, de donde

$$s^2 + ns - \frac{m^3}{27} = 0$$

Se pueden calcular las raíces s_1 y s_2 de esta última ecuación en términos de los coeficientes de la ecuación original. Pero para volver a y partiendo de s, debemos determinar la raíz cúbica o resolver

$$y^3 - s = 0$$

Así, sea v la raíz cúbica particular de la unidad, es decir $v = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; los valores de y son entonces,

$$\sqrt[3]{s_1},\ v\sqrt[3]{s_1},\ v^2\sqrt[3]{s_1},\ \sqrt[3]{s_2},\ v\sqrt[3]{s_2},\ v^2\sqrt[3]{s_2}$$

y las soluciones distintas de la ecuación original son

$$x_1 = \sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2},$$
$$x_2 = v\sqrt[3]{s_1} + v^2\sqrt[3]{s_2},$$
$$x_3 = v^2\sqrt[3]{s_1} + v\sqrt[3]{s_2}.$$

Por tanto estas soluciones se expresan en términos de las raíces s_1 y s_2 de la ecuación resolvente. Más tarde, Lagrange pone de manifiesto el hecho de que se debe tratar de establecer una rclación no de x como función de y, sino de y como función de x, puesto que es la ecuación auxiliar la que permite la resolución de la ecuación original. Es entonces cuando considera la resolución de las ecuaciones en términos de permutaciones de las raíces, reduciendo el problema al estudio de los diferentes valores que pueden tomar combinaciones elegidas de las raíces cuando se las permuta de todas las maneras posibles. Demuestra así que las raíces de las ecuaciones auxiliares son funciones lineales de las raíces buscadas y de las raíces de la unidad. En particular, su método es eficaz para resolver las ecuaciones de grado $n \leqslant 4$, y demuestra que la ecuación de 5.° grado no puede resolverse siguiendo su método, porque su ecuación resolvente es de 6.° grado.

La idea fundamental de Lagrange, consiste en considerar los

valores que toma una función racional cuando se permutan sus variables, conduce directamente a la teoría de las permutaciones o a los grupos de sustitución. En particular, el nombre de Lagrange va unido hoy día a un teorema importante de la teoría de grupos: el orden de un subgrupo (el número de sus elementos) debe ser un divisor del orden del grupo. Señalemos que los trabajos de Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), célebre por la primera exposición lógica de la teoría de los determinantes, presentan semejanzas con los de Lagrange; en una memoria de 1771, Vandermonde afirma que la ecuación binómica $x^n - 1 = 0$ es resolùble mediante radicales cuando n es primo (verificó esta afirmación para $n \leqslant 11$).

Con Euler, Lagrange devuelve su lustre a la teoría de números, dada de lado desde los tiempos de Fermat. En 1766, Lagrange demuestra la existencia de raíces de la ecuación de Pell, $x^2 - Ay^2 = 1$ y en 1768 ofrece una solución completa de la ecuación general de segundo grado en términos de soluciones enteras (enteros solamente). Lagrange se interesa también por la descomposición de los números y en 1770 demuestra el enunciado de Fermat: «Todo entero positivo es la suma de, como mucho, cuatro cuadrados perfectos». Demuestra también el teorema de Wilson, comunicado por Waring, en una memoria de 1773. Una clase particular de problemas en teoría de números se refiere a la representación de los enteros mediante formas binarias u otras formas. Aunque Euler obtuvo ciertos resultados en ese problema, fue Lagrange quien descubrió que si un número es representable por una forma, como por ejemplo

$$N = ax^2 + bxy + cy^2$$

puede ser representable también por otras formas, que se llaman equivalentes, por medio de cambios de variable de la forma

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

Subrayemos también sus memorias sobre la mecánica, la preparación del manuscrito de su *Mecánica analítica,* su solución particulâr (la primera que se dio) del problema de los tres cuerpos, memorias consagradas a la teoría de las probabilidades, la utiliza-

ción completa del método de variación de los parámetros en la solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Las contribuciones matemáticas de Lagrange durante la Revolución

Lagrange consagró la última parte de su vida a la composición de sus grandes tratados. Su *Mecánica analítica,* publicada en 1788, aplica el análisis a la mecánica de los puntos y de los cuerpos rígidos. Los resultados de Euler, D'Alembert y otros matemáticos del siglo XVIII son asimilados y desarrollados a partir de una concepción consistente. Lagrange se sirve del cálculo de variaciones para unificar los diferentes principios de estática y dinámica; en estática, el que sirve de fundamento es el principio de las velocidades virtuales, mientras que el principio de D'Alembert se utiliza en toda la dinámica. Lagrange se verá así conducido a la generalización de las coordenadas y a la ecuación del movimiento en la forma denominada de Lagrange. Su *Mecánica* constituye un triunfo del análisis, y Lagrange puede permitirse escribir en el Prefacio: *«No se encontrarán figuras en esta obra, sólo operaciones algebraicas».*

Sus dos grandes tratados sobre las funciones, *Teoría de las funciones analíticas* y *Lecciones sobre el cálculo de las funciones,* constituyen una tentativa ambiciosa de dotar al cálculo de un fundamento sólido reduciéndolo al álgebra. De hecho, la teoría de funciones de Lagrange, que desarrolla sus ideas presentadas en una memoria publicada en 1772, es una parte del álgebra que se refiere a las derivadas de las funciones. Ya, hacia 1760-1761, en su *Nota sobre la metafísica del cálculo infinitesimal, Miscellanea Taurinensia 2,* Lagrange toma el método algébrico de John Landen (1719-1790), célebre por sus contribuciones a la teoría de las integrales elípticas, y propone utilizar plenamente el desarrollo de las funciones en serie de Taylor.

En su exposición histórica y crítica de los trabajos anteriores sobre el cálculo, Lagrange manifiesta una actitud escéptica con respecto a los infinitamente pequeños, rechaza el concepto de límite formulado por D'Alembert, critica el método de las fluxiones de Newton, y muestra su insatisfacción con las cantidades infinitesimales de Leibniz y Bernoulli. Lagrange quiere sustituir todo lo hecho hasta entonces por un método algebraico simple, que esté exento de

las objeciones que se han reprochado a los otros y cuyo objeto sea proporcionar al cálculo todo el rigor de las demostraciones antiguas. Su método consiste en utilizar el hecho de que toda función f puede expresarse de la manera siguiente:

$$f(x + h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$$

donde los coeficientes «p, q, r, ...» dependen de x pero son independientes de h. Aunque intenta justificar que este desarrollo de las funciones en serie de Taylor es siempre posible, las razones que esgrime no son adecuadas y resultan claramente insuficientes. Sin embargo, partiendo de ese desarrollo, Lagrange obtiene de una manera puramente formal que:

$$p = f'(x), q = \frac{1}{2!}f''(x), r = \frac{1}{3!}f'''(x)$$

de donde deduce que

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots$$

En particular, encuentra p o $f'(x)$ de $f(x)$ despreciando todos los términos del desarrollo, salvo los dos primeros; así $f(x + h) - f(x) = ph$, y dividiendo por h, concluye que

$$p = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

La notación habitual para las derivadas $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$, es la de Lagrange, y el término «derivada» está tomado de su terminología.

Esta concepción original de Lagrange, aunque tenga el mérito de hacer hincapié en el estudio abstracto de la función e introducir un formalismo en la teoría de funciones, no deja de presentar indudables lagunas. En efecto, no toda función es necesariamente desarrollable en serie de Taylor, contrariamente a su suposición; asimismo, Lagrange desdeña para todo fin práctico el problema de la convergencia de la serie. Sin embargo, los trabajos de Lagrange ejercieron una influencia considerable en el desarrollo de la teoría de funciones de una variable real.

Entre sus otros trabajos matemáticos, podemos mencionar su memoria sobre la elaboración de cartas geográficas, que añade

desarrollos importantes a la teoría de la representación conforme; un estudio sistemático de las soluciones singulares y los lazos que las unen a la solución general de las ecuaciones diferenciales; la introducción de la ecuación adjunta en el estudio de las ecuaciones diferenciales de coeficientes variables; una teoría general de las ecuaciones de primer orden no lineales y un método para resolver las ecuaciones diferenciales lineales parciales de primer orden, método que lleva frecuentemente su nombre; el concepto de ecuación característica en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales aparece por primera vez en sus trabajos de forma explícita.

CONDORCET

Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet (1743-1794) nació en Ribemont en 1743 en el seno de una familia que comprendía miembros muy influyentes en la caballería y en el sector eclesiástico. Recibió su formación en una escuela de jesuitas, después en el Colegio de Navarra y, a los dieciocho años, defendió una tesis de análisis matemático ante D'Alembert y Clairaut. Publicó un *Ensayo sobre el cálculo integral* en 1765, en el que trató de poner orden en los diversos métodos y técnicas utilizados para resolver ecuaciones diferenciales. Desgraciadamente, esta idea interesante no le llevó a ninguna parte. En 1767 publicó una memoria sobre el *Problema de los tres cuerpos* y en 1769 sus trabajos científicos le valieron un sillón de académico en París, no se sabe muy bien porqué, ya que sus ideas son generalmente imprecisas, oscuras, a menudo insólitas y a veces inexactas. Secretario perpetuo adjunto en 1773, y después titular de la Academia de Ciencias antes de interesarse por la política y lanzarse en cuerpo y alma al movimiento revolucionario. Inspector general de moneda, colaboró en la *Enciclopedia* y entró en la Academia francesa en 1782.

Filósofo y enciclopedista, Condorcet perteneció desde el principio al círculo de Voltaire y D'Alembert. Aunque llevaba el título de marqués, odiaba apasionadamente la injusticia y combatió las desigualdades del «antiguo régimen» proponiendo reformas. Profundamente convencido de que la humanidad es perfectible y que la

educación constituye el medio apropiado para eliminar el vicio, defendió la gratuidad de la instrucción pública.

Condorcet se hizo célebre en matemáticas como pionero de la aplicación de las matemáticas a las cuestiones sociales y en particular de la aplicación de las probabilidades y la estadística a los problemas sociales: por ejemplo, la determinación de los modos de elección más equitativos y la influencia de la composición de los jurados en las decisiones de la justicia. En 1785, publicó en París un *Ensayo sobre la aplicación del análisis a las probabilidades de las decisiones debidas a la pluralidad de votos,* ensayo que representa el primer intento de construir una matemática política y social, pero la insuficiencia de medios teóricos a su disposición, sus conclusiones en parte equivocadas y la dificultad del lector para percibir claramente la significación de las ideas presentadas impidieron que influyera favorablemente en sus contemporáneos, salvo, quizá, en Laplace.

Mencionemos también, en un campo próximo, la discusión sobre la cuestión médica de la inoculación de la vacuna, problema de una candente actualidad entonces, pues se deseaba luchar eficazmente contra la viruela, que hacía enormes estragos en todo el mundo. Recordemos que D'Alembert y Daniel Bernoulli discrepaban en sus opiniones sobre la necesidad de la inoculación. Condorcet, Voltaire y Bernoulli se manifestaron a favor de este procedimiento, mientras que D'Alembert se opuso ferozmente, al igual que la mayor parte de Francia, que fue el país más refractario a la inoculación y en el que pasó mucho tiempo antes de que ésta se impusiera. Esta discusión de orden matemático permitió, sin embargo, mostrar a la vez el interés y las dificultades de un estudio estadístico de ciertos problemas biológicos y médicos.

Jefe del «partido filosófico» y heredero de los pensadores del siglo XVIII, Condorcet es elegido en 1789 diputado en la Asamblea Legislativa y en la Convención. El sistema de educación se derrumba con la efervescencia de la Revolución, y Condorcet ve en ello la tan esperada ocasión de presentar su plan de organización de la instrucción pública, así como un proyecto de Constitución. Pero la agitación política del momento impide a los diputados ocuparse seriamente del estudio de este plan y, poco después, estos proyectos no se recuerdan. Condorcet esperaba mucho de la Revolución, pero los extremistas se hicieron con el gobierno y, considerado simpatizante de los girondinos moderados, fue acusado en julio de 1793,

pero pudo sustraerse durante dieciocho meses a la búsqueda. En su reclusión forzosa compuso su célebre *Esbozo de un cuadro histórico de los progresos del espíritu humano,* que comporta nueve etapas de evolución de la humanidad, desde la tribalidad hasta la fundación de la República francesa. Después de haber terminado su *Esbozo,* dejó su escondite, fue detenido rápidamente en Clamart y se envenenó al día siguiente en su prisión de Bourg-la-Reine.

Cinco años después de su fin trágico, en 1799, apareció un opúsculo de Condorcet, escrito durante los últimos días de su vida y publicado por su viuda. Titulado *Medios para aprender a contar con seguridad y fidelidad,* es un tratado de aritmética elemental cuyo contenido va acompañado de visiones filosóficas y pedagógicas interesantes.

MONGE

Gaspard Monge (1746-1818) nació el 9 de mayo de 1746 en Beaune, en Côte d'Or, en el seno de una familia muy modesta de tres chicos. Su padre, Jacques Monge, antiguo feriante, se convirtió en un comerciante bastante próspero y muy ambicioso con respecto a sus hijos a los que hizo cursar serios estudios primarios y secundarios en el colegio de los oratorianos de Beaune. Excelente alumno, Gaspard se hizo notar por la gran variedad de sus aptitudes. En julio de 1762 terminó con gran éxito sus estudios de filosofía, física y matemáticas en ese colegio, y sus maestros le otorgaron los más halagadores testimonios de satisfacción. Los oratorianos de Lyon, donde Monge continuó sus estudios, pensaron pronto en atraérselo, y a los dieciséis años le confiaron una cátedra de física en su colegio. En el verano de 1764, Monge decidió recobrar su libertad y dejó definitivamente el colegio de los oratorios de Lyon para volver con su familia a Beaune.

Emprendió entonces, con uno de sus amigos, la elaboración de un plano de su ciudad natal que le valió tal renombre en la región que el coronel Vignau, segundo jefe de la escuela de Mezières, le ofreció el ingreso en su escuela del cuerpo de ingenieros militares donde se podría utilizar su habilidad para el trazado de planos de defensa, de arquitectura y de corte de piedras. Fundada en 1748 por el caballero de Chastillón, la escuela de ingenieros militares de

Mezières había adquirido muy rápidamente una gran reputación en la formación de ingenieros militares, y es fácil de adivinar la alegría con que aceptó Monge esta proposición casi inesperada. Llegado a Mezières, su entusiasmo se enfrió bastante deprisa porque, al no ser noble de nacimiento, tuvo que contentarse con la sección de constructores y aparejadores. Más de una vez estuvo tentado Monge de romper sus dibujos despechado por el caso que se le hacía, pero el azar le permitiría tarde o temprano poner de manifiesto sus dotes excepcionales, aunque no pudiera esperar convertirse en el igual de un oficial de Mezières.

Hacia 1765 ó 1766, Monge fue encargado de resolver un problema de desenfiladas y, gracias a su aptitud absolutamente notable para considerar las cosas del espacio, fue capaz de sentar las primeras bases de una nueva técnica gráfica que pronto se convertiría en la geometría descriptiva. Los oficiales de la escuela debieron reconocer la excelencia de su método y Monge fue escogido por el abate Bossut como profesor auxiliar de matemáticas. En 1769 se convirtió en el titular de la cátedra de matemáticas que había dejado vacante Bossut, y Monge consiguió incluir la geometría descriptiva en la enseñanza regular de la escuela, aunque esta nueva ciencia fue, según parece, uno de los secretos mejor guardados en esta época. Será divulgada por primera vez en 1794 y 1795 en sus lecciones públicas en la Escuela Normal y en la Escuela Politécnica.

En 1772, su actividad matemática cambia netamente de orientación, de manera que las matemáticas ya no ocuparán en su mente el lugar único que ocupaban desde su entrada en Mezières. Ahora se interesa cada vez más por la física, su círculo de amigos se amplía y la afición a los viajes parece desarrollarse rápidamente. Sin embargo, su actividad científica no es menos importante, y las numerosas memorias que publica entre 1772 y 1780 revelan contribuciones importantes a la geometría descriptiva, la geometría diferencial y las ecuaciones en derivadas parciales. Mientras tanto, se casa, en 1777, con Madame Horbon, joven viuda de veinte años, y realiza algunos viajes, en particular a Bélgica e Italia.

Llamado a París en 1780 por Turgot, el 14 de enero de 1780 Monge es elegido geómetra adjunto de la Academia de Ciencias, en sustitución de Vandermonde, promovido a socio. Durante su estancia en París, es encargado de ayudar al abate Bossut en su cátedra de hidrodinámica en el Louvre, y consagra todos sus momentos de ocio a

trabajos de física y química referentes, en particular, al magnetismo, la electricidad, la teoría del calórico y los prometedores trabajos de Lavoisier sobre los principios de base de la química. El 25 de octubre de 1783, el nombramiento de Monge como examinador de los alumnos de la Marina es firmada por el mariscal de Castries, tras la muerte de Etienne Bézout (1730-1783), célebre sobre todo por su curso de matemáticas en numerosas ediciones. En adelante, Monge repartirá su tiempo entre las giras de inspección a los puertos donde hay escuelas de Marina y estancias en París, donde desempeña sus tareas de académico, experimenta con científicos como Lavoisier, Berthollet y Vandermonde y redacta de vez en cuando memorias de matemáticas, física o química. En el verano de 1786, cediendo a las peticiones y presiones del mariscal de Castries, decide escribir un tratado de estática, a partir de un curso completo de matemáticas, destinado a los alumnos de la Marina. Los otros tratados anunciados no fueron escritos nunca, pues Monge estaba mucho más interesado por la investigación y la experimentación que por la redacción de tratados de matemáticas.

Cuando estalla la Revolución francesa, Monge es uno de los sabios franceses más conocidos y posee una formación pedagógica, científica y técnica de una extensión poco común. Partidario entusiasta de la Revolución, aplaude la caída de la Bastilla, se afilia a sociedades patrióticas y se hace miembro del club de los Girondinos. Lejos de París desde 1790 hasta 1792 a causa de sus giras de inspección, Monge no puede apenas participar en los trabajos de las comisiones sobre la reforma de las bases del sistema de medidas. Cuando vuelve a París, en julio de 1792, los numerosos acontecimientos políticos acaecidos durante su ausencia —declaración de guerra a Austria el 20 de abril de 1792, invasión de Francia— conducen a la destitución del rey, y el Consejo ejecutivo provisional le nombra ministro de Marina. Después de sólo unos meses, incapaz de reorganizar una Marina paralizada por múltiples problemas, Monge pide ser sustituido y el 10 de abril de 1793 puede por fin volver a la Academia de Ciencias, adonde no había podido acudir mientras era ministro. Gracias a sus amigos del Comité de Salvación Pública que saben utilizar sus competencias, es el organizador de las fábricas de pólvora y de las fundiciones de cañones, necesarias para la defensa del territorio, y la manera en que lleva a cabo esta tarea abrumadora, le vale el homenaje oficial del Comité. Animador de

los talleres durante el día, encontrará tiempo aún para redactar su *Descripción del arte de fabricar cañones.*

Cuando se alejaron los peligros del exterior, y después de la caída de Robespierre, Monge participó activamente en la creación de la Escuela Normal en la que enseñó por fin públicamente geometría descriptiva. Poco después, Monge desempeñó un papel esencial en todas las fases de la creación de la Escuela Politécnica; fue su profesor más activo y su protector más abnegado. El 24 de mayo de 1796, el Directorio le envió a Italia como miembro de una comisión encargada de recoger «los monumentos del arte y de la ciencia que los tratados de paz otorgaban a los victoriosos ejércitos franceses». El 7 de junio del mismo año, conoció al general en jefe Bonaparte, e inmediatamente se estableció una simpatía recíproca entre los dos hombres. Bonaparte, que preparaba su campaña de Egipto, pidió a Monge con insistencia que aceptara tomar parte en ella, y el 26 de mayo de 1797 Monge se embarcó para participar en la conquista de Egipto. El 10 de agosto de 1798, en Egipto, Bonaparte decidía la creación del Instituto de Egipto, cuya presidencia confió a Monge.

Después de haber seguido a Bonaparte en la expedición infructuosa de Siria, Monge volvió con él a París después de haberse librado milagrosamente de la flota inglesa. Monge se contó desde entonces entre los amigos íntimos de Bonaparte, quien le nombró senador, y después conde de Péluse. Poco después de su vuelta, abandonó la dirección de la Escuela Politécnica, conservando sólo su puesto de enseñanza, y reanudó su actividad científica. Pero el destino del Imperio se precipita e, invariablemente fiel a su amistad profunda por Napoleón, Monge le servirá hasta el final, en la buena como en la mala suerte.

Desesperado por los fracasos de Napoleón, muy afectado por el despido de la Escuela Politécnica, afrentosamente excluido de la lista de los miembros del Instituto el 21 de marzo de 1816, agobiado por la enfermedad y la desesperación de haber visto derrumbarse todo lo que había constituido su vida, Monge murió el 28 de julio de 1818, sin que le fuera rendido ningún homenaje oficial, aunque numerosos amigos y antiguos alumnos asistieran a sus exequias.

Monge tenía un físico poco agraciado, y la primera impresión que causaba era un tanto severa, pero bastaba entrar en contacto más directo con él para darse cuenta que era profundamente bueno

y su amabilidad hacía desaparecer la impresión poco atrayente del principio. Imbuido de una fe un poco ingenua en las cualidades y el futuro del género humano, ávido de cultura y progreso social, Monge estaba más hecho para arrastrar con su ejemplo que para mandar y administrar. Su amor por la juventud y su entusiasmo por la ciencia se unían a sus eminentes cualidades pedagógicas para hacer su enseñanza particularmente viva y eficaz. La obra de Monge fue considerable y fecunda. La creación de la geometría descriptiva, sacando a la luz métodos geométricos que permiten rectificar y coordinar los procedimientos gráficos habituales, constituye una de sus principales contribuciones. Creó las teorías más importantes de la geometría analítica en tres dimensiones, además de haber contribuido de manera original al análisis y a la geometría infinitesimal.

La geometría descriptiva de Monge

La obra de Monge en geometría descriptiva se presenta bajo la forma de una reedición textual, hecha en su ausencia por su alumno Hachette, de las lecciones impartidas por el gran geómetra francés a los alumnos de la Escuela Normal el año III. Publicadas por primera vez en la recopilación de las *Sesiones de las Escuelas Normales,* estas nueve lecciones se encuentran reproducidas en la *Geometría descriptiva* de Monge, editada en 1799. La cuarta edición, de 1820, publicada por su alumno Brisson, contiene además del texto de la edición de 1799 el texto más o menos modificado de otras tres lecciones dadas en la Escuela Normal.

La geometría descriptiva no es una verdadera creación de Monge, ya que se encuentran ejemplos de utilización del método de las proyecciones dobles en Durero y Frézier, y también métodos gráficos en dibujos arquitectónicos realizados anteriormente por simples practicones. La utilización de los métodos de la geometría descriptiva se basa en la comprensión del concepto de proyección ortogonal y el conocimiento íntimo de la relación entre las dos proyecciones ortogonales de una misma figura. Debemos a Monge la clarificación definitiva de los principios de conjunto que permiten construir la geometría descriptiva a partir de una técnica gráfica. Monge supo precisar los principios de esa técnica, desarrollar sus métodos y

sugerir sus fecundas aplicaciones, y por este motivo podemos considerarlo el creador de esta nueva rama de la geometría.

Su obra se compone de un preámbulo y cinco secciones: 1) objeto y principios de la geometría descriptiva, problemas relativos a rectas y planos; 2) estudio de los planos tangentes y de las normales a las superficies; 3) estudio de las intersecciones de superficies; 4) aplicaciones de las intersecciones de superficies a la solución de diversos problemas; 5) estudio de las curvaturas de las curvas del espacio y de las superficies.

Después de haber mostrado en su preámbulo la necesidad de desarrollar la enseñanza científica y técnica, Monge insiste en el valor altamente educativo de la geometría descriptiva y en su gran utilidad para los técnicos. En la primera sección, Monge formula los dos objetivos de esta nueva rama de la manera siguiente:

«Representar en una hoja de dibujo, que no tiene más que dos dimensiones, todos los cuerpos de la naturaleza, que tienen tres, con tal que estos cuerpos puedan sin embargo ser definidos rigurosamente» [y] «reconocer, tras una descripción exacta, la forma de esos cuerpos, y deducir de ella todas las verdades que resultan de su forma y de sus posiciones respectivas».

Después, Monge presenta un estudio de las diferentes maneras de situar un punto del espacio y precisa los principios de base de la geometría descriptiva. Pasa a continuación a la representación de las superficies que supone definidas por dos familias de curvas generatrices, explica la construcción del punto móvil y termina esta primera sección tratando diversos problemas clásicos relativos a las rectas y a los planos.

En la segunda sección se encuentra expuesto lo esencial de los métodos modernos relativos al estudio de los planos tangentes y de las normales a las superficies curvas, mientras que la cuarta sección incluye numerosos problemas de aplicación, tales como la construcción de las esferas circunscritas e inscritas a un tetraedro y el célebre problema topográfico del levantamiento en el caso en el que el terreno no es horizontal.

Si se tienen en cuenta los dos cursos de geometría descriptiva impartidos por Monge el mismo año y sus otras contribuciones en este dominio —teoría de las sombras, teoría de la perspectiva y teoría de las máquinas— su presentación, muy completa, no difiere en ningún punto esencial de nuestras modernas obras de enseñanza.

Los trabajos de Monge en geometría analítica

La geometría analítica de Monge, como la de Lagrange, está centrada principalmente en problemas del espacio. En una memoria de 1771, publicada en 1785 y titulada *Memoria sobre las evolutas, los radios de curvatura y los diferentes géneros de inflexión de las curvas de doble curvatura,* Monge considera un cierto número de problemas preliminares de geometría analítica. El primero consiste en encontrar la ecuación del plano trazado por un punto dado (x_1, y_1, z_1) perpendicularmente a una recta dada por sus dos ecuaciones $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Encuentra la solución de la manera habitual en nuestros días, y escribe que la ecuación del plano buscado que pasa por el punto (x_1, y_1, z_1) puede expresarse como sigue: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$. No le queda más que expresar la ortogonalidad del plano y la recta, lo que se determina mediante las razones de los coeficientes A, B y C a partir de las proporciones $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$, donde las cantidades α, β y γ representan, respectivamente, los determinantes

$$(ab' - a'b),\ (ca' - c'a),\ \text{y}\ (bc' - b'c)$$

y finalmente pone la ecuación buscada en la forma

$$\alpha(z - z_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(x - x_1) = 0.$$

El segundo problema consiste en encontrar las ecuaciones de una recta trazada por un punto dado perpendicularmente a una recta dada. Monge determina la longitud de la perpendicular desde un punto (x', y', z') a una recta dada por medio de la fórmula de la distancia aplicada a dos puntos del espacio y encuentra

$$d = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \Upsilon^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} \lambda &= \alpha y' - \beta z' + \delta \\ \mu &= \beta x' - \gamma y' + \zeta \\ \Upsilon &= \gamma z' - \alpha x' + \xi \end{aligned}$$

Observamos que existe un parentesco innegable entre ciertos pasajes de Lagrange (1773) y estas páginas de Monge, en particular al nivel de la notación y de la ausencia total de diagramas o figuras geométricas. El tercer problema, que pertenece de lleno al campo

del análisis, consiste en encontrar la ecuación del plano normal trazado por un punto a una curva del espacio.

En las *Hojas de análisis aplicado a la geometría*, editadas por primera vez en 1795 (segunda edición en 1801), Monge elabora un esbozo de la geometría analítica del espacio destinado a sus alumnos, que será prolongado por un estudio más general en la célebre memoria de 1802 titulada *Aplicación del álgebra a la geometría*. Esta memoria fue escrita por Monge y Jean-Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) para responder a las exigencias del nuevo programa de los estudiantes de primer año de la Politécnica. Los autores muestran que toda sección plana de una superficie de segundo grado es una curva del mismo grado y que las secciones por planos paralelos son «semejantes y colocadas de forma semejante» y tienen sus centros sobre un diámetro de la superficie. Se encuentra también en ella la teoría del cambio de coordenadas, que introduce la teoría de las superficies de segundo grado y de las curvas. Podemos citar también, entre las contribuciones de Monge a la geometría analítica, el perfeccionamiento del estudio de las cuádricas, la introducción de las coordenadas axiales de la recta y la de la orientación de las áreas triangulares y de los volúmenes tetraédricos (falsamente atribuida a Plücker y a Möbius).

El impulso dado por Monge a los estudios de geometría analítica del espacio condujo a varios autores como Lacroix, Puissant, Lefrançois, Biot, Boucharlat y algunos otros, a difundir muy rápidamente las concepciones modernas de geometría analítica y especialmente los nuevos resultados relativos a la geometría analítica del espacio. En particular, Silvestre François Lacroix (1765-1843), alumno y colega de Monge, desempeñó un papel esencial en la difusión de las nuevas teorías matemáticas, gracias a su gran claridad mental y a su marcado sentido pedagógico. En un pasaje de la Introducción al tomo I del *Tratado del cálculo diferencial e integral*, de 1797, Lacroix enuncia claramente el objetivo de la geometría analítica:

Al descartar deliberadamente todas las construcciones geométricas, he querido que el lector se dé cuenta de que existe una manera de considerar la geometría, que se podría llamar geometría analítica, y que consiste en deducir las propiedades de lo extenso a partir del menor número de principios, por métodos puramente analíticos, como lo ha hecho Lagrange

con su mecánica con respecto a las propiedades del equilibrio y del movimiento.

Es la primera vez que se encuentra la expresión «geometría analítica» para designar esta aplicación del álgebra a la geometría. Observemos que su *Tratado del cálculo* es una puesta al día perfectamente realizada del análisis matemático de finales del siglo XVIII, y en esto constituye una síntesis muy acertada de la obra de los grandes analistas de ese siglo.

Algunos otros trabajos matemáticos de Monge

Entre sus otras contribuciones en el campo de las matemáticas, Monge se destacó igualmente en la creación propiamente dicha de la geometría diferencial de las curvas del espacio y contribuyó activamente al progreso de la teoría de superficies. Por ejemplo, sus aportaciones más importantes en este campo son la unión de las ecuaciones en derivadas parciales con las familias de superficies, un estudio paralelo de las ecuaciones diferenciales totales, su célebre teoría de las características y su solución de la ecuación de las superficies minimales. Puso también claramente de manifiesto la posibilidad de renovar la geometría pura mediante la introducción de nuevos métodos derivados de una concepción más concreta de la geometría en tres dimensiones.

En su obra propiamente científica, se encuentran también trabajos de física y química que merecen un lugar mejor que el que en general se les asigna. En efecto, su concepción muy clara de la estática, su intento de elaborar la primera teoría científica de las máquinas, sus diversas contribuciones a la física, sus cualidades de experimentador y su participación en la creación de la química moderna ilustran bien sus contribuciones científicas. Finalmente, no hay que menospreciar su obra técnica, que se centró principalmente en el estudio y el perfeccionamiento de las técnicas, tanto en el campo de las máquinas como de la metalurgia o industria en general.

LAPLACE

Pierre Simon de Laplace (1749-1827) nació en Beaumont-en-Auge, en Normandía, el 23 de marzo de 1749. Hijo de un labrador, cursó estudios en el colegio benedictino de su pueblo natal, y más tarde entró en la Universidad de Caen a los dieciséis años. Durante su estancia en esta universidad, Laplace demostró su talento en matemáticas y publicó una memoria sobre el cálculo de diferencias finitas en el boletín editado por Lagrange. A los dieciocho años, Laplace se traslada a París y obtiene, gracias a sus méritos, el apoyo de D'Alembert, que le consigue una plaza de profesor de matemáticas en la Escuela real militar. Entonces comienza para Laplace un período de actividad científica prodigiosa: publica ininterrumpidamente un gran número de memorias en las cuales aplica sus habilidades matemáticas a la comprensión de cuestiones relativas a la teoría planetaria. Elegido mecánico adjunto de la Academia de Ciencias en 1773, puede leerse en el informe de una sesión de 1774: «Esta Sociedad que se ha apresurado a recompensar sus trabajos y sus talentos no había visto todavía a nadie tan joven que le presentara en tan poco tiempo tantas memorias importantes, y sobre materias tan diversas y difíciles.»

Laplace prosigue sus trabajos en esta época en dos direcciones principales: la mecánica celeste y el cálculo de probabilidades. En 1784, es nombrado examinador del cuerpo de artillería, en el lugar de Bézout, y en calidad de tal examina al joven Napoleón Bonaparte, abriéndole así la carrera militar. Durante la Revolución, Laplace forma parte primero de la Comisión de Pesos y Medidas, pero es expulsado de ella por el decreto del 3 de Nivoso del año II. Durante el Terror, tras la disolución de las Academias, vive retirado en Melun y allí trabaja con toda tranquilidad en la redacción de su célebre *Exposición del sistema del mundo.*

Una vez pasada la tormenta revolucionaria, una vida nueva comienza para Laplace. Con Lagrange, enseña matemáticas en la Escuela Normal de la Convención y, como Lagrange, forma parte del Instituto Nacional y de la Oficina de Longitudes. Sugiere la adopción de un nuevo calendario, basado en cálculos astronómicos. Tras el 18 Brumario, el primer cónsul, que había conocido a Laplace y tenía interés en apoyarse en las personas más cultas, le nombra ministro del Interior. Pero dado que tiene pocas aptitudes para la

política, al cabo de algunas semanas deja ese puesto a Lucien Bonaparte; su úniea actuación en ese cargo fue la concesión de una pensión a la viuda del astrónomo Bailly. Entra a continuación en el Senado conservador, del que llega a ser presidente, y más tarde canciller en 1803.

Aunque colmado de honores por Napoleón —conde del Imperio, gran oficial de la Legión de Honor— vota su deposición en 1814. Laplace no vuelve a las Tullerías durante los Cien Días, y se une a las filas de Luis XVIII, que le nombra marqués y par de Francia y le otorga la gran cruz de la Legión de Honor. En 1806 había adquirido en Arcueil una propiedad muy próxima a la de su colega y amigo Berthollet. Allí nace la célebre «Sociedad de Arcueil». Laplace y Berthollet reúnen periódicamente a químicos y físicos, entre los que se cuentan Chaptal, Thénard, Gay-Lussac, Dulong, alumnos suyos en su mayoría, y de estas veladas salen los tres volúmenes de memorias de esta sociedad, en los que Laplace presenta importantes trabajos de física matemática.

Hasta el último momento Laplace consagra todos sus instantes a la ciencia y es considerado como un maestro rodeado de discípulos tan diferentes como Biot y Poisson. En medio de sus ocupaciones extracientíficas, Laplace no cesa de producir: *Exposición del sistema del mundo* (1796), *Mecánica celeste* (1798-1825), *Teoría analítica de las probabilidades* (1812) y numerosas memorias que tratan del estudio del movimiento, la figura de los astros, la teoría de los gases y la capilaridad, las leyes del electromagnetismo, etc.

Sus contemporáneos le reprocharon su vanidad, que le impidió, según parece, hacer la debida justicia a las obras de otros científicos a quienes consideraba rivales. Laplace no era un matemático puro como Lagrange, de quien no poseía ni las cualidades personales ni la elegante claridad, ni la perfección de sus trabajos. Atraído por problemas de filosofía natural, consideraba el análisis matemático como un medio y no como un fin, y se esforzó durante toda su vida en edificar teorías matemáticas y perfeccionarlas con el objeto de explicar los misterios de la mecánica celeste y aplicar la teoría de las probabilidades a la vida civil.

Sabemos poco de su vida familiar y de sus costumbres, salvo que se casó con Charlotte de Courty de Romanges en 1788 y que de esta unión tuvo una hija y un hijo, el cual llegó a ser general de artillería. Después de 1806, la familia de Laplace vivió casi enteramente en

Arcueil y el 5 de marzo de 1827, unos días antes de cumplir los setenta y ocho años, murió en París, cien años después de Newton, casi el mismo día.

La teoría de las probabilidades de Laplace

En una serie de memorias publicadas entre 1771 y 1818 y cuyos resultados se encuentran coordinados en su tratado clásico titulado *Teoría analítica de las probabilidades,* publicado en 1812, Laplace realiza importantes contribuciones al cálculo de probabilidades y a sus diversas aplicaciones. La introducción a la segunda edición de su tratado (1814), publicada bajo el título *Ensayo filosófico sobre las probabilidades,* es una trasposición elemental de esta obra, sin ningún aparato matemático. Laplace presenta en su introducción observaciones sobre las probabilidades, siete principios generales relativos al cálculo de probabilidades, una exposición elemental de la teoría de las funciones generatrices, así como secciones que ilustran aplicaciones de ese cálculo a la filosofía natural, a las ciencias morales y a problemas demográficos y jurídicos.

Su célebre tratado comprende dos partes, la primera se titula *Del cálculo de las funciones generatrices* mientras que la segunda trata de la *Teoría general de las probabilidades.* La teoría de las funciones generatrices, completamente nueva en esa época, sirve de fundamento a toda la exposición teórica. En el primer capítulo de la segunda parte del libro I, titulado *De la integración por aproximación de las diferenciales que incluyen factores elevados a grandes potencias,* Laplace presenta un método de aproximación en el que introduce la transformación

$$y = \gamma e^{-t^2}$$

y, en general, la que lleva su nombre:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, g(t)dt.$$

la función f se llama la «transformada de Laplace de la función g». En el segundo capítulo de esta misma parte se encuentra un procedimiento que es utilizado, según parece, por primera vez en la resolución de ecuaciones diferenciales por medio de integrales

definidas. El capítulo siguiente trata de la «aproximación de diversas funciones de números muy grandes» y contiene resultados importantes; en particular, Laplace da un valor aproximado a la expresión siguiente para una i muy grande

$$\Delta^n \frac{1}{s^i} = \frac{\int_0^\infty x^{i-1} e^{-sx} (e^{-n} - 1)^n \, dx}{\int_0^\infty x^{i-1} e^{-x} \, dx}$$

donde Δ^n significa la n-ésima diferencia finita.

En el capítulo III del libro II que trata «de las leyes de la probabilidad que resultan de la multiplicación indefinida de los sucesos», Laplace estudia el teorema de Bernoulli y demuestra que, si el número de ensayos u es muy grande, la probabilidad de la razón del número posible de sucesos al número total de ensayos se situará entre los límites

$$p - \frac{\tau\sqrt{2pq}}{\sqrt{u}} \text{ y } p + \frac{\tau\sqrt{2pq}}{\sqrt{u}}$$

y su valor será

$$\frac{2}{\sqrt{\tau}} \int_0^\tau e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} e^{-\tau^2}$$

donde $q = 1 - p$ y p es la probabilidad de un suceso en cada ensayo. El cuarto capítulo del libro II es probablemente el más importante y también el más difícil, porque contiene la notable teoría del «método de mínimos cuadrados», ya propuesto por Legendre. Se encuentra también en el capítulo V, titulado «Aplicación del cálculo de probabilidades a la investigación de los fenómenos y sus causas», la solución al problema de la aguja de Buffon para la aproximación del número π. Laplace encuentra la solución de la primera parte de este problema y da una solución para la segunda, cosa que Buffon no había podido hacer. Además, da una generalización de ese problema para el caso de dos conjuntos mutuamente perpendiculares de líneas paralelas equidistantes. Si las distancias son a y b, la probabilidad de que una aguja de longitud l (menor que a y b) caiga sobre una de las líneas es

$$p = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}$$

Propuesto en una memoria póstuma de Thomas Bayes en 1763, el problema de la determinación de la probabilidad de las causas por los efectos observados es considerado de nuevo por Laplace en el capítulo VI del libro II (memoria publicada en 1774), donde enuncia de manera definitiva la regla de Bayes:

Sea x la posibilidad de un suceso simple e y la posibilidad de un suceso compuesto que depende del suceso simple de una manera arbitraria, lo que implica que y es una función conocida de x. Supongamos que este suceso compuesto ha sido observado; entonces la probabilidad de que la posibilidad del suceso simple se sitúe entre α y β es

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} y dx}{\int_{0}^{1} y dx}$$

Combinada con los teoremas de la probabilidad total y de la probabilidad compuesta, esta regla permitió a Laplace evaluar la probabilidad de sucesos futuros apoyándose en los resultados obtenidos de los sucesos observados.

La mecánica celeste de Laplace

La *Mecánica celeste* de Laplace acumula los trabajos de Newton, Clairaut, D'Alembert, Euler y Lagrange sobre la figura de la tierra, la teoría de la Luna, el problema de los tres cuerpos y las perturbaciones de los planetas. La célebre «ecuación de Laplace»

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

o laplaciano de una función, verificada por el potencial, se encuentra en su *Mecánica*. En una memoria sobre la teoría de las atracciones de los esferoides y la figura de los planetas, incluida en su célebre tratado de astronomía, Laplace desarrolla el concepto de potencial, una función cuya derivada direccional en cada punto es igual a la componente del campo de intensidad en la dirección dada.

De la misma manera que su «teoría analítica de las probabilida-

des» fue acompañada de una exposición elemental sobre el cálculo de probabilidades, su *Mecánica celeste* fue precedida de su *Exposición del sistema del mundo* (1796). En esta *Exposición* Laplace presenta en algunas páginas su célebre hipótesis cosmogónica sobre el origen del sistema del mundo. Recordemos que esta hipótesis consiste en explicar el origen del sistema solar mediante una nebulosa primitiva que habría ocupado el emplazamiento actual de ese sistema. Esta nebulosa estaría constituida por un núcleo fuertemente condensado, a una temperatura muy alta, que gira como una sola pieza alrededor de un eje que pasa por su centro, todo ello rodeado de una atmósfera. Por enfriamiento de las capas exteriores, la rotación de conjunto habría engendrado anillos sucesivos que, por condensación, se convertirían en los planetas, mientras que el núcleo central habría formado el sol. Esta hipótesis encierra ideas que habían sido ya elaboradas por el filósofo Kant y por Thomas Wright.

Laplace se interesó igualmente por otros aspectos de las matemáticas. Mencionemos brevemente la extensión de la noción de soluciones singulares a las ecuaciones de grado superior y a las ecuaciones diferenciales de tres variables; la utilización de coordenadas esféricas para expresar la «ecuación potencial»; la generalización del método de Vandermonde para el desarrollo de los determinantes en productos de menores; la demostración para el caso de seis planetas que se mueven en la misma dirección de que las seis raíces características son reales y distintas; la utilización de las funciones de variables complejas para calcular integrales, pasando de una integral real a una integral compleja con el fin de calcular la integral real. (Laplace consideraba que este paso de lo real a lo imaginario podía considerarse como un método heurístico.)

La potencia del talento de Laplace, la unidad y la amplitud de sus concepciones le valieron muchos elogios y admiración. La cita que sigue, tomada de Poisson, ilustra bien las contribuciones científicas de Laplace:

Sin duda Laplace se mostró como un hombre de talento en la mecánica celeste; dio prueba de la sagacidad más penetrante para descubrir las causas de los fenómenos; y fue así como encontró la causa de la aceleración del movimiento de la Luna y la de las grandes desigualdades de Saturno y Júpiter, que Euler y Lagrange habían buscado infructuosamente. Pero

puede decirse que fue todavía más en el cálculo de probabilidades donde se manifestó como un gran geómetra; porque las numerosas aplicaciones que hizo de este cálculo dieron origen al cálculo de diferencias finitas parciales, a su método para la reducción de ciertas integrales como series, y a lo que él llamó la «teoría de las funciones generatrices». [...] Creamos, pues, que un tema que llamó la atención de semejantes hombres es digno de la nuestra; e intentemos, si nos es posible, añadir algo a lo que ellos encontraron en una materia tan difícil y tan interesante.

LEGENDRE

Adrien-Marie Legendre (1752-1883) es originario de Toulouse, Francia. Al contrario de la de Lagrange o Monge, la vida de Legendre transcurre tranquila, como la de los científicos de la era moderna. Distinguido por el abate Marie, su maestro en el colegio de Mazarino, ocupa un puesto de profesor de matemáticas en la Escuela Militar de París de 1775 a 1780. Ingresado en la Academia de Ciencias en 1783, Legendre forma parte de la comisión encargada en 1787 de las operaciones geodésicas que deben unir el observatorio de París al de Greenwich. Participa luego en la preparación de las operaciones geodésicas bajo la Revolución, en el momento de la adopción del sistema métrico.

Legendre no desempeñó ningún papel político durante la Revolución, contentándose más bien con ocupar diversos puestos como consejero en la Universidad, profesor en la Escuela Normal y examinador en la Escuela Politécnica. Hacia el final de su vida, Legendre fue privado de su pensión porque se opuso a la intromisión del gobierno en la marcha de la Academia de Ciencias. Murió en París en 1833, sin haber cesado nunca de trabajar con pasión y regularidad.

Su nombre va unido a un gran número de proposiciones muy variadas, lo que atestigua la diversidad de sus investigaciones. En su trabajo, muestra una gran tenacidad y no duda en adentrarse por caminos difíciles, pero no tiene la originalidad y profundidad de visión de Monge, Lagrange o Laplace. Aunque se significó particularmente en teoría de números, contribuyó también de manera original en otros campos: ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones, teoría de funciones, geometría euclídea e integrales elípticas. Sus tratados de matemáticas fueron durante mucho tiempo los

clásicos por excelencia: *Elementos de geometría* (1794); *Ensayo sobre la teoría de números* (1798); *Ejercicios de cálculo integral* (1811-1819); *Tratado de las funciones elípticas y de las integrales eulerianas* (1825-1832); y *Teoría de números* (1830).

La geometría y el postulado de las paralelas

En sus *Elementos de geometría* de 1794, Legendre rompe con las ideas platónicas de Euclides y presenta un tratado elemental de geometría que constituye un perfeccionamiento pedagógico cierto de los *Elementos* del geómetra griego. Publicado durante el Año del Terror, Legendre escribe en su prefacio que el objeto de su tratado consiste en satisfacer al espíritu, aunque consta de elementos muy rigurosos. Las veintiuna ediciones sucesivas aparecidas en vida del autor son un testimonio del notable éxito de este tratado, que fue también traducido a diversas lenguas. En particular, la traducción inglesa de su tratado llegó a ser casi un sinónimo de geometría en América.

El postulado de las paralelas ha llamado la atención de numerosos geómetras, y Legendre le consagró mucho tiempo. Antes de Legendre, los geómetras se habían contentado con poner de relieve las dificultades del problema y enunciar su opinión sobre el tema. Con Legendre, el punto de vista cambia porque trata de construir con él un teorema. Sus diferentes estudios, repartidos entre las numerosas ediciones de sus *Elementos,* fueron reunidos en una memoria de la Academia de Ciencias, publicada en 1833 bajo el título de *Reflexiones sobre diferentes maneras de demostrar la teoría de las paralelas o el teorema sobre la suma de los tres ángulos del triángulo.*

Durante un período de veinte años, Legendre se esforzó por proponer diferentes tentativas para demostrar el postulado de las paralelas, y la más interesante se parece mucho al enfoque de Saccheri. En efecto, decidió estudiar la cuestión de la suma de los ángulos rectos. Así Legendre consiguió descartar la hipótesis de Saccheri del ángulo obtuso, ya que llegó a establecer que «la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es inferior o igual a dos ángulos rectos».

En suma, Legendre no añade nada nuevo a los trabajos anterio-

res de Saccheri y Lambert, a no ser la forma simple y elegante de sus demostraciones, que atrajo la atención de un gran número de lectores y suscitó también un interés creciente por ideas de esta naturaleza.

Teoría de números de Legendre

Su *Ensayo sobre la teoría de números* constituye el primer tratado consagrado enteramente a esta teoría. Después de Euler y Lagrange, Legendre constituye definitivamente esta teoría, pues presenta un imponente número de resultados interesantes. Aunque en ella no se encuentra ninguna innovación importante, su *Teoría de números* contiene, entre otras cosas, la célebre ley de reciprocidad cuadrática, una demostración del último teorema de Fermat para $n = 5$, la hipótesis de que $\pi(n)$ se aproxima a «$n/ln\ n - 1.08366$» cuando n aumenta indefinidamente y fórmulas válidas para determinar los números primos.

En 1808 Legendre inventó un simbolismo apropiado para expresar la ley de reciprocidad cuadrática. Esta ley había sido ya, recordémoslo, observada por Euler dos años antes del descubrimiento independiente de Legendre, y este último intentó en vano demostrarla rigurosamente. La última demostración de Legendre es incompleta, porque suponía que había un número infinito de números primos en cierta progresión aritmética. La hipótesis de Legendre relativa al teorema de los números primos está basada en la existencia de un número muy grande de éstos. Esta hipótesis no está muy lejos del teorema demostrado en 1896 por Hadamard: $\pi(n) = 0(n/ln\ n)$. Además de demostrar que no existe ninguna función algebraica racional que proporcione siempre un número primo, Legendre observó que la fórmula $n^2 + n + 17$ proporciona un número primo para $1 < n < 16$ y la fórmula $2n^2 + 29$ lo hace cuando $1 < n < 28$. (Euler había demostrado anteriormente que para $1 < n < 40$, la fórmula $n^2 - n + 41$ da un número primo). Legendre se interesó también por la teoría de las formas, cuyo origen se remonta a Euler y, sobre todo, a Lagrange.

Otras contribuciones de Legendre

Las investigaciones de Legendre sobre las integrales elípticas comenzaron en 1786 y continuaron hasta el fin de su vida. En su *Tratado de las funciones elípticas,* parte de las integrales elípticas y, de una forma muy metódica, demuestra que la integral elíptica general

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\, dx$$

donde $P(x)$ es una función racional cualquiera de x y $R(x)$ el polinomio general de cuarto grado, puede reducirse a tres tipos simples que han conservado su nombre

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

El primer tipo de integral elíptica se encuentra naturalmente en la resolución de la ecuación diferencial que modela el movimiento del péndulo simple. El segundo tipo aparece, en particular, cuando se desea determinar la longitud de arco de una elipse.

Pero a pesar de la importancia de sus trabajos y el interés de sus resultados, no tuvo la inspiración de dos jóvenes geómetras extranjeros, Abel y Jacobi, quienes, por el sencillo procedimiento de la inversión, les darían una orientación nueva: las funciones elípticas. Los magníficos trabajos de Abel y Jacobi suscitaron su admiración y, posiblemente con un poco de amargura, los expuso en un tercer volumen de su tratado. Legendre pasó rozando uno de los descubrimientos más importantes de su época.

En sus *Ejercicios de cálculo integral,* Legendre hizo un estudio profundo de las integrales eulerianas y obtuvo la célebre fórmula de la duplicación de la función gamma:

$$\Gamma(2x) = (2\pi)^{-1/2}\, 2^{2x-1/2}\, \Gamma(x)\Gamma(x + \tfrac{1}{2}).$$

La participación de Legendre en las operaciones geodésicas le condujo a investigaciones interesantes sobre las líneas geodésicas de

las superficies, y en particular sobre las de los esferoides y los triángulos que pueden formar. Nos dejó un método que permite calcular el área de un triángulo esférico como si fuese plano, aplicando ciertas correcciones a los ángulos. Los «polinomios de Legendre» se encuentran en su memoria sobre la atracción de los esferoides, así como la ecuación diferencial de Legendre

$$(1 - x^2)y' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

cuyas soluciones polinómicas para valores enteros de n son los polinomios de Legendre. Asimismo, esta participación le condujo a desarrollar el método estadístico de los mínimos cuadrados en el que, sin mezclar ninguna consideración teórica, sólo vio el medio más práctico de establecer una especie de equilibrio entre los errores.

Legendre abordó también el problema de la segunda variación en el cálculo de variaciones, dejándose guiar por el hecho de que en el cálculo ordinario el signo de la derivada segunda f'' en un valor x_1, tal que $f'(x_1) = 0$, determina la existencia de un máximo o de un mínimo de la función f. Formuló de esta manera un criterio necesario para la determinación del máximo o del mínimo de $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$ en términos de la segunda variación $\delta^2 J$.

CARNOT

Lazare-Nicholas-Marguerite Carnot (1753-1823), llamado también el «Organizador de la Victoria» o el «Gran Carnot», fue un político francés que destacó también en geometría. Nacido en Nolay, en Borgoña, el 13 de mayo de 1753, fue el octavo de los dieciocho hijos de un notario. Miembro de una familia de clase media, Carnot entró en la Escuela Militar de Mézieres, abierta a los plebeyos, pero donde, al no tener título sólo podía llegar, a lo sumo, al grado de capitán. Alumno de Monge en Mézieres, comenzó en 1773 su carrera como ingeniero militar, y sus trabajos cotidianos en materia de fortificaciones le dejaron tiempo suficiente para leer y escribir. Escribió tanto sobre cuestiones científicas como sobre problemas de interés más amplio.

En 1783, Carnot publica su *Ensayo sobre las máquinas en general*, obra que se refiere a los principios, las leyes generales del

choque, y que comprende la ley de conservación del trabajo. En la misma época, presenta una memoria sobre los dirigibles a la Academia de Ciencias, creyendo firmemente en su gran utilidad en la guerra. Carnot no puede esperar un ascenso rápido, y su espíritu demasiado independiente le lleva a enemistarse con las autoridades del real cuerpo de ingenieros militares a propósito de su «Elogio de Vauban», en el que alaba los méritos de los métodos de asedio del mariscal Vauban. Si se añade a esto su imposibilidad de contraer el matrimonio que desea con su amada Ursula, a causa de su modesta extracción, no hace falta nada más para enfrentarle a las instituciones y las autoridades del antiguo régimen.

Reformador ardiente del gobierno, en 1791 es diputado en la Asamblea legislativa, en donde encarna entonces los méritos y las pretensiones de la burguesía de talento; su resolución y su actividad le aseguran rápidamente una notoriedad local. La guerra le proporciona la ocasión de desplegar sus actividades y la Convención le llama, en 1793, para dirigir los destinos del ejército del norte. Su victoria de Wattignies le valdrá el título de el «Organizador de la Victoria». A su vuelta a París, vota la muerte de Luis XVI, ya que no retrocede ante ningún obstáculo cuando lo exige la razón de Estado. Carnot aparece ante los ojos de todos como un antiguo terrorista, un hombre sin partido, íntegro y a veces violento. Miembro del Directorio en octubre de 1795, huye después del golpe de Estado del 18 de Fructidor de 1797, porque se le acusa de complicidad con la causa realista. Mientras tanto, publica sus *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal,* con las cuales Carnot intenta demostrar que los métodos de Newton y Leibniz son algoritmos equivalentes al método de exhaustión de Arquímedes.

Su exilio dura dos años y, en 1799, es ministro de la Guerra bajo el Imperio y miembro de la Tribuna; luego vuelve a ocupar su sillón en la Academia. Osa pronunciarse abiertamente contra el Imperio, lo que le mantiene apartado en lo sucesivo, sin convertirse no obstante en enemigo de Napolcón. Por otra parte, arruinado por sus empresas coloniales, es socorrido por Napoleón, quien le otorga una pensión. Cuando la situación militar pone de nuevo a Francia en peligro, Carnot defiende la plaza de Amberes en calidad de gobernador, hasta la caída de París. Mientras tanto, sus actividades políticas no le impiden consagrar algún tiempo a las actividades académicas. En 1801 publica *De la correlación de las figuras de*

geometría, que será desarrollada y enriquecida en su *Geometría de posición* de 1803. El nombre de Lazare Carnot ha quedado unido a un teorema contenido en su *Ensayo sobre la teoría de transversales,* publicado en 1806.

Napoleón salvó literalmente a Carnot de una ruina económica segura en 1809, y le invitó al mismo tiempo a componer un tratado sobre las fortificaciones para ser utilizado en las escuelas. El resultado fue una obra considerable, de 600 páginas, titulada *De la defensa de las plazas fuertes* (1810), que abarca todos los aspectos del tema y cuyo texto va acompañado de numerosos ejemplos ilustrados.

Bajo la Restauración, Luis XVIII le acoge sin entusiasmo y Carnot se atrae las iras del gobierno por su *Memoria al rey,* escrita con el fin de condenar los abusos del poder y la falta de respeto a la Carta. Durante los Cien Días, acepta el cargo de ministro del Interior de Bonaparte y el título de conde del Imperio, con la esperanza de que, esta vez, se resucitará la Carta. Después de Waterloo, suplica en vano a Napoleón que no abdique; al regreso de Luis XVIII, Carnot se ve forzado a exiliarse de nuevo. Se refugia en Magdeburgo, donde vive en medio de una pobreza digna, repartiendo su tiempo entre escribir y publicar sonetos y trabajos científicos hasta su muerte, acaecida el 2 de agosto de 1823, a los setenta años.

Su hijo Hippolyte servirá a Francia como ministro de Instrucción Pública en 1848, y su hijo mayor Sadi llegará a ser un físico célebre. El hijo menor de Hippolyte, Sadi II, será el cuarto presidente de la Tercera República.

Los trabajos matemáticos de Carnot

En su *Ensayo* de 1783, cuya segunda edición ligeramente modificada será publicada en 1803 bajo el título de *Principios fundamentales del equilibrio y el movimiento,* Carnot estudia la mecánica en cuanto teoría de los movimientos y, de una manera más específica, en cuanto teoría de las leyes de la comunicación de los movimientos que es necesario basar en la experiencia. Sus dos postulados fundamentales son: la fuerza del impacto de dos cuerpos que entran en colisión: a) depende sólo de su movimiento relativo; b) es siempre directamente perpendicular a su superficie común en el punto de contingencia. Carnot sustituye los desplazamientos virtuales por

movimientos finitos (geométricos), y a continuación estudia las leyes generales del choque, el teorema relativo a las fuerzas vivas perdidas, que lleva su nombre, y llega al principio general que preside el uso de las máquinas en movimiento: se pierde siempre en tiempo o en velocidad lo que se gana en fuerza.

En su popular tratado *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal* (1797), obra ampliamente difundida y traducida a diversas lenguas, Carnot trata de hacer más riguroso el cálculo de Newton y Leibniz. Demuestra que todos los métodos elaborados para presentar este nuevo análisis deben tener una lógica interna basada en la del método de exhaustión. Llega a proponer un principio unificador para armonizar estas diversas interpretaciones en conflicto. Desgraciadamente su elección es deplorable, porque sugiere el «principio de compensación de los errores». Por ejemplo, las cantidades infinitesimales son, según Carnot, «cantidades inapreciables» que, como los números imaginarios, sólo son introducidas para facilitar los cálculos y desaparecen al obtener el resultado final. Asimismo, las «ecuaciones imperfectas» se vuelven «perfectamente exactas» en el cálculo mediante la eliminación de cantidades tales como los infinitésimos de orden superior, que son una fuente de errores. Aunque sus ideas sobre la metafísica del cálculo no consiguieran llegar a una síntesis satisfactoria de las diferentes concepciones, tuvieron el mérito de contribuir a eliminar los «pequeños ceros abominables» del siglo XVIII. Observemos que el Gran Carnot consideraba que el uso de los números negativos conducía a conclusiones erróneas.

Carnot es célebre en la historia de las matemáticas sobre todo y principalmente por sus contribuciones a la geometría. En su obra titulada *De la correlación de las figuras en geometría* (1801), Carnot intenta establecer una universalidad de la geometría pura parecida a la que posee la geometría analítica. De esta manera demuestra que varios teoremas de Euclides pueden ser considerados como casos particulares de un teorema más general que los engloba. Para ilustrar esta universalidad se aportan numerosos ejemplos. Pero es en su *Geometría de posición* de 1803 donde el geómetra francés hace gala de las cualidades que le permitirán, con Monge, fundar la geometría pura moderna. Su inclinación hacia la generalización le conduce a formas elegantes equivalentes de teoremas bien conocidos: Carnot extiende la ley de los cosenos en trigonometría al caso

del tetraedro. Esta misma inclinación le incita a realizar investigaciones para determinar las coordenadas «intrínsecas», es decir las coordenadas naturales de la curva. Por ejemplo, las coordenadas de un punto sobre una curva podrían ser el radio vector y el radio de curvatura, y este último puede ser reemplazado por una longitud de arco de la curva. A finales del siglo XIX, Ernesto Cesaro (1859-1906) en su *Geometría intrínseca,* obra clásica sobre las coordenadas naturales, utilizará la longitud de arco y el radio de curvatura como coordenadas intrínsecas de los puntos de una curva.

El nombre de Carnot ha quedado unido a un teorema que aparece en su *Ensayo sobre la teoría de las transversales* de 1806. Este teorema constituye una generalización de un teorema de Menelao de Alejandría: dada una curva algebraica cualquiera de orden n que corta a un triángulo ABC, sea A_1 el producto de las n distancias, reales o imaginarias, de A a los n puntos de intersección de la curva con el lado AB, y lo mismo para B_1 y C_1, definidas por los lados BC y CA; sean A_2, B_2 y C_2 los productos semejantes correspondientes a los lados AC, CB y BA, respectivamente. Entonces,

$$A_1B_1C_1 = A_2B_2C_2.$$

Si la curva es una línea recta, es el teorema de Menelao; si la curva es una cúbica, del teorema de Carnot se deduce que los tres puntos de inflexión se sitúan en una línea recta, resultado bien conocido en esa época.

Las obras de Carnot conocieron un gran éxito e influyeron considerablemente en las investigaciones geométricas de principios del siglo XIX, por la difusión del conocimiento de numerosos teoremas, de los que un gran número eran de naturaleza proyectiva, popularizando la geometría de la regla y volviendo a habituar a los geómetras al estudio de las transformaciones geométricas, como la involución y la homografía.

Si bien es verdad que durante la época de la Revolución francesa los matemáticos franceses dominaron el campo de las matemáticas, otros matemáticos, fuera de Francia, contribuyeron de una manera más modesta al desarrollo de las mismas, salvo el príncipe de los matemáticos, Gauss. Queremos aquí subrayar más en especial, dados los objetivos perseguidos en este libro, los trabajos de Wessel sobre la representación geométrica de los números complejos.

WESSEL

Gaspar Wessel (1745-1818), agrimensor danés, publicó en 1799 la primera explicación satisfactoria de la representación geométrica de los números complejos. Desgraciadamente esta contribución, publicada en forma de memoria de la Academia Real de Dinamarca, no despertó ningún eco manifiesto en los matemáticos europeos antes de 1897, fecha en la que fue publicada de nuevo, pero esta vez en versión francesa titulada *Essai sur la représentation analytique de la direction.*

El interés de Wessel se centra en la creación de métodos geométricos, y su representación de los números complejos está subordinada a este fin primordial. La idea de Wessel para introducir los números complejos mediante consideraciones geométricas es tan sencilla que puede tomarse, razonablemente, como método de enseñanza.

La adición y la sustracción de los números reales pueden ser representadas por vectores situados sobre una recta y provistos de una dirección positiva y negativa, respectivamente.

Así, $\vec{5} + (-\vec{4})$ se representa como sigue

0

$-\vec{4}$ $\quad$ $\vec{5} + -\vec{4}$ $\quad$ $\vec{5}$

FIGURA 6.1

la regla común resulta: desplazar uno de los vectores hasta el extremo del otro.

La multiplicación de dos vectores situados en la misma recta es igualmente sencilla, salvo el caso de $(-\vec{1}) \cdot (-\vec{1}) = \vec{1}$. Wessel generaliza a continuación este cálculo de vectores sobre una recta a un cálculo de vectores en el plano. La adición y la sustracción son fáciles de generalizar en el plano por medio del desplazamiento de uno de los vectores, conservando siempre su dirección. Sin embargo, la multiplicación presenta ciertas dificultades: ¿cómo formar el vector $\vec{a} \cdot \vec{b}$ a partir de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de manera que $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}} = \frac{\vec{a}}{1}$?

El agrimensor danés observa que se debe formar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ a partir de $\vec{b}$ de la misma manera que se forma $\vec{a}$ a partir de $\vec{1}$. Pero el vector $\vec{a}$ se obtiene de $\vec{1}$ modificando su longitud y haciéndole girar un ángulo θ:

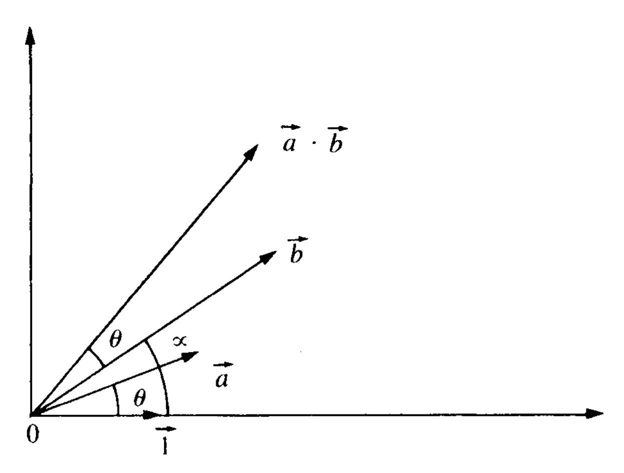


FIGURA 6.2

por lo que se obtendrá $\vec{a} \cdot \vec{b}$ modificando la longitud de $\vec{b}$ lo mismo que la de $\vec{1}$ a $\vec{a}$, y aumentando después el ángulo a de $\vec{b}$ el mismo ángulo θ que hacía falta girar $\vec{1}$ para obtener $\vec{a}$ (véase la figura 6.2).

La regla de la multiplicación es, pues, multiplicar las longitudes de los dos vectores y sumar sus ángulos respectivos. Así, el resultado de $(\vec{-1}) \cdot (\vec{-1}) = \vec{1}$ se hace intuitivo a partir de esta regla. En particular, Wessel deduce que el producto $\vec{i} \cdot \vec{i} = -\vec{1}$ (él emplea la letra e para designar el vector i, perpendicular al eje horizontal). Después, hace $e = \sqrt{-1}$ e introduce las funciones trigonométricas para expresar los números complejos. Por ejemplo:

$$(\cos v + e \operatorname{sen} v)(\cos u + e \operatorname{sen} u) = \cos (v + u) + e \operatorname{sen} (v + u)$$

y

$$r \cos v + re \operatorname{sen} v = r(\cos v + e \operatorname{sen} v).$$

En el desarrollo de su método, Wessel denota los vectores

unitarios mediante 1, e, -1 y $-e$, respectivamente. De esta manera, $-1 = e^2$ y, en lo sucesivo, está en condiciones de establecer las operaciones fundamentales con los números complejos.

Dado que los trabajos de Wessel fueron pura y simplemente excluidos de la red de influencias durante la primera mitad del siglo XIX, fue Jean Robert Argand (1768-1822) quien tuvo el honor de unir su nombre a esta representación.

DUDAS SOBRE EL FUTURO DE LAS MATEMÁTICAS A FINES DEL SIGLO XVIII

Ante el edificio cada vez más imponente de las matemáticas, algunos matemáticos, a fines del siglo XVIII, manifestaron algunas dudas con respecto a los progresos futuros de las matemáticas. La complejidad de los problemas a resolver, la diversidad de los métodos utilizados, la ausencia casi completa de técnicas y métodos generales susceptibles de simplificar el estudio y la búsqueda de soluciones, fueron otros tantos factores que engendraron un estado de ánimo algo pesimista.

El 21 de septiembre de 1781, Lagrange escribía a D'Alembert que le parecía también que la mina de las matemáticas era ya muy profunda y que, al menos que se encontraran nuevas vetas, se debería necesariamente abandonarla durante un período de tiempo más o menos largo. Proseguía subrayando que la física y la química eran ahora los campos más prometedores a causa de su riqueza, de sus métodos de investigación más accesibles, y del enorme favor de que gozaban esos campos de estudio en su época. Asimismo, Euler y D'Alembert parecían de acuerdo con estas ideas y Diderot, en 1754, no temía afirmar que no habría más de tres grandes geómetras en Europa a comienzos del siglo XIX, y que las matemáticas conocerían rápidamente un estancamiento cuando los científicos de la época hubieran dejado de existir.

En su *Informe histórico sobre los progresos de las ciencias matemáticas desde 1789 y sobre su estado actual,* publicado en 1810, Jean-Baptiste Delambre (1749-1822), secretario permanente de las secciones de matemáticas y física, manifiesta también un estado de ánimo no muy tranquilizador con respecto al futuro de las matemáticas. Según Delambre, es muy difícil, y quizá insensato, analizar las

posibilidades de progresar en matemáticas. Prosigue poniendo de relieve el hecho de que cada rama de las matemáticas presenta dificultades insuperables a quien quiere avanzar a toda costa, y la perfección de los detalles parece ser la única cosa que queda por hacer. Más adelante, sin embargo, añade que estas dificultades muestran la necesidad de modificar nuestros puntos de vista, nuestros enfoques, e inventar nuevas hipótesis susceptibles de abrir nuevos campos de actividad.

La predicción más sensata fue la de Condorcet, quien en 1801 subrayaba que se estaba lejos de haber agotado todas las aplicaciones del análisis a la geometría y que se debería más bien reconocer que el estado de la ciencia se encontraba todavía en sus comienzos, ante la inmensa carrera que se dibujaba. Añadía que estas nuevas aplicaciones, al margen de su propia utilidad, eran necesarias para el progreso del análisis, y que daban origen a nuevas teorías. En suma, era a través de las aplicaciones como las matemáticas estaban llamadas a progresar, y estas aplicaciones constituían la fuente de donde brotarían nuevas teorías, nuevas ramas de las matemáticas y nuevas aplicaciones, sin que el proceso se detuviera nunca.

Condorcet tenía razón en mostrarse optimista, porque el siglo XIX sería todavía más fecundo que el siglo XVIII, tanto al nivel de la riqueza de los conceptos, como al de la innumerable cantidad de contribuciones que serían realizadas en él.

BIBLIOGRAFÍA

Bell, Eric T., *Men of mathematics,* Nueva York. Simon and Schuster, 1965, pp. 153-205.

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean geometry,* Nueva York, Dover, 1955, pp. 51-60.

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley & Sons, 1968, pp. 510-543.

Boyer, Carl B., «History of analytic geometry», Nueva York, *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 200-224.

Boyer, Carl B., «Carnot and the concept of deviation», *The American Mathematical Monthly,* 61, 1954, pp. 459-463.

Boyer, Carl B., «The Great Carnot», *The Mathematics Teacher,* 49, 1956, pp. 7-14.

Coolidge, Julian L., «The beginnings of analytic geometry in three dimensions», *The American Mathematical Monthly,* 55, 1948, pp. 76-86.

Coolidge, Julian L., *A history of the conic sections and quadric surfaces,* Nueva York, Dover, 1968, pp. 169-175.

Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 602-616.

Eves, Howard, *An introduction to the history of mathematics,* Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1964, pp. 362-365, 373-375.

Fitzpatrick, Sister M., «Saccheri, forerunner of non-Euclidean geometry», *The Mathematics Teacher,* 57, 1964, pp. 323-332.

Gafney, L., «Gaspard Monge and descriptive geometry», *The Mathematics Teacher,* 58, 1965, pp. 338-343.

Granger, G. G., *La mathématique sociale du Marquis de Condorcet,* París, P.U.F., 1956.

Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 420-422, 424, 430-432, 458-459, 464, 477-478, 486-488, 493-499, 510-514, 525-531, 532-543, 547, 565-568, 582-590, 600-605, 607, 611-612, 614-625, 628-630.

National Council of Teachers of Mathematics (The), *Historical topics for the mathematics classroom,* 31st. Yearbook, Washington, D.C., N.C.T.M., 1969, pp. 159, 179-180, 184, 253-254, 292-294, 323-324, 399-400, 448, 449-450, 451.

Newman, James R., comp., *The world of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1956, pp. 1316-1333. [*Sigma. El mundo de las matemáticas,* Barcelona, Grijalbo, 9.ª ed., 1983].

Reinhard, Marcel, *Le Grand Carnot,* París, Hachette, 1950-1952, 2 vols.

Sarton, George, «Lagrange's personality (1736-1813)», *Proceeding of the American Philosophical Society,* 88, 1944, pp. 457-496.

Smith, David. E., comp., *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vols. I y II, 1959, pp. 576-579, 588-604.

Struik, Dirk J., *A source book in mathematics 1200-1800,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969, pp. 49-54, 102-115, 388-391, 406-419.

Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. II, *La science moderne,* París, P.U.F., 1969, pp. 455-458, 459-460, 462, 468, 471, 473-474, 477-478, 479-480. [*Historia general de la ciencia,* vol. II, *La ciencia moderna,* Barcelona, Destino, 1972].

Taton, René, *L'histoire de la géométrie descriptive,* D-32, París, Palais de la Découverte, 1954.

Taton, René, *L'oeuvre scientifique de Monge,* París, P.U.F., 1951.

Taton, René, «Un texte inédit de Monge: reflexions sur les équations aux différences partielles», *Osiris*, 9, 1950, pp. 44-61.

Taton, René, *La géométrie projective en France de Désargues à Poncelet*, D-4, París, Palais de la Découverte, 1951.

Taton, René, «La préhistoire de la géométrie moderne», *Revue d'Histoire des Sciences*, 2, 1949-50, pp. 197-213.

Todhunter, Isaac, *A history of the mathematical theory of probability*, Nueva York, G. E. Stechert and Co., 1931, pp. 300-320, 351-410, 464-613.

Vullemin, J., *La philosophie de l'algèbre de Lagrange*, D-71, París, Palais de la Découverte, 1960.

Watson, S. J., *Carnot*, Bodly Head, 1954.

EJERCICIOS

1. ¿Influyeron las exigencias de la Revolución francesa en la naturaleza de las matemáticas francesas estudiadas en aquella época? Justificar la respuesta.
2. La Revolución francesa fue beneficiosa para sus matemáticos. Comentar y proporcionar ejemplos concretos.
3. Tres matemáticos franceses, Lagrange, Laplace y Legendre, no tomaron parte activa en las actividades políticas de la Revolución. Justificar esta afirmación con ejemplos.
4. Describir el método algebraico de Lagrange para hacer más riguroso el cálculo infinitesimal. ¿Cuáles son sus ventajas y sus inconvenientes?
5. Precisar el papel de Condorcet en las aplicaciones de las matemáticas. Dar ejemplos.
6. Describir brevemente la activa participación de Monge en la Revolución francesa.
7. Precisar el papel preponderante de Monge en el desarrollo de la geometría descriptiva.
8. ¿Cuál fue el importante papel desempeñado por Lacroix en la difusión de las matemáticas durante la Revolución francesa?
9. Precisar el papel preponderante de Laplace en el desarrollo de la teoría de probabilidades.
10. El nombre de Legendre ha quedado unido a numerosas proposiciones matemáticas. Identificar al menos cinco de ellas.
11. Verificar la fórmula de Legendre de que $n^2 + n + 17$ es un número primo para valores enteros positivos de n inferiores a 17.

12. Encontrar $\pi(n)$ para $n = 100$ y comparar el resultado con las fórmulas $n/(\ln n - 1)$ y $n/(\ln n - 1.08366)$.
13. Demostrrar que la integral

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

    se reduce a una de las formas de Legendre mediante la sustitución $x = \text{sen } t$.
14. Precisar las ideas de Carnot sobre la metafísica del calculo.
15. ¿Cuál fue el papel de Carnot en la fundación de la geometría pura moderna? Dar ejemplos.

TERCERA PARTE

LOS SIGLOS XIX Y XX

LAS MATEMATICAS EN EL SIGLO XIX

El aspecto de las matemáticas en el siglo XIX es diferente del que nos han ofrecido hasta ahora. Si es cierto que la herencia de los siglos XVII y XVIII constituye la sólida base sobre la que se edifican las teorías nuevas, hay que hacer notar que el siglo XIX matemático es un período de intenso desarrollo, caracterizado por una extensión y una diversificación continuas del campo de las investigaciones.

IDEA SOMERA DE LAS CONTRIBUCIONES MATEMÁTICAS

Durante el siglo XVIII, los matemáticos trabajaron mucho para enriquecer el análisis matemático con numerosos algoritmos y descubrimientos interesantes: mencionemos las soluciones explícitas de problemas de geometría y de mecánica recurriendo a funciones familiares, las relaciones explícitas entre las funciones exponenciales y logarítmicas, etc. Por el contrario, las demostraciones del teorema fundamental del cálculo y del resto de Taylor, para no citar más que dos ejemplos, siguen siendo imprecisas e intuitivas. En el siglo XIX, la preocupación por el rigor se manifiesta con la máxima intensidad, y los matemáticos se dan cuenta de las grandes diferencias entre las propiedades de las funciones de variables reales y las de variables complejas. De ello resultará una integración armoniosa de los resultados ingeniosos de los siglos precedentes y de las teorías sistemáticas de las funciones de variable real y de variable compleja.

En el campo del álgebra, a principios del siglo XIX, el problema central sigue siendo el de la resolución de las ecuaciones de grado superior a cuatro, y la solución de este problema no se obtendrá hasta que la teoría de grupos y de cuerpos esté suficientemente elaborada, gracias a los trabajos de Gauss, Abel, Galois, Jordan, Sylaw, Kronecker, Cayley, Klein y Lie. La importancia concedida al

estudio de los problemas lineales se manifiesta en numerosos trabajos consagrados a los determinantes y a las matrices, en el estudio de las formas algebraicas y de los invariantes, en la teoría de los cuaterniones de Hamilton y de los números hipercomplejos y, por último, en la introducción del concepto de tipos nuevos de álgebra. Paralelamente, asistimos a la difusión del cálculo vectorial, al considerable auge del análisis vectorial y a los comienzos del cálculo tensorial.

La renovación de la geometría pura está asegurada por los trabajos de Poncelet, que marcan la verdadera creación de la geometría proyectiva como una rama autónoma de la geometría. Las innovaciones importantes de Möbius, completadas por los trabajos de Steiner y de Chasles constituyeron verdaderamente la doctrina proyectiva, independientemente de toda noción métrica (distancia, ángulo, etc.) y sobre la única base de axiomas relativos a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Es durante el siglo XIX cuando los trabajos críticos emprendidos desde mucho tiempo antes para profundizar en la significación del postulado de las paralelas conducen por fin a la fundación de la geometría hiperbólica, gracias a los trabajos independientes de Gauss, Lobachevski y Bolyai. La geometría elíptica, introducida por Riemann a mediados del siglo XIX, ilustra un segundo ejemplo de geometrías no euclídeas, que serán ampliamente difundidas e interpretadas después de 1868. A lo largo del siglo, la revisión cada vez más atenta de los fundamentos del análisis, reforzada por la difusión de las geometrías no euclídeas, lleva a los geómetras a un análisis crítico de los principios y de los fundamentos de la geometría clásica. La notable síntesis de Hilbert en este campo inspirará grandemente a la escuela axiomática del siglo XX. La geometría analítica, por su parte, conoce una expansión brillante, marcada por los trabajos de la escuela francesa sobre las notaciones y el principio de los multiplicadores, por el papel dominante de Plücker en la renovación de los métodos y la extensión del concepto de coordenadas, por la introducción de la geometría reglada y de los espacios de *n* dimensiones y por la intervención del álgebra lineal. También durante el siglo XIX, la renovación de los métodos de estudio de las curvas y superficies algebraicas suscita el desarrollo de una disciplina nueva: la geometría algebraica, que tomará su forma definitiva en el siglo XX y conocerá entonces un desarrollo rápido. La geometría diferencial

moderna será obra de los trabajos fundamentales de Monge, Gauss y Riemann.

Aunque la topología había sido presentida antes por Leibniz bajo el nombre de geometría de situación, y a ella están ligados problemas célebres como el de los puentes de Königsberg, el de los nudos y el de coloreado de un mapa geográfico, esta disciplina no comienza a dibujarse como tal hasta los trabajos de Cayley, Listing y Möbius. Fue Riemann quien fundó verdaderamente esta nueva rama de las matemáticas, a la que consideró como el estudio de las propiedades invariantes bajo el efecto de transformaciones biunívocas continuas. El ulterior desarrollo de la topología fue influenciado por la célebre teoría de conjuntos de Cantor, por los progresos de la teoría de los números reales de Dedekind y de Bolzano, y por el estudio de las funciones de variables reales.

Ya desde el siglo XVII, Leibniz había intentado extender los límites de la lógica de Aristóteles y abordar el estudio de las operaciones lógicas con proposiciones mediante el análisis de las formas del lenguaje habitual y del pensamiento científico. Este ambicioso proyecto de Leibniz tuvo poca resonancia, y hará falta esperar hasta mediados del siglo XIX, con los trabajos de la escuela inglesa, para asistir a la colocación de las verdaderas bases de la lógica matemática. Al comienzo de este siglo, algunos autores ingleses (Peacock, Babbage y J. Herschel) resaltan el fundamento lógico de las matemáticas; después, De Morgan se preocupa por presentar la lógica bajo una forma matemática y por analizar, bajo la perspectiva lógica, el conjunto de los símbolos, las operaciones y las leyes matemáticas. George Boole dio un impulso decisivo a esta doble corriente de investigaciones, lo que le valió el ser considerado como el verdadero creador de la lógica matemática moderna. Bajo la influencia de Boole, se constituyó una escuela de lógica simbólica que preparó la unificación progresiva de la lógica y la matemática. La importancia adquirida por la lógica matemática desde finales del siglo XIX proviene de los trabajos emprendidos por De Morgan y Boole, que se desarrollaron gracias a las contribuciones de los matemáticos Jevons (inglés), Peirce (americano), Schröder, Hankel y Frege (alemanes) y Peano (italiano). Los *Principia mathematica* de Russell y de Whitehead, marcan un momento culminante en la edificación de la lógica matemática a principios del siglo XX.

En teoría de números, el siglo XIX se abre con la notable obra de

Gauss: *Disquisitiones arithmeticæ,* que ocupó el centro de la literatura sobre el tema. Después de Gauss, la teoría de números se ha enriquecido, entre otros, con los imaginarios de Galois, con el método fundamental de reducción continua de Hermite, con importantes resultados obtenidos en el tema del enigmático teorema de Fermat, con teorías sobre los cuerpos de números algebraicos y de números ideales, con resultados importantes sobre la distribución asintótica de los números primos y sobre los números trascendentes.

La escuela biométrica inglesa contribuyó grandemente durante el siglo XIX al desarrollo de la teoría de probabilidades y de la estadística. Animada por Galton, Weldon y Pearson, esta escuela, a la que debemos mucho, nos ha legado la noción de correlación y de esperanza matemática y las primeras comprobaciones de hipótesis estadísticas, y fue la responsable de la introducción de conceptos como el de regresión y dispersión condicionada. En el tema de los fenómenos colectivos aleatorios, es importante la obra del matemático belga Quetelet. Los trabajos de los matemáticos rusos Chebychev, Markov y Liapunov son notables por lo que se refiere a la teoría de errores (introducida por Laplace) y las propiedades de la convergencia en probabilidad. Asimismo, los matemáticos franceses Poisson, Poincaré y Borel destacan también por sus estudios sobre el azar y consideraciones de conjunto de sucesiones infinitas de ensayos, etc. Subrayemos, por último, que problemas propuestos por la física, como los de la teoría cinética de la materia (movimiento browniano) y de los gases, de la distribución del conjunto de sistemas mecánicos son el origen de investigaciones interesantes sobre las leyes de distribución estadística (Poisson, Maxwell, Boltzman, etc.). A principios del siglo XX no hay campo científico en el que sea ignorado el concepto de variable aleatoria.

El siglo XIX asiste igualmente a la creación y considerable expansión de la física matemática, con los trabajos de Fourier, Sadi Carnot, Poisson, Green, Kelvin, Stokes, Maxwell y Gibbs. Utilizando los recursos del instrumental matemático, proporcionará fecundos temas de estudio y orientará así la evolución de ciertas ramas matemáticas.

CONDICIONES NUEVAS DEL PROGRESO

Las condiciones del trabajo científico en el siglo XIX cambiaron profundamente con respecto a las que prevalecían en el siglo anterior. La Revolución francesa, y después el Imperio, crearon condiciones extremadamente favorables para el desarrollo futuro de las matemáticas, además de preparar el camino a la revolución industrial en el continente europeo. La reforma de la enseñanza superior, científica y técnica, realizada en Francia por la Revolución, estimuló el cultivo de las ciencias físicas y creó nuevas clases sociales que consideraban las cosas de forma diferente y cuyo interés por la educación científica y técnica era manifiesto. Las ideas democráticas invaden la vida académica, las formas antiguas de razonamiento se vuelven a discutir seriamente, la enseñanza se organiza sobre bases renovadas.

La democratización creciente de la enseñanza superior, el crecimiento cierto del sentimiento nacional y la profesionalización de la actividad del matemático constituyen el factor decisivo en el desarrollo de las diferentes ramas de las matemáticas en el siglo XIX. De ello resultará directamente un aumento considerable del número de investigadores, y se asistirá a una verdadera explosión del número de publicaciones científicas.

En las universidades y las escuelas superiores, se reserva a las matemáticas un lugar mucho más importante que en el pasado; el álgebra, la geometría, el análisis y la mecánica figuran ventajosamente en los planes de estudio. Los estudiantes reciben así una enseñanza que les permite adquirir una base sólida sobre la que podrán edificar a continuación. Los que se sienten atraídos por la investigación científica saben que pueden orientarse hacia la carrera del profesorado, porque ésta está dotada de una importante función social que libera al profesor de las preocupaciones materiales más inmediatas. Los maestros a quienes se confían las principales cátedras se complacen en comunicar a sus alumnos sus descubrimientos, e incluso les asocian a ellos; las comunicaciones entre científicos son más continuadas y sus trabajos se conocen más rápidamente. La reforma de la enseñanza ha favorecido la eclosión de vocaciones mucho más numerosas, poniendo la enseñanza en contacto con la investigación y abriéndola a clases más amplias de esta sociedad renovada.

En el siglo XIX se contempla también el desarrollo de un sentimiento nacional mucho más profundo que anteriormente, período en el cual científicos eminentes como Huygens, los Bernoulli, Euler, Lagrange habían dividido una parte importante de su vida entre diferentes países. Muy al contrario, tales intercambios serán raros en el siglo XIX, y el verdadero oficio del matemático profesional se ejercerá en la patria de origen, constituyendo así un factor eminente de progreso científico.

Esta corriente de origen francés se extiende a los otros países de Occidente, particularmente a Alemania, con la acción eficaz de Von Humboldt, y la expansión geográfica de la cultura matemática se manifiesta a finales del siglo XIX en numerosos países, incluyendo Estados Unidos y Rusia. Resultará de ello un crecimiento manifiesto de la productividad científica de acuerdo con una ley de crecimiento exponencial[1]. Según Taton, el total anual de las publicaciones se duplica entre los años 1870 y 1909.

PRINCIPALES CENTROS DE ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Los focos principales se sitúan en las universidades y las escuelas, más que en las academias, que abandonan algo su papel de inspiradoras para limitarse a difundir, mediante sus publicaciones, los descubrimientos más recientes de la ciencia. Durante el siglo XIX, Francia, Alemania e Inglaterra son los principales centros matemáticos, mientras que Italia vuelve a salir a la superficie y los Estados Unidos y Rusia hacen su aparición por primera vez en este campo.

Cuna indiscutible de los estudios matemáticos desde la Revolución francesa, Francia siguió siendo durante todo el siglo XIX uno de los primeros centros de enseñanza de las matemáticas. Fundada en 1794, la Escuela Politécnica de París formará durante cerca de 50

---

[1] En general, el número de científicos o de publicaciones tiende a duplicarse en el curso de un período de diez a quince años. Además, cada vez que se duplica la población, el número de científicos se triplica, y hay aproximadamente siete científicos vivos por cada ocho que hayan existido en toda la historia. Sin embargo, el crecimiento exponencial de la ciencia alcanza un límite (curva logística), más allá del cual la tasa de crecimiento disminuye y la curva alcanza entonces un límite de saturación previsible.

años una pléyade de matemáticos, y la lista de los antiguos alumnos que alcanzan la celebridad en este campo es larga. Gracias a la enseñanza impartida por sus profesores, un gran número de estudiantes y de investigadores extranjeros se sentirán atraídos por París durante el primer tercio de siglo. La creación de la Facultad de Ciencias, de la Escuela Normal Superior, de las Escuelas Especiales de Minas, de Caminos y de Ingenieros Navales pondrá fin hacia mediados de siglo, al casi monopolio de la politécnica, pero manteniendo siempre el renombre de la enseñanza francesa. Felix Klein calificaba los cursos publicados por la Escuela Politécnica en los siguentes términos: «Toda una serie de tratados clásicos admirables que siguen siendo aún hoy la base del estudio matemático de toda Alemania».

Dominada por el matemático más grande de la época, Gauss, la escuela matemática alemana conoce éxitos resonantes en numerosos campos, y supera incluso a la escuela francesa, tanto por el número de sus centros de actividad matemática como por sus representantes. Entre los centros más activos, es preciso citar a Gotinga, marcada por la talla imponente de Gauss, y a finales de siglo, por el eminente geómetra Hilbert y su escuela; Berlín, donde Weierstrass formará a numerosos discípulos; Königsberg, con sus siete puentes, es célebre en topología, por la enseñanza del matemático Jacobi y, principalmente, por una escuela de física matemática.

La escuela británica no se liberó de su sujeción demasiado servil a la tradición newtoniana hasta principios del siglo XIX, gracias a la modernización de los métodos de enseñanza y, especialmente, a la aceptación gradual de los beneficios de la notación infinitesimal de las matemáticas continentales. Los resultados no se hicieron esperar, y la escuela británica desempeño un papel preponderante en la elaboración de la lógica matemática, del álgebra lineal y de la geometría algebraica, en el desarrollo de la física matemática y en la fundación de la célebre escuela de biometría inglesa.

Italia conoce una renovación matemática importante durante la segunda mitad del siglo XIX, gracias a una notable obra original en geometría algebraica y en geometría diferencial. Los matemáticos italianos van a significarse también en el estudio lógico de los principios matemáticos.

Otros países producirán algunos matemáticos de talento. Es el caso de Suiza, Bélgica y los Países Bajos, mientras que nuevas

regiones entrarán en el campo de las matemáticas: Escandinavia con Abel, Rusia con Lobachevski, Markov y Liapunov, Hungría con Bolyai y Checoslovaquia con Bolzano. Subrayemos finalmente la entrada en escena, por primera vez, de los Estados Unidos de América en la segunda mitad del siglo XIX con las importantes contribuciones de Benjamín Peirce, G. W. Hill y Josiah W. Gibbs.

LAS REVISTAS Y SOCIEDADES MATEMÁTICAS

Si el siglo XVII fue la época de las correspondencias y las polémicas entre científicos[2] y el XVIII desempeñó un papel preponderante en la fundación de las academias, el siglo XIX (el siglo de las revistas) se caracteriza porque los investigadores publican rápidamente sus descubrimientos, facilitando así la difusión de los conocimientos. Esta extensión de las investigaciones se verá favorecida grandemente por la creación de revistas científicas en diversos países.

Después de la Revolución francesa, la primera de estas revistas parece ser el *Journal de l'Ecole Polytechnique* (1795); después vienen los célebres *Annales de mathématiques* de Gergonne, que aparecen en Nimes entre 1810 y 1831, y son durante bastante tiempo las únicas revistas consagradas exclusivamente a las matemáticas. Entre tanto, Alemania toma la iniciativa con la fundación en 1826 del *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de Crelle, que existe todavía en la actualidad. Poco después, Joseph Liouville funda en París, en 1836, el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* que tampoco ha dejado de publicarse desde entonces. En la misma época, los *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences* de París, fundados en 1835, aseguran la rápida difusión de los nuevos resultados. En Francia, Pasteur funda, en 1864, los *Annales de l'Ecole Normale Supérieure,* y a continuación Darboux crea el *Bulletin des Sciences Mathématiques* en 1870. En 1872, la *Société Mathématique de France* edita su importante bole-

---

[2] La tendencia a las polémicas por una prioridad calurosamente defendida disminuye a medida que se hace familiar la idea de lo inevitable. Así, el porcentaje de controversia es del orden del 92% en el siglo XVII, del 72% en el siglo XVIII, y baja al 59% durante la segunda mitad del siglo XIX.

tín. Subrayemos la aparición de las primeras revistas consagradas a la enseñanza de las matemáticas: los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1842) y *L'Enseignement Mathématique*, fundado por Laisant y Fehr en 1899.

Fuera de Francia, encontramos los *Philosophical Transactions* de Londres, los *Mathematische Annalen* de Leipzig (1868), los *Acta Mathematica* de Estocolmo (1882), el *American Journal of Mathematics* (1878), y otros muchos. Subrayemos que la primera revista consagrada principalmente a la pedagogía de las matemáticas fue fundada por J. C. J. Hoffman en 1870.

El siglo XIX vio nacer igualmente las sociedades matemáticas de diversos países: *London Mathematical Society* (1865), *Société Mathématique de France* (1872), *Edinburgh Mathematical Society* (1883), *Circolo Matematico di Palermo* (1884), *American Mathematical Society* (1888), *Deutsche Mathematische Vereinigung* (1890). Estas sociedades científicas publican revistas especiales tales como los *Proceedings of London Mathematical Society*, los *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, el *Bulletin de la Société Mathématique de France*, etc.

A finales del siglo XIX se desarrolla la institución de los congresos matemáticos internacionales, en donde se reúnen los matemáticos del mundo entero. Sus exposiciones y conferencias raramente carecen de interés y son, a veces, la ocasión de confrontaciones apasionantes. El primero de todos fue el de Zürich en 1897, y el segundo, celebrado en París en 1900, fue la ocasión ofrecida a Hilbert para establecer a la vez el notable balance de las investigaciones recientes y una lista de 23 problemas particularmente difíciles de resolver.

7. LA EPOCA DE GAUSS Y CAUCHY

INTRODUCCIÓN

Las figuras dominantes en esta época son, evidentemente, Gauss, el príncipe de las matemáticas, y Cauchy, uno de los más ilustres matemáticos que haya dado Francia.

La imponente talla de Gauss marca, por así decirlo, la transición entre el siglo XVIII y el XIX porque, por una parte, su gusto pronunciado por el trabajo solitario, su habilidad para manejar igualmente bien las matemáticas puras y las aplicadas, su preocupación constante por la astronomía y su frecuente uso de la lengua latina están ligados de alguna manera a las actividades del siglo XVIII y, por otra parte, la naturaleza de sus trabajos anuncia ya el espíritu del nuevo período.

Sus *Disquisitiones aritmeticæ* son una colección de aportaciones importantes de sus predecesores; contienen un enriquecimiento tal que marca el comienzo de la moderna teoría de números. Sus trabajos en astronomía, en geodesia y en cartografía contribuyeron grandemente a enriquecer el patrimonio de las ciencias experimentales y aplicadas. Preocupado por diversos problemas teóricos planteados por estas ciencias aplicadas, Gauss desarrolló un marcado interés por la geometría en general y, en particular, por la geometría no euclídea. Se interesó también por casi todas las ramas de las matemáticas y, en la mayoría de estos campos, sus originales contribuciones prepararon el camino hacia nuevas cimas o nuevos descubrimientos.

Autor de más de setecientas memorias y libros, Cauchy introdujo innovaciones en diversos aspectos de las matemáticas. Fundador de la teoría de las funciones analíticas, hizo progresar de modo gigantesco la teoría de determinantes y la teoría elástica de los cuerpos y contribuyó, de una manera sistemática, a instaurar el rigor en el análisis. Cauchy tocó numerosos temas científicos, y sus

cientos de memorias constituyen una obra que le coloca entre los más grandes por su calidad intrínseca.

Durante este fértil período, queremos también rendir homenaje a algunos científicos que se significaron también en el campo de las matemáticas. Al no poder citarlos a todos, mencionaremos sólo a algunos, como Dirichlet, Abel, Jacobi y Bolzano, dando una breve exposición de sus contribuciones en cada caso.

GAUSS

Karl-Friedrich Gauss (1777-1855) nació en Gotinga (Alemania), el 30 de abril de 1777. Su madre era una mujer inteligente pero poco instruida, y su padre, llamado Gerhard, fue calificado por Karl como «digno de estima», pero también como «dominante, rudo y poco refinado». Su madre había sido sirvienta antes de convertirse en la segunda esposa de su padre, que vivía pobremente ejerciendo diversos oficios: jardinero, jornalero, contramaestre para el mantenimiento de las canalizaciones, tesorero de una pequeña caja de seguros, etc. De niño, Karl debía ser respetuoso y obediente con un padre que no veía la utilidad de instruir a su hijo. Por el contrario, su madre esperaba mucho de su «maravilloso» Karl, y aunque su matrimonio fue bastante desgraciado, se consagró enteramente a la carrera de su hijo. Gauss testimonió mucho afecto y gratitud durante toda su vida a su madre, que murió a los noventa y siete años, habiendo pasado los últimos veintidós años de su vida en la casa de Karl.

Sin ayuda de ningún tipo, Gauss aprendió a «calcular antes de hablar». A los tres años, corrigió un error en la paga de los obreros de su padre, y por sí solo estudió y profundizó la aritmética. A los ocho años mostró su genio precoz con ocasión de un problema propuesto por su profesor de la escuela elemental para ocupar a sus alumnos: encontrar la suma de los cien primeros números naturales. Gauss asombró literalmente al tosco y autoritario profesor revelándole rápidamente la respuesta escrita en su pizarra. Completamente estupefacto ante este rasgo de genio, el profesor tuvo la sabiduría de procurarle libros de aritmética para que el joven Gauss pudiera proseguir su aprendizaje de las matemáticas.

A los once años Gauss conoció a Martin Bartels, entonces

profesor ayudante de la escuela y más tarde profesor de Lobachevski. Impresionado por su inteligencia, Bartels habló de él al duque Carlos Guillermo, quien le envió a estudiar a sus expensas, primero a un colegio de la ciudad y luego a la universidad de Gotinga, en 1795. Ya a su entrada en el colegio Gauss poseía una formación clásica y científica que sobrepasaba netamente, en esa época, la de un estudiante de quince años. Además de estar familiarizado con la geometría elemental, el álgebra y el análisis, Gauss había adquirido habilidades muy excepcionales con respecto a los números. Durante su estancia en el colegio, perfeccionó sus conocimientos de aritmética de los números, estudió los *Principia* de Newton y el *Ars conjectandi* de Bernoulli, y ello simplemente porque la mayor parte de las otras obras clásicas de matemáticas no estaban disponibles. Ello no le impidió formular el método de los mínimos cuadrados, descubrir la ley de reciprocidad cuadrática, formular la hipótesis del teorema de los números primos y encontrar resultados compatibles con una geometría no euclídea.

A los diecinueve años, Gauss duda todavía entre la filología y las matemáticas, pero el 30 de marzo de 1796 obtiene, a partir de un estudio sistemático de las ecuaciones ciclotómicas, la construcción del polígono regular de diecisiete lados con sólo la regla y el compás. Su elección está hecha, se hará matemático y, desde ese día, consigna la primera anotación en su célebre diario matemático en el que, durante dieciocho años, inscribirá 146 enunciados extremadamente breves de los resultados de sus trabajos. El interés científico e histórico de ese diario personal de tan sólo diecinueve páginas es indiscutible. Revela una visión íntima del matemático sorprendido al natural en su actividad profesional y nos permite seguir el desarrollo de su talento. Gauss, a quien le gustaban el rigor y la perfección, publicaba muy poco y muy tarde, y por ello su diario es precioso para establecer la fecha y la autenticidad de ciertos resultados, lo que permite dilucidar cuestiones relativas a la prioridad de algunos descubrimientos. Este diario no fue encontrado hasta 1898, y su contenido fue publicado por primera vez por Felix Klein en 1901.

En 1798, Gauss vuelve a Braunschweig para continuar allí sus trabajos en solitario, y al año siguiente obtiene el doctorado por la Universidad de Helmsted bajo la dirección, según parece, del matemático wurtemburgués Johann Friedrich Pfaff, quien se convierte

luego en su amigo. Su tesis de doctorado contiene una demostración de que toda ecuación polinómica, $p(x) = 0$, posee al menos una raíz, cualquiera que sea la naturaleza real o imaginaria de los coeficientes de la ecuación. Dará más adelante otras tres demostraciones del mismo teorema fundamental del álgebra en trabajos subsiguientes. En 1801, Gauss escribe y publica su gran tratado titulado *Disquisitiones aritmeticæ,* en el que presenta un resumen de los trabajos aislados de sus predecesores, da soluciones a las cuestiones más difíciles, formula conceptos y cuestiones que indicarán, durante al menos un siglo, las líneas maestras de la investigación en teoría de números. A lo largo del mismo año, Giuseppe Piazzi (1746-1826) descubre el planeta Ceres, pero no llega a determinar exactamente su posición. Gauss decide localizar este planeta, y de septiembre a diciembre de este mismo año, utiliza una teoría orbital de los planetas fundamentada en la elipse y recurre a métodos numéricos basados en el método de mínimos cuadrados, para llegar finalmente a la determinación exacta de la trayectoria de este planeta. Esta hazaña coincide con el comienzo de sus investigaciones astronómicas, que absorberán una buena parte de sus energías durante casi veinte años.

Las dos primeras contribuciones importantes de Gauss en el campo de la ciencia le valieron el ser nombrado, en 1807, profesor de astronomía y director del observatorio de Gotinga. Aparte de una visita a Berlín en el marco de un congreso de científicos, Gauss permaneció en su ciudad natal el resto de su vida. Sus trabajos de astronomía, que comenzaron con el estudio de Ceres, le llevaron, después de algunos años, a publicar su *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* en 1809, en el cual Gauss desarrolla sistemáticamente su método del cálculo orbital, en el que utiliza el método de mínimos cuadrados. El período 1801-1809 marca una etapa decisiva en la vida de Gauss. En el plano profesional, es la época en la que se opera la transición del matemático al astrónomo y al físico. Aunque el duque de Brunswick había aumentado sus emolumentos en 1801, Gauss buscaba un puesto que le garantizara una mayor seguridad, y la astronomía parecía entonces una alternativa atrayente. Poco interesado en hacerse profesor de matemáticas para confinarse a enseñar casi exclusivamente a estudiantes más o menos motivados, consideraba también Gauss que las matemáticas no eran lo suficientemente útiles por sí mismas.

Además, el puesto de astrónomo profesional llenaba en gran parte sus expectativas: poca enseñanza que impartir y mucho tiempo disponible para la investigación. También durante este período Gauss emprende una correspondencia personal y profesional con los científicos de la época sobre numerosos temas de investigación salvo, posiblemente, las matemáticas. En efecto, aparte de algunas cartas intercambiadas con su amigo Wolfgang Bolyai sobre los fundamentos de la geometría y alguna correspondencia dispersa con otros matemáticos (la escuela de París), Gauss será toda su vida un matemático solitario que no tendrá ni colaboradores, ni corresponsales, ni siquiera estudiantes que trabajen en estrecha colaboración con él. Sin embargo, Gauss inspirará a numerosos matemáticos, entre los cuales se cuentan Dirichlet y Riemann. En el campo de las ciencias, por el contrario, estará rodeado de numerosos estudiantes, colaboradores y amigos y, en particular, Von Humboldt y Von Lindenau desempeñarán un papel privilegiado en la vida profesional de Gauss y en el desarrollo de la ciencia en Alemania.

Gracias a mejoras económicas sucesivas, otorgadas por el duque, a los veintiocho años Gauss se encuentra en condiciones de contraer matrimonio con Johanne Ostof, el 9 de octubre de 1805. De su unión nacen Joseph y Minna, y durante cuatro años Johanne hace que la atmósfera familiar sea alegre y atrayente. Pero en 1807 una primera desgracia se abate sobre Gauss al enterarse de que su amigo y protector, el duque Fernando, ha muerto a la cabeza de los ejércitos prusianos contra Napoleón. Ya Gauss veía en Napoleón la personificación de los peligros de la revolución y, a raíz de este trágico accidente, sus opiniones políticas y nacionalistas evolucionan de tal manera que se convierte en un fiel nacionalista y realista. En 1809 nace un tercer hijo, de nombre Louis; de las secuelas de este nacimiento muere su amada Johanne, y además el niño sólo sobrevive algún tiempo. Estos dos acontecimientos desgraciados, sucedidos en este corto período, sumieron a Gauss en una soledad tal que no fue capaz ya nunca de superarla completamente. El 4 de agosto de 1810 se casa por segunda vez con la amiga íntima de su primera esposa, Minna Waldeck, y de este matrimonio nacen dos niños y una niña. Se dice que Gauss dominaba a sus dos hijas y discutía con sus hijos menores quienes, por otra parte, emigraron a los Estados Unidos. Sólo después de la muerte de su segunda esposa Minna, en 1831, mejoró bastante el clima familiar, gracias sobre todo a su hija

Thérèse, la más pequeña de la familia, que se convirtió en la acompañante íntima de su padre durante sus veinticuatro últimos años.

Durante los primeros años en Gotinga, Gauss realiza estudios y lleva a cabo investigaciones en diversos frentes a la vez y redacta numerosas memorias: un primer estudio riguroso de las series y la introducción de las funciones hipergeométricas (1813); una contribución importante a la aproximación de las integrales y uno de los primeros análisis de los estimadores estadísticos (1816); trabajos en astronomía, inspirados por su estudio del planeta Palas y una memoria notable sobre la determinación de la atracción de un planeta a su órbita. Se interesa también por el estudio de las líneas paralelas, la declinación de las estrellas, la teoría de números, las cantidades imaginarias, etc. Mientras tanto, Gauss emprende la edificación del observatorio de Gotinga, que, después de muchos esfuerzos consagrados a su realización material, comienza a funcionar en 1816, aunque no a pleno rendimiento hasta 1821. También en la misma época Gauss somete a su reflexión sus primeras concepciones relativas a una geometría no euclídea y, de una manera lenta y gradual, madura sus ideas y piensa incluso en publicar su nueva geometría. Pero en 1831 Gauss conoce los trabajos de Janos Bolyai, y decide escribir al padre de Janos, Farkas, para hacerle saber que él ya está en posesión de tal geometría. Después de saber que Lobachevski también había concebido una nueva geometría, Gauss se negó a utilizar su prestigio e influencia para apoyar y mantener el valor intrínseco de estas nuevas geometrías.

Desde 1817 a 1847, Gauss consagró una buena parte de su vida a trabajos de geodesia, en particular a la triangulación de Hannover y a la invención del heliotrofo. Los problemas de agrimensura con que tropezó Gauss están en la base de sus ideas sobre el método de mínimos cuadrados y de la estadística matemática. En 1828, Gauss redacta un informe de sus ideas sobre la figura de la Tierra, los errores experimentales y el cálculo de las observaciones. También durante el mismo año, Gauss viaja a Berlín para asistir a un congreso científico, invitado por Humboldt, quien será un anfitrión cordial durante todo el congreso. A partir de 1829, Gauss emprende estudios de física que le conducen a trabajos de física teórica, mecánica, capilaridad, acústica, óptica y cristalografía.

Gauss se quejaba desde hacía algunos años de una salud más

bien delicada y de una fatiga persistente; los esfuerzos físicos que debía hacer para llevar a cabo sus trabajos de agrimensura le condujeron a sufrir de asma y de una enfermedad del corazón. Por ello, decidió abandonar su participación activa en los trabajos de triangulación en 1825 y limitarse en lo sucesivo a una vida sencilla y regular, evitando los viajes y las consultas del médico. Sin embargo, los años 1830-1831 fueron particularmente difíciles para mantener esta regularidad tan deseada por Gauss. En efecto, su esposa, que sufre de tuberculosis y neurosis histérica desde 1818, se agravó de pronto, su hijo mayor deja la casa familiar y emigra a los Estados Unidos después de una discusión con su padre sobre el tema de la juventud libertina, y la nación alemana conoce un período de disturbios que Gauss desaprueba completamente. A pesar de todo, llega a superar todas estas dificultades, pero su mujer muere el 13 de septiembre de 1831. Afortunadamente, un joven y brillante físico, Wilhelm Weber (1804-1891) llega a Gotinga algunos días más tarde, y comienza una colaboración estrecha y de una sincera amistad entre los dos científicos, amistad que se interrumpirá súbitamente en 1837 a causa de una cuestión de fidelidad política, cuando Weber se declara contrario al nuevo rey Ernesto Augusto. En 1848, cuando Weber pudo volver al desempeño de sus funciones en Gotinga, continuó solo su brillante carrera, pues no podía contar ya con la colaboración de Gauss.

Aproximadamente a partir de 1840, las actividades profesionales de Gauss decrecen gradualmente, aunque sea todavía un hombre muy ocupado. En efecto, prosigue sus observaciones astronómicas, ocupa frecuentemente el puesto de decano de la Facultad de Gotinga, establece un fondo para las viudas de profesores fallecidos de Gotinga sobre bases actuariales sólidas, aprende a leer y a escribir el ruso y continúa trabajando sobre una amplia variedad de problemas matemáticos, además de asegurar una enseñanza a estudiantes cada vez mejor preparados, entre los que están Dedekind y Riemann.

Después de 1850, el estado de su corazón se deterioró rápidamente y debió reducir considerablemente sus actividades. En 1851, Gauss aprobó la tesis doctoral de Riemann sobre los fundamentos del análisis complejo y en junio de 1854, cuando ya se encontraba bajo los cuidados de un médico desde hacía varios meses, asiste feliz al curso inaugural de Riemann en Gotinga. Obligado a guardar

cama, pone al día su correspondencia y prosigue sus lecturas hasta su muerte, acaecida el 23 de febrero de 1855 durante el sueño.

Gauss, el hombre de ciencia

Comparado con los más grandes matemáticos de todos los tiempos, Gauss se impone por su talento universal y la calidad de sus contribuciones científicas. Llamado frecuentemente el «príncipe de los matemáticos», marca la transición entre el siglo XVIII y el XIX. A pesar de algunas innovaciones importantes que indujeron a otros matemáticos a enriquecerlas, no es menos cierto que Gauss fue un científico orientado más hacia el pasado que hacia el futuro. Gauss, como decía Felix Klein, es la «cima imponente que domina a todos los matemáticos del siglo XVIII». Se distinguió tanto en matemática pura como aplicada.

Sabemos ya que Gauss no publicó más que la mitad de sus contribuciones científicas durante su vida; el resto aparece en notas, correspondencias e informes de instituciones oficiales. Gauss estaba convencido, por experiencias vividas, que tenía poco que ganar queriendo comunicarse e intercambiando información con los demás. Por ello prefirió aislarse casi completamente del campo de las influencias de la actividad matemática de la época. Sin embargo, encontró más fácil y más útil comunicarse con los experimentadores y los técnicos y, en particular, colaboró estrechamente con Weber en sus experiencias sobre el magnetismo durante cerca de ocho años.

Gauss fue un hombre frío y poco comunicativo, con la ambición de conseguir éxito personal y gran renombre. Detestaba todo lo que tenía que ver con ceremonias y formalidades, desaprobaba las controversias y durante toda su vida hizo alarde de un conservadurismo y un nacionalismo respetuoso. Fuera de la ciencia, sus gustos e intereses fueron poco desarrollados. Educado pobremente, buscó durante mucho tiempo una seguridad financiera creciente y, habiéndola obtenido, rehusó sin embargo el vivir como un advenedizo.

Gracias a su prestigio y a su gran renombre, y a pesar de su aislamiento voluntario, Gauss influenció e inspiró a varios jóvenes matemáticos de su época. Los trabajos de Jacobi y Abel sobre las integrales elípticas se iniciaron gracias a una insinuación contenida

en las *Disquisitiones arithmeticæ*. El grado de acabado de sus resultados en ciertas ramas de las matemáticas fue tal que aparecieron nuevos temas en teoría de números, geometría diferencial y estadística. Gauss es probablemente, con Cauchy, uno de los últimos genios universales que han marcado el desarrollo de las matemáticas a través de los tiempos.

El teorema fundamental del álgebra

La primera demostración satisfactoria del teorema fundamental del álgebra, enunciado en 1629 por Girard, aparece en la tesis doctoral de Gauss titulada *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (nueva demostración del teorema de que toda función algebraica racional de una variable puede ser descompuesta en producto de factores reales de primero o de segundo grado). En las primeras secciones hace un análisis crítico de las demostraciones de la existencia de una raíz de la función X de la forma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Lx + M.$$

Demuestra que la raíz compleja

$$a + bi \text{ de } X(x + iy) = 0$$

corresponde al punto (a, b) del plano, y si

$$X(x + iy) = g(x, y) + ih(x, y)$$

entonces el punto (a, b) debe ser la intersección de las curvas $g = 0$ y $h = 0$. Su argumento, sumamente original, depende del gráfico de las curvas, y era difícil demostrar que debían tener al menos una intersección no vacía. En la segunda demostración de este teorema fundamental publicada en 1816, Gauss abandona las consideraciones geométricas y presenta una demostración enteramente algebraica, pero conservando todavía los coeficientes reales. La tercera demostración se basa en lo que se conoce actualmente como el teorema de la integral de Cauchy. Finalmente, la cuarta demostración (1849) es una variación de la primera, en lo que respecta al método de presentación, y Gauss extiende el campo de variación de

los coeficientes al cuerpo de los números complejos porque las cantidades imaginarias eran ya entonces, según él, conocidas generalmente.

Disquisitiones arithmeticæ

La obra fundamental de Gauss fue publicada por el autor en julio de 1801; es, pues, una obra de juventud, pero su grado de acabado y perfección le valió el ser la mejor inspiradora de todos los teóricos posteriores de la teoría de números. En efecto, este tratado sistematizó, junto con el de Legendre, las aportaciones del siglo precedente en un cuerpo de doctrina independiente, y determinó las líneas maestras de los desarrollos en este tema hasta la época moderna.

En este libro bien conocido, Gauss normaliza la notación, presenta la teoría de las congruencias, introduce los números algebraicos y la teoría de formas como la idea dominante del análisis diofántico. Precedido de una dedicatoria al príncipe Carlos Guillermo Fernando, duque de Brunswick y de Luneberg, el tratado comprende un prefacio seguido de siete secciones:

1) Números congruentes en general.
2) Congruencias de primer grado.
3) Residuos de potencia.
4) Congruencias de segundo grado.
5) Formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado.
6) Diversas aplicaciones de las nociones estudiadas anteriormente.
7) Ecuaciones que definen las secciones de un círculo.

Ya en los trabajos de Euler, Lagrange y Legendre toma forma la noción de congruencia, pero sólo con Gauss se desarrolla como teoría. La notación por congruencia y la terminología se introducen al comienzo de la sección I de la manera siguiente:

Si un número *a* divide a la diferencia de los números *b* y *c*, se dicen congruentes según *a*, si no, incongruentes. El número *a* se llamará el módulo. Si los números *b* y *c* son congruentes, entonces cada uno de ellos es residuo del otro, si no, son no residuos.

Después Gauss precisa que esos números deben ser enteros y no fracciones. Por ejemplo, -9 y $+16$ son congruentes módulo 5, -7 es un residuo de $+15$ módulo 11, pero no residuo módulo 3. Añade, en el tema de la notación:

> Designaremos la congruencia de dos números con el signo $\equiv$, añadiendo, cuando sea necesario, el módulo encerrado entre paréntesis; así $-7 \equiv 15$ (mod. 11), $-16 \equiv 9$ (mod. 5).

Gauss muestra a continuación que todos los residuos de a módulo m, para a y m fijos, vienen dados por la fórmula $a + km$ donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y que las congruencias, como las ecuaciones, pueden sumarse, restarse y multiplicarse. Se interesa también por el estudio de las congruencias que engloban variables: por ejemplo, encontrar el valor de x que satisface

$$4x \equiv 27 \text{ módulo } 14.$$

Se puede ver que $4x$ es par y que $4x - 27$ es impar. De ello se deduce que $4x - 27$ no es un múltiplo de 14.

Al comienzo de la sección II, Gauss demuestra el teorema de la descomposición única de un número compuesto en factores primos y después presenta un corto estudio sobre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Viene a continuación el estudio de la congruencia de primer grado $ax + b \equiv c$: esta congruencia posee siempre una solución cuando el módulo es primo con respecto a a, y si v es un valor apropiado de x, es decir una raíz de la congruencia, es fácil ver que todos los números congruentes con v con respecto al módulo c son también raíces de la congruencia. Por consiguiente, Gauss saca la conclusión de que la congruencia $x \equiv v$ (módulo m) proporciona la solución completa de la congruencia $ax + b \equiv c$. Después de algunas páginas consagradas a esta teoría, Gauss pasa al estudio de la congruencia de más de una variable, que se termina con la demostración del teorema fundamental de las congruencias polinómicas (demostrado por primera vez por Lagrange en 1768): una congruencia de grado m

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N \equiv 0,$$

cuyo módulo es un número primo p, que no divide a A, no puede

resolverse de más de m maneras diferentes o no puede tener más de m raíces no congruentes con relación a p.

En la sección III, Gauss emprende un estudio de los residuos de las potencias y, en particular, se encuentra allí una demostración, en términos de congruencias, del pequeño teorema de Fermat y una generalización del teorema de Wilson. Considerado por Gauss como un teorema elegante y de una gran utilidad, el teorema de Fermat se enuncia de la manera siguiente:

Si p es un número primo que no divide a a y si a^t es la menor potencia de a que es congruente con la unidad con relación a p, el exponente t será igual a $p-1$ o un factor de ese número.

En el artículo 76, Gauss se refiere al teorema de Wilson y, después de haber discutido las contribuciones de Lagrange y de Euler a la demostración de este teorema, presenta una generalización del mismo en los siguientes términos:

El producto de todos los números inferiores a un número dado A y al mismo tiempo primos con relación a ese número, es congruente relativamente a A con más o menos la unidad.

Así, cuando A es de la forma p^m ó $2p^m$ en donde p es un número primo diferente de 2, y también cuando $A = 4$, Gauss afirma que se debe tomar -1; en caso contrario, $+1$.

En la cuarta sección se presentan las congruencias de segundo grado, que plantean la cuestión de los residuos cuadráticos. Según Gauss, todos los números pueden dividirse en dos clases, una que contiene los números que son congruentes con un cuadrado, y la otra todos los demás. Los números de la primera clase se llaman «residuos cuadráticos del número tomado como módulo» y los otros no son residuos cuadráticos de ese número. Así, según Gauss, si p es un módulo primo, la mitad de los números 1, 2, 3, ..., $p-1$, serán residuos cuadráticos, es decir habrá $(p-1)/2$ residuos y otros tantos números que no lo serán. A continuación, Gauss demuestra una serie de teoremas preliminares sobre los residuos cuadráticos, que prepara su célebre demostración de la ley de reciprocidad cuadrática. Entre estos teoremas, se pueden señalar algunos:

— -1 es un residuo cuadrático de todos los números de la forma $4n + 1$ y un no residuo de todos los números de la forma $4n + 3$;
— $+2$ es un no residuo, -2 es un residuo de todos los números primos de la forma $8n + 3$;
— $+2$ y -2 son no residuos de todos los números primos de la forma $8n + 5$;
— -3 y $+3$ son no residuos de todos los números primos de la forma $12n + 5$;
— -3 es un no residuo, $+3$ es un residuo de todo número primo de la forma $12n + 11$.

Gauss formula su «teorema fundamental» de la manera siguiente:

Si p es un número primo de la forma $4n + 1$, $+p$ será un residuo o un no residuo de todo número primo que, tomado positivamente, sea un residuo o un no residuo de p. Si p es de la forma $4n + 3$, $-p$ tendrá la misma propiedad.

Después de haberlo demostrado de una manera muy rigurosa, afirma en el artículo 151 que su demostración es la más sencilla que se puede encontrar, estando incluso al corriente, como estaba él, de los trabajos de Euler y Legendre sobre el tema. Refiriéndose a estos trabajos, Gauss emite un juicio sobre el valor de estos estudios y afirma, con razón, que sólo su demostración de la ley de reciprocidad cuadrática debe ser considerada la primera. Gauss había descubierto una demostración de esta ley en 1796, y publicó en total cuatro, dos de las cuales aparecen en las *Disquisitiones*. Llamada por Gauss *theorema aureum* (joya de la aritmética), esta ley fundamental de las congruencias fue objeto de no menos de cincuenta demostraciones posteriores a las de Gauss.

La sección V, consagrada a las formas y a las ecuaciones indeterminadas de segundo grado, cubre más de la mitad de su célebre tratado. Gauss sistematiza y desarrolla considerablemente la teoría de las formas, que nace en los trabajos de Lagrange, y que volverá a tomar y desarrollar Legendre. Escribe, a este respecto, en el artículo 222:

Como muchas cosas que hemos explicado hasta aquí lo han sido también por otros geómetras, no podemos silenciar sus trabajos. El ilustre Lagrange

ha hecho investigaciones generales sobre la equivalencia de las formas (1773 y 1775) en las que ha mostrado sobre todo que, para un determinante dado cualquiera, se puede encontrar un número finito de formas tales que toda forma del mismo determinante sea equivalente a una de ellas y que, por lo tanto, todas las formas de un determinante dado pueden distribuirse por clases. Más tarde, el distinguido Legendre ha descubierto varias propiedades elegantes de esta clasificación, aunque la mayor parte por inducción, y nosotros las daremos aquí con las demostraciones. Por lo demás, nadie había pensado todavía en hacer la distinción entre equivalencia propia e impropia, aunque ésta se revela como un instrumento muy eficaz para investigaciones más delicadas.

El famoso problema (artículo 216) de encontrar todas las soluciones que sean números enteros de la ecuación general de segundo grado con dos incógnitas ha sido resuelto completamente por Lagrange (1767 y 1768). Euler lo había abordado también anteriormente, pero había limitado su investigación a deducir todas las soluciones de una sola, que suponía conocida; además, sus métodos no dan todas las soluciones más que en un pequeño número de casos.

Gauss define en primer lugar la equivalencia de formas. Sea

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

una forma binaria que puede ser transformada en una forma F' sustituyendo x e y por $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son enteros. La forma F se convierte, después de la sustitución, en

$$F' = a'x'x' + 2b'x'y' + c'y'y'$$

y obtenemos, según Gauss, tres ecuaciones

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$$
$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta$$
$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2$$

Multiplicando la segunda ecuación por sí misma, la primera por la tercera, y por sustracción, se obtiene

$$bb' - a'c' = (b^2 - ac)\,(\alpha\delta - \gamma\beta)^2$$

Se deduce, pues, que el determinante de la forma F' es divisible por el determinante de la forma F, y que el cociente es un cuadrado, por lo que los dos determinantes tendrán el mismo signo. Además, prosigue, si la forma F' puede transformarse en la forma F mediante

una transformación similar, los determinantes de las formas F y F' serán iguales, y $(\alpha\delta - \gamma\beta)^2 = 1$. En este caso, las formas se dicen equivalentes. Además, la igualdad de los determinantes es una condición necesaria para la equivalencia de las formas, pero no suficiente. Si $(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1$, F y F' se dicen propiamente equivalentes, y si $(\alpha\delta - \beta\gamma) = -1$, se dicen impropiamente equivalentes. Gauss demuestra a continuación diversos teoremas sobre equivalencia de formas. Por definición, dos formas equivalentes tienen el mismo discriminante $D = b^2 - ac$, y Gauss demuestra que todas las formas con un discriminante D dado pueden distribuirse en clases, de manera que todo elemento de una clase sea propiamente equivalente a cada uno de los elementos de la clase. Gauss da también criterios para la representatividad de la clase, y la forma más sencilla que posee un determinante D tiene las características siguientes: $a = 1$, $b = 0$, $c = -D$; ésta se llama entonces la forma principal, y la clase a la que pertenece lleva el nombre de clase principal. Se encuentra también, en esta larga sección, un estudio de la composición de formas (producto), así como la forma ternaria cuadrática, tratada de manera semejante a como estudia las formas binarias.

El objetivo principal considerado por Gauss en su estudio de la teoría de las formas consiste en elaborar un conjunto de teoremas de la teoría de números. Además, muestra cómo utilizar esta teoría de las formas para demostrar cierto número de teoremas sobre los enteros. Por ejemplo, Gauss demuestra que todo número primo de la forma $4n + 1$ puede ser representado como una suma de cuadrados, de una única manera, y que todo número primo de la forma $8n + 1$ ó $8n + 3$ puede ser representado mediante la forma $x^2 + 2y^2$ (para x e y enteros), de una única manera, etc. Subrayemos algunas aplicaciones a propósito de las formas ternarias: la primera demostración del teorema de que todo número puede ser representado como una suma de tres números triangulares y una prueba de que todo entero positivo se expresa como una suma de cuatro cuadrados (demostrado por Lagrange).

Gauss consagra la sección VI a diversas aplicaciones de la teoría de números a diferentes ramas de las matemáticas. Así, trata de la resolución de fracciones por descomposición en fracciones simplificadas y la conversión de fracciones ordinarias en fracciones decimales. A continuación, presenta un nuevo método de exclusión, aplicable a la resolución de las ecuaciones indeterminadas de segundo

grado. Finalmente, Gauss ofrece métodos nuevos para distinguir los números primos de los números compuestos, que permiten encontrar los factores primos de los números compuestos.

En la última sección de sus *Disquisitiones,* Gauss establece la teoría general de las funciones circulares.

Partiendo de la ecuación ciclotómica (ecuación para la división de un círculo) $x^n - 1 = 0$, establece en primer lugar que n debe ser un número primo impar. En virtud del teorema de De Moivre, las raíces de esta ecuación son

$$x_j = \cos \frac{2k\pi\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi\theta}{n} \text{ donde } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Los números complejos x_j son los vértices de un polígono regular de n lados que se encuentran sobre la circunferencia del círculo. Gauss demuestra que las raíces de esta ecuación pueden expresarse racionalmente en términos de las raíces de una sucesión de ecuaciones

$$W_1 = 0, W_2 = 0, \ldots$$

Los grados de W_i son precisamente los factores primos de $n - 1$. Como cada $W_i = 0$ puede resolverse mediante radicales, se deduce que la ecuación ciclotómica también lo es. Este resultado es importante para la resolución de la ecuación algebraica general de grado n, porque demuestra que es posible, por ejemplo, resolver por radicales una ecuación de grado 7 si éste es factor de $n - 1$. Asimismo, el resultado de Gauss es particularmente significativo para el problema geométrico de la construcción de los polígonos regulares de n lados. Convierte la división del círculo en n partes en la solución de tantas ecuaciones (W_i) como factores haya en $n - 1$, si n es un número primo, y el grado de las ecuaciones está determinado por la magnitud de los factores. Si $n - 1$ es una potencia de 2, lo que ocurre si el valor de n es 3, 5, 17, 257, 65, 513, etc. (donde $n = 2^m p_1 p_2 \ldots p_i$ con m entero positivo cualquiera y p_i números primos de Fermat distintos) el seccionamiento del círculo se reduce a ecuaciones cuadráticas solamente (el grado de cada W_i es necesariamente 2) y las funciones trigonométricas de los ángulos P/n, $2P/n$, etc., (P es el período 2π) pueden expresarse mediante raíces cuadradas. De esta manera estamos en condiciones de construir todos los polígonos de un número primo de lados n si $n - 1$ es una potencia de 2. En particular, Gauss consiguió construir el polígono regular de

17 lados gracias a este resultado, de una importancia capital, así como dar el valor del coseno del ángulo $P/17$:

$$\cos\left(\frac{p}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} + \frac{1}{8}\sqrt{[17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} - 2\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}]}$$

De la misma manera se puede construir también un polígono regular si n es un número primo de la forma $2^{2^v} + 1$. Gauss termina su tratado presentando una condición necesaria para la construcción de un polígono regular de n lados, condición que será demostrada por Wantzel en 1837.

Otros resultados de Gauss en teoría de números

Recordemos que el contenido de las *Disquisitiones* de Gauss es una obra de juventud que será enriquecida con trabajos subsiguientes en teoría de números. Durante el segundo decenio del siglo XIX, Gauss emprendió investigaciones con el fin de establecer leyes de reciprocidad para las congruencias de grado superior a dos. Consiguió formular una ley de reciprocidad bicuadrática hacia 1830, así como una ley de reciprocidad cúbica. Con ocasión de estas investigaciones, Gauss utilizó los «enteros complejos», con el fin de garantizar que su teoría fuera sencilla y elegante. Introducido por Euler y Lagrange, el entero complejo adquirió una importancia considerable en teoría de números gracias a los trabajos de Gauss. Número de la forma $a + bi$ donde a y b son enteros, el entero complejo posee cuatro unidades: ± 1, y $\pm i$. Es compuesto si es el producto de dos enteros diferentes de las unidades. Por ejemplo,

$$5 = (1 + 2i)\,(1 - 2i)$$

es compuesto, mientras que 3 es un entero complejo primo. Además, Gauss mostró que el conjunto de los enteros complejos posee esencialmente las mismas propiedades que el de los enteros habituales. En particular, el teorema de la factorización única se aplica a los enteros complejos con tal de que las cuatro unidades no sean consideradas como factores distintos.

Gauss se interesó también por el teorema de la distribución de

los números primos y, mediante la tabla de números primos, formuló la hipótesis de que $\pi(x)$ difiere poco de $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$.
Además, Gauss conocía la relación

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log t}}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

pero no sabemos si disponía de una demostración de ese teorema. Habrá que esperar a los trabajos de Chebichev, La Vallée-Poussin y Hadamard para establecer definitivamente este teorema fundamental de la teoría analítica de números.

Los trabajos geométricos de Gauss

El interés de Gauss por la geometría se manifestó en numerosos trabajos geométricos surgidos principalmente de sus preocupaciones por diversos problemas teóricos planteados por la astronomía, la geodesia y la cartografía. Consciente de la necesidad de una concepción más amplia de la geometría, fue inducido a interesarse por diversos problemas de naturaleza geométrica: ciclotomía, pentágonos esféricos, rotación de una recta que pasa por el origen en tres dimensiones, formas cuadráticas, curvatura de superficies y geometría no euclídea.

La publicación, en 1827, de sus *Disquisitiones circa generales superficies curvas* supone una contribución definitiva a la geometría diferencial de superficies en el espacio de tres dimensiones. Partiendo de la representación paramétrica de Euler de las coordenadas (x, y, z) de todo punto de una superficie

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

Gauss obtiene las ecuaciones siguientes para expresar el vector tangente $dx = adu + a'dv$, $dy = bdu + b'dv$, $dz = cdu + c'dv$ donde $a = x_u$, $a' = x_v$, $b = y_u$, $b' = y_v$, $c = z_u$, $c' = z_v$.
Para simplificar las representaciones, introduce los determinantes

$$A = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

que son tres componentes de un vector normal, y supone que

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \neq 0$$

La longitud de un arco de una superficie en R^3 viene dada por la relación

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

que Gauss transforma de la manera siguiente:

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$

donde

$$E = a^2 + b^2 + c^2, \; F = aa' + bb' + cc', \; G = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Esta expresión para *ds*, el elemento de distancia sobre la superficie, constituye esencialmente la primera etapa en el desarrollo de la geometría de Riemann. En posesión de estas relaciones fundamentales, Gauss emprende un estudio sistemático de la teoría de superficies. Expresa en primer lugar el ángulo entre dos curvas de una superficie en términos del coseno de ese ángulo, y después aborda el tratamiento de la curvatura de una superficie y hace la observación de que las propiedades de una superficie dependen únicamente de las cantidades *E, F* y *G* definidas más arriba. En particular demuestra que si dos superficies son isométricas (aplicables la una sobre la otra) el producto de los dos radios de curvatura principales es el mismo en dos puntos correspondientes *(theorema egregium)*. En su memoria de 1827, Gauss trata también del problema de determinar las geodésicas sobre las superficies. En términos de coordenadas polares, donde p y q representan respectivamente el radio y el ángulo, Gauss obtiene

$$ds^2 = dp^2 + Gdq^2$$

y, en virtud de su *theorema egregium*, con $E = 1$ y $F = 0$, se tiene

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial p^2}$$

donde K es la llamada curvatura gausiana.

Provisto con este resultado, Gauss consigue demostrar un teorema célebre sobre la curvatura de un triángulo cuyos lados son geodésicas.

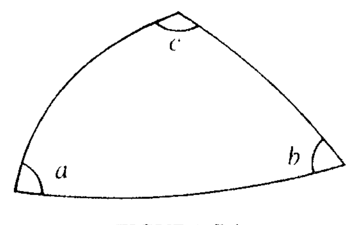


FIGURA 7.1

Determina que la curvatura total de un triángulo geodésico *abc* viene dada por

$$\int \int K\, ds = a + b + c - \pi$$

Sus trabajos en geometría diferencial demuestran que el estudio de la geometría de una superficie puede hacerse concentrándose esencialmente en la superficie misma. Además, revelan que la superficie puede ser un espacio en sí misma, porque todas sus propiedades están determinadas por la cantidad ds^2. Así, las «líneas rectas» sobre la superficie son las geodésicas y, por consiguiente, la geometría de la superficie es no euclídea.

Durante esos primeros años, en Gotinga, Gauss maduró su concepción de la geometría no euclídea, que se remontaba ya a su adolescencia en 1792, en la que concebía como posible una geometría lógica sin el postulado de las paralelas de Euclides. Convencido de la ineficacia de las diversas tentativas anteriores para demostrar el postulado de las paralelas, Gauss, a pesar de su profundo conservadurismo y su miedo al ridículo, acepta cada vez más la idea de que se debe salir de los senderos trillados e intentar más bien elaborar una nueva geometría. A partir de 1813 desarrolla esta nueva geometría, llamada sucesivamente antieuclídea, geometría astral y, por fin, geometría no euclídea. De 1813 a 1831, Gauss elabora su geometría y encuentra numerosos resultados nuevos, pero no se

decide a publicarlos antes de su muerte. Sin embargo, en 1831 escribe un ensayo sobre las líneas paralelas, y en una carta dirigida a H. K. Schumacher puede leerse lo que sigue:

Después de haber meditado durante casi cuarenta años sin escribir nada... me he tomado la molestia al menos de poner por escrito algunas de mis ideas, con el fin de que no desaparezcan conmigo.

Es también al año siguiente cuando conoce los trabajos de Janos Bolyai y, en una carta dirigida al padre de Janos, le comunica sus propios trabajos sobre el tema y reivindica, de alguna manera, la propiedad de sus descubrimientos en estos términos:

Si digo que soy incapaz de elogiar este estudio, quizá le extrañe. Pero no puede ser de otra manera, porque ello equivaldría a alabar mis propios trabajos. En efecto, el enfoque preconizado por vuestro hijo y los resultados que ha obtenido coinciden casi enteramente con las ideas que han ocupado mi espíritu desde hace 30 ó 35 años. No tengo la intención de publicar estas meditaciones durante mi vida, pero he decidido escribirlas para que puedan conservarse. Es, en consecuencia, una sorpresa agradable para mí ahorrarme este trabajo, y me llena de alegría el pensamiento de que es precisamente el hijo de mi amigo de siempre el que me ha suplantado de forma tan notable...

Dejamos de lado la presentación del contenido matemático de su nueva geometría; volveremos sobre ello más adelante, con motivo de la exposición de los trabajos de Bolyai y Lobachevski. Subrayemos, sin embargo, que el contenido de esta carta hirió profundamente a Janos y le desanimó de tal manera que abandonó sus actividades científicas desde entonces.

Algunos otros trabajos matemáticos de Gauss

De sus otras memorias matemáticas, muy numerosas, nos contentaremos con señalar algunos resultados específicos. A pesar de los trabajos de Wessel y Argand sobre la representación de los números complejos, habrá que esperar a las contribuciones de Gauss sobre el tema para asistir a la aceptación de los números complejos. Las ideas de Gauss sobre las cantidades imaginarias se remontan a

mucho antes porque, ya en 1799, en su disertación inaugural, presupone una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano cartesiano y los números complejos. Representa el número $x + iy$ mediante las coordenadas (x, y) de un punto en el plano real. Pero sus ideas se hacen más explícitas algunos años después, pues puede leerse en una carta dirigida a Bessel en 1811 que:

De la misma manera que puede representarse el dominio entero de todas las cantidades reales mediante una línea recta indefinida (la recta de los reales), puede imaginarse el dominio entero de todas las cantidades, las cantidades reales y las imaginarias mediante un plano indefinido en el que todo punto, determinado por su abscisa a y su ordenada b, representa, por así decirlo, la cantidad $a + bi$.

Este pasaje revela que la concepción gausiana de los números complejos implica una relación directa entre los reales a y b de la forma $a + bi$ y los ejes de coordenadas de un sistema en el plano. Gauss añade también que es posible ir de un punto a otro del plano complejo siguiendo diversas trayectorias. En 1831 Gauss hace pública su descripción de la representación geométrica de los números complejos, en una memoria sobre los restos bicuadráticos presentada a la Sociedad Real de Gotinga. Presenta la representación de $a + bi$ como un punto (no como un vector como hacían Wessel y Argand) en el plano complejo y describe la adición y la multiplicación geométrica de esos números. Según Gauss, la representación geométrica revela «la significación intuitiva de los números complejos completamente establecidos y, además, no es necesario admitir esas cantidades en el dominio de la aritmética». Además, añade que si las unidades 1, -1, y $\sqrt{-1}$ hubieran sido llamadas directa, inversa y lateral en lugar de positiva, negativa e imaginaria, toda la mística que envolvía a esos números probablemente no habría existido. Finalmente, fue Gauss quien introdujo los «números complejos» en oposición a las cantidades imaginarias y utilizó la letra i para designar $\sqrt{-1}$.

Gauss introdujo también ideas fundamentales sobre las funciones de variable compleja y, más precisamente, en lo que respecta a la necesidad de tener en cuenta los límites de integración cuando son números complejos, a propósito de la integral logarítmica. Así, afirma que «el paso continuo de un valor de x a otro en el plano

complejo tiene lugar sobre una curva, y puede incluso suceder que ese paso se haga sobre diversas trayectorias». Después, prosigue, «afirmo ahora que la integral $\int \theta(z)dx$ posee un solo valor incluso sobre diversas trayectorias, con tal que $\theta(z)$ sea unívoca y que z, no se haga infinita en el espacio limitado por las dos trayectorias. En el tema del caso particular de $\int dz/z$, Gauss afirma que, partiendo de $z = 1$ y para valores de $a + bi$, se obtiene un valor único si la trayectoria no contiene el punto $z = 0$; si no, se debe añadir $2\pi i$ ó $-2\pi i$ al valor obtenido al pasar de $z = 1$ a $z = a + bi$, omitiendo el valor $z = 0$. Así, existen varios logaritmos para un $a + bi$ dado.

En diversos puntos, los trabajos de Gauss en teoría de números y en el tema del método de mínimos cuadrados coinciden con los de Legendre. En 1785, Legendre había presentado y demostrado parcialmente la ley de reciprocidad cuadrática y Gauss la presentó en sus *Disquisitiones arithmeticæ* con el «teorema fundamental», haciendo alusión vagamente a los trabajos de Legendre sobre el tema. Algunos años después, Legendre publica, en 1805, sus *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* (Nuevos métodos para la determinación de las órbitas de los cometas) en los que presenta el método de mínimos cuadrados, mientras que Gauss afirma en 1809, sólo con respecto a este método, que «nuestro principio, que hemos utilizado desde 1795, fue publicado tardíamente por Legendre [...]». Legendre replica en el mes de mayo de 1809 a las declaraciones de Gauss mediante una carta cuyo contenido es nada menos que un ataque personal intentando demostrar la inexactitud de la expresión «nuestro principio», utilizada por Gauss. Esta disputa sobre la prioridad de la invención del método de mínimos cuadrados prosiguió hasta 1820, y constituye un ejemplo entre tantos otros en el que se trata de establecer un compromiso entre la fecha de publicación, por una parte, y la naturaleza y calidad del tema tratado, por otra. Por lo demás, cuántos descubrimientos matemáticos no habrán sido atribuidos falsamente a ciertos matemáticos, al ser la cuestión de la prioridad a menudo un asunto de justicia en el que debían intervenir numerosos factores antes de pronunciarse el veredicto.

Podemos mencionar también los estudios de Gauss sobre la función gamma en sus trabajos consagrados a la función hipergeométrica; en particular, desarrolló los resultados de Legendre sobre las funciones eulerianas y encontró la fórmula de multiplicación para

$\Gamma(nx)$. Se distinguió igualmente por sus trabajos sobre las integrales elípticas, por el descubrimiento de la doble periodicidad de estas funciones en 1800, mediante la integral que da el arco de la lemniscata, por su estudio de la ecuación potencial, de las series hipergeométricas y de la teoría de las singularidades, sin olvidar sus trabajos en mecánica y astronomía.

CAUCHY

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) nació el 21 de agosto de 1789 en París, casi seis semanas después de la caída de la Bastilla. Era el mayor de una familia pobre de seis hijos y creció durante la Revolución. A pesar de la buena voluntad de su padre, Louis-François, Augustin-Louis sobrevivió al Terror pero heredó una salud insegura y delicada. Su educación primaria quedó asegurada enteramente por su padre, porque las escuelas en aquella época eran prácticamente inoperantes. El 1 de enero del año 1800, su padre fue elegido secretario del Senado y el joven Augustin-Louis continuó sus estudios en el despacho de su padre. Fue así como conoció a los grandes matemáticos franceses de la época, Laplace y Lagrange, y este último manifestó ya entonces, con respecto a él, una cierta admiración: «Nos va a reemplazar a todos como matemático». Sin embargo, su padre no descuidó su educación literaria, preocupándose de que su hijo no se limitara exclusivamente a las matemáticas. Hacia los trece años, Cauchy entró en la Escuela Central del Panteón, y allí obtuvo primeros premios en griego y en composición latina. En 1804, hace su primera comunión, deja su escuela y emprende durante diez meses estudios intensivos de matemáticas, bajo la dirección de un tutor. En 1805, Cauchy es el segundo en el concurso de entrada en la Politécnica, pero, a causa de su salud, Lagrange y Laplace le aconsejan consagrarse a las matemáticas. Diplomado por el Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Cauchy participó a partir de 1810 en las obras del puerto de Cherburgo, pero abandonó pronto su trabajo como ingeniero para consagrarse a la ciencia pura. En efecto, vuelve a París en 1813 y, a los veinticuatro años, Cauchy atrae ya la atención de los matemáticos experimentados de Francia por sus trabajos de investigación sobre los poliedros y las funciones simétricas.

En el mes de febrero de 1811, presenta su primera memoria consagrada a la teoría de los poliedros, en la que Cauchy muestra que no existen más poliedros regulares que los que tienen 4, 6, 8, 12 ó 20 caras, además de desarrollar la célebre fórmula de Euler que une las aristas, caras y vértices de un poliedro. Estimulado por Legendre, publica una segunda memoria sobre el tema en enero de 1812. Después, en 1814, presenta una *Mémoire sur la theorie des intégrales définies* (Memoria sobre las integrales definidas), seguida en 1815 de una memoria fundamental sobre los grupos de sustitución, así como una demostración de un importante teorema de Fermat: todo entero positivo puede expresarse como una suma de tres números triangulares, cuatro números cuadrados, cinco números pentagonales, etc. El año siguiente, Cauchy es merecedor del Gran Premio que ofrece la Academia por su memoria sobre *Une théorie des ondes sur la surface d'un fluide dense de profondeur infinie* (Un estudio de la teoría de las ondas sobre la superficie de un fluido denso de profundidad infinita). A sus veintisiete años de edad, Cauchy es propuesto para ocupar el próximo puesto vacante en la Academia, enseñando al mismo tiempo álgebra en la Facultad de Ciencias, física matemática en el Collège de France y mecánica en la Escuela Politécnica.

Nombrado académico por decreto en 1816, en el lugar de Monge que había sido excluido por Napoleón a su regreso de la isla de Elba, Cauchy desarrolló una actividad matemática increíble, tanto por su producción incesante como por la calidad incomparable de sus memorias sobre prácticamente todas las ramas de las matemáticas. Su reputación se extendió por toda Europa, y numerosos oyentes acudían de Berlín, Madrid, San Petersburgo, etc., para asistir a sus maravillosas conferencias, en las que Cauchy presentaba los resultados originales de sus investigaciones, particularmente en análisis y en física matemática. Se casó, en 1818, con Aloise de Bure, hija de una familia cultivada. De su unión, que duró cerca de cuarenta años, nacieron dos hijas que fueron educadas según los principios estrictos de la religión católica.

Siguiendo la tradición establecida en la Escuela Politécnica, Cauchy fue estimulado a escribir los apuntes de sus cursos, y así aparecieron sucesivamente los *Cours d'analyse de L'Ecole Polytechnique* (1821) (Curso de análisis de la Escuela Politécnica), el *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) (Compendio de las

lecciones sobre cálculo infinitesimal), y las *Leçons sur le calcul différentiel* (1829) (Lecciones sobre el cálculo diferencial). En estos tres libros, Cauchy presenta el cálculo diferencial e interal con un gran rigor, y el concepto de límite constituye la piedra angular de su análisis. A partir de 1826, publicó una especie de diario personal titulado *Exercices de mathématiques* (Ejercicios de matemáticas) que será proseguido, después de 1830, bajo el título de *Exercices d'analyse mathématique et de physique* (Ejercicios de análisis matemático y física) en el que publicará mensualmente sus trabajos de matemáticas puras y aplicadas. Pero en 1830 las intrigas políticas modificaron durante algunos años su carrera de hombre de ciencia. En efecto, ardiente realista y partidario de los Borbones, perdió su empleo por haberse negado a prestar juramento a la monarquía de julio, y decidió expatriarse voluntariamente.

Se fue a Suiza por algún tiempo, y después aceptó una cátedra en Turín, dejando su familia en París y conservando siempre su sillón en la Academia. Llamado a Praga en 1833 por Carlos X, quien le confió la educación científica del conde de Chambord, aceptó esta invitación declarando que no podía «servir mejor los intereses de su patria que revelando al heredero de Luis XIV todo el secreto de esa alta filosofía que hizo brillar el gran siglo con un resplandor tan grande». Su familia se reunió con él un año más tarde. Su trabajo de tutor fue pesado y agotador, y Cauchy conseguía difícilmente librarse de él de vez en cuando para proseguir sus investigaciones. Pudo al menos escribir una larga memoria sobre la dispersión de la luz durante este período de tutela. Pero en 1838, presionado por sus amigos de París que le incitaban a volver, Cauchy se excusó ante sus anfitriones pretextando que debía volver a París para celebrar las bodas de oro de sus padres. De regreso en Francia con el título de barón, Cauchy enseñó en varios establecimientos religiosos y fue elegido miembro de la Oficina de Longitudes en 1839, pero el gobierno de Luis Felipe no ratificó esa propuesta. La República restaurada después de la revolución de 1848 le nombró profesor de astronomía matemática en la Facultad de Ciencias, y en la Sorbona, aunque era un legitimista declarado. Después del golpe de Estado de 1852, Napoleón III le dispensó del juramento, y a este gesto condescendiente del emperador respondió, por principios, distribuyendo todo su sueldo entre los pobres de Sceaux, donde residía.

Durante los diecinueve últimos años de su vida, escribió más de

500 memorias sobre todas las ramas de las matemáticas, incluyendo la mecánica, la física y las matemáticas. Hombre universal, interesado por todo, y en particular por la poesía, autor de un trabajo sobre la prosodia hebraica, profesó siempre con fervor la fe católica. Pasó con quietud y paz los últimos años de su vida y su muerte, acaecida en Sceaux el 23 de mayo de 1857, dejó el recuerdo de una personalidad algo ambigua. Hombre sociable, moderado y sincero, fue un profesor admirable y un hábil conversador. En cambio, fanático de la religión, intentó toda su vida demostrar su superioridad, y su insaciable deseo de producir siempre más le impidió probablemente ayudar a aquellos que, como Abel y Bolzano, habrían podido beneficiarse de su inmensa influencia para dar a conocer sus trabajos. La obra científica que realizó le coloca entre los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Autor de más de setecientas memorias (sólo Euler le sobrepasa en número), su obra inmensa, en la edición moderna, llena veintisiete volúmenes en cuarto. Cauchy fue el fundador de la teoría de las funciones analíticas. Hizo experimentar inmensos progresos a la teoría de los determinantes, además de introducir el rigor en el análisis. Sus contribuciones originales se refieren en especial a las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, a la teoría de los grupos de sustitución, a la clarificación y a la formulación de los conceptos de la teoría de curvas, a los números complejos y a las congruencias polinómicas. En mecánica, escribió importantes memorias sobre el equilibrio de varillas y placas elásticas, sobre la teoría de ondas que Fresnel acababa de establecer, así como sobre el tema de la dispersión y la polarización de la luz.

Cauchy y el rigor en el análisis

Cauchy desarrolló el cálculo diferencial e integral sobre la base del concepto de límite en sus *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal,* publicadas por primera vez en 1823. En el prefacio de su tratado clásico, afirma que su principal objetivo es conciliar el rigor con la simplicidad que resulta de la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas. Cauchy prosigue rechazando el desarrollo de las series divergentes y dejando la fórmula de Taylor para el cálculo integral, pues el resto de Taylor está formulado bajo la forma de una

integral. Además, estaba al corriente de que Lagrange había utilizado la fórmula de Taylor como base de la teoría de la derivada. Pero, añade, la mayoría de los geómetras dudan en al actualidad de la utilidad de las series divergentes. Además, en ciertos casos, cuando la serie de Taylor converge, la suma de esta serie difiere, según Cauchy, de la función dada.

El concepto de límite se desarrolló gradualmente a partir del método de recubrimiento de los griegos hasta el momento en que Newton lo expresó a su manera en sus *Principia.* Ya algunos autores como D'Alembert y Lacroix habían hecho de ese concepto la base fundamental del cálculo. Sin embargo, durante todo este largo período, el cálculo era concebido como un instrumento que se ocupaba de las relaciones entre cantidades implicadas en problemas geométricos. Unicamente Euler y Lagrange se esforzaron, sin demasiado éxito, por establecer el cálculo sobre el formalismo de su concepto de función analítica. Con toda certeza, antes de Cauchy, todos los autores salvo Bolzano habían popularizado la idea de límite en sus trabajos, pero la mayor parte de su concepción seguía siendo geométrica.

En los textos de Cauchy, el concepto de límite se convierte, claramente y de manera definitiva, en un concepto aritmético sin apoyo geométrico, como puede constatarse en su definición siguiente:

> Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que llegan a diferir tan poco como se quiera de él, este último se llama el límite de todos los demás.

Esta definición da cuenta exacta de la idea intuitiva de límite, pero es verbal más que numérica. Cauchy se sirve a continuación de esta definición para definir un infinitamente pequeño, que resulta ser simplemente una cantidad variable dependiente con un límite igual a cero:

> Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente de manera que disminuyen por debajo de todo número dado, esta variable resulta ser lo que se llama un *infinitamente pequeño* o una cantidad *infinitamente pequeña.* Una variable de esta especie tiene cero como límite.

Cauchy se sirve de esta última definición para establecer órdenes sucesivos de infinitesimales, con el fin de hacer más útil y más operativo ese concepto de infinitesimal. Así, toda cantidad variable tal que su razón con α (un infinitésimo) posea un límite finito cuando α decrece, puede clasificarse como un infinitésimo de primer orden. Lo mismo ocurre con el segundo orden, en el sentido de que toda variable cuya razón con α^2 posee un límite finito cuando α decrece es un infinitésimo de segundo orden, y sí sucesivamente, las potencias de α, es decir, α, α^2, α^3, α^n son infinitésimos de primero, segundo, tercero y n orden, respectivamente.

Cauchy utilizó de nuevo su definición de límite para definir la continuidad de una función:

Sea $f(x)$ una función de la variable x, y supongamos que esta función posee un valor único y finito para cada valor de x en un entorno dado. Si para un valor de x en este intervalo, se añade un valor infinitesimal h, la función aumenta en la diferencia $f(x + h) - f(x)$, que depende, a su vez, de la nueva variable h y del valor de x. Establecido lo anterior, la función $f(x)$ será continua con respecto a x entre los límites dados si, entre esos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la función.
Se dice, además, que la función $f(x)$ es continua en el entorno de un valor particular atribuido a la variable, siempre que sea continua entre dos límites de x, incluso muy próximos, que contengan al valor de que se trata.

Esta definición de la continuidad equivale a decir $f(x)$ será continua en a si $f(x)$ se aproxima al límite $f(a)$ cuando x se aproxima al límite a. Sin embargo, dada su ambigüedad, ciertas expresiones como «suficientemente pequeña», «llega a ser y sigue siendo», serían eliminadas más adelante para ser sustituidas por expresiones numéricas bastante más rigurosas, gracias a los trabajos de Karl Weierstrass (1815-1897). Inexistente en el *Curso de análisis*, la definición de derivada de una función aparece así en el *Compendio* de 1823:

Cuando la función $y = f(x)$ es continua entre los dos límites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre los dos límites de que se trata, un crecimiento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un crecimiento infinitamente pequeño de la función. Por

consiguiente, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la *razón de diferencias*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) + f(x)}{i}$$

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, mientras que estos dos términos se aproximarán indefinida y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger hacia otro límite, sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor determinado de x, pero varía con x.

Esta definición es esencialmente la de la derivada de una función utilizada en la actualidad, si se exceptúa la utilización del límite a la izquierda y del límite a la derecha, que no aparece en Cauchy. El punto fundamental de esta definición es, evidentemente, la expresión de la derivada como un límite particular de una función. El concepto de *diferencial* es definido por Cauchy en términos de la derivada: si dx es una cantidad finita, entonces la diferencial dy de $y = f(x)$ está definida simplemente como $f'(x)dx$. Se puede decir también que las diferenciales dy y dx son cantidades escogidas de manera que la razón dy/dx coincida con la «última razón», o el límite $y' = f'(x)$ de la razón $\Delta y/\Delta x$.

Cauchy se sirve a continuación del concepto de diferencial expresado en términos de la derivada para definir las diferenciales de orden superior. Por ejemplo, como la diferencial $dy = f'(x)dx$ es, de hecho, un función de x y de dx, manteniendo dx fijo, la función $f'(x)dx$ tendrá por derivada $f''(x)dx$ y una diferencial de orden dos $d^2y = f''(x)dx^2$. En general, $d^ny = f^n(x)dx^n$, donde $f^n(x)$ es llamado por Cauchy el «coeficiente diferencial». La noción de diferencial sólo tiene una significación lógica cuando está directamente relacionada con la derivada.

Durante todo el siglo XVIII, la integración fue tratada como una operación inversa de la diferenciación. La definición de Cauchy de la derivada de una función está formulada de tal manera que la continuidad de la función resulta ser una condición necesaria para la diferenciación de la función. Es probable que Cauchy, al desarrollar una exposición rigurosa del cálculo integral sobre la base de una concepción de la integral como límite de una cierta suma, tuviera buenas razones para adoptar esta concepción que va en contra de los trabajos de sus predecesores del siglo XVIII. Consideraba, por otra

parte, que esta manera de proceder tenía la ventaja de proporcionar siempre valores reales para las integrales correspondientes a funciones reales y que era muy apropiada para todos los casos, incluso para aquellos en los que no se puede pasar generalmente de la función bajo el signo $\int$ a la función primitiva. Es por esto por lo que, según parece, Cauchy define la *integral definida* en términos del límite de las sumas integrales de la manera siguiente. Para una función $y = f(x)$ continua entre los límites dados x_0 y X, subdivide este intervalo mediante los valores $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, con $x_n = X$, y forma la suma característica de los productos

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots \\ + (X - x_{n-1})f(x_n - 1).$$

Si los valores numéricos de las diferencias $x_{i+1} - x_i$ decrecen indefinidamente, el valor de S_n alcanzará un cierto límite S que dependerá únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores límites x_0 y X. Este límite es llamado, según Cauchy, una integral definida. Denota al límite S con la notación sugerida por Fourier $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ en lugar de la sugerida por Euler

$$\int f(x)dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$$

para designar la antidiferenciación. A continuación Cauchy demuestra el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Sin embargo, su demostración no era enteramente rigurosa, porque no conocía el concepto de continuidad uniforme. Al definir la integral sin recurrir a la derivada de la función, Cauchy se vio obligado a demostrar la relación fundamental entre la derivada y la integral sirviéndose del teorema de la media: si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el abierto (a,b), entonces existe al menos un x_0 tal que $a < x_0 < b$ y

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0)$$

(Cauchy demuestra la relación $\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x$ donde $0 < \theta < 1$ y Δx es el intervalo dado.)

A pesar de todo el rigor introducido por Cauchy en el análisis, quedan todavía puntos por clarificar: la relación entre la función continua y la función diferenciable no está comprendida perfectamente (Cauchy cree que toda función continua admite necesariamente una derivada), la eliminación de ciertas frases vagas como «llega a ser y sigue siendo más pequeña que toda cantidad dada» para ser reemplazadas por una formulación más aritmética, la elaboración de una definición rigurosa del concepto de «número», en una palabra, la aritmetización del análisis está todavía por hacer, pero se ha dado un paso inmenso gracias a este gran matemático francés.

Cauchy y las series infinitas

Los trabajos de Cauchy sobre las series infinitas constituyen la primera exposición importante sobre el tema y contribuyen a introducir un cierto rigor en el aspecto de la convergencia de las series infinitas. En su *Curso de análisis,* Cauchy dice a propósito de las sucesiones:

> Una serie (sucesión) es una sucesión infinita de cantidades, u_0, u_1, u_2, ..., que se suceden en virtud de una ley determinada. Estas cantidades son los diferentes términos de la sucesión considerada.

A continuación, pasa al concepto de convergencia de una serie como sigue:

> Sea $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ la suma de los n primeros términos, donde n es un entero (número natural). Si la suma s_n tiende hacia un cierto límite s para valores crecientes de n, entonces la serie se dice convergente, y el límite en cuestión se llama la suma de la serie. Por el contrario, si la suma s_n no se aproxima a un límite determinado cuando n aumenta indefinidamente, la serie es divergente y no tendrá suma.

Cauchy muestra claramente en este pasaje que el concepto de límite está directamente implicado en la definición de convergencia de una serie, y pone de relieve el hecho de que una serie infinita puede tener una suma en el sentido de un límite. A continuación, enuncia el criterio de convergencia que lleva su nombre: una sucesión S_m

converge hacia un límite S sólo si la diferencia de S_{n+r} y de S_n, para todo valor de r y de n suficientemente grande, puede hacerse menor en valor absoluto que cualquier cantidad dada. Cauchy demostró que esta condición era necesaria a partir de la definición de convergencia, pero no pudo demostrar la suficiencia porque no disponía de una definición rigurosa de los números irracionales para apoyar su demostración.

Después de haber demostrado la condición necesaria de su criterio de convergencia, Cauchy enuncia y demuestra criterios específicos para la convergencia de series de términos positivos. Se encuentran, entre otros, los criterios de la raíz n-ésima, de la razón, de comparación, del logaritmo. Demuestra también que la suma $u_n + v_n$ de dos series convergentes converge hacia la suma de las sumas distintas, y un resultado semejante para el producto. Cauchy muestra a continuación que las series de términos negativos convergen cuando las series de los valores absolutos de los términos convergen, y deduce de ello el criterio de Leibniz para las series alternantes. Se interesó también por las series cuyos términos son funciones unívocas y continuas o funciones de la variable compleja. A propósito de las series de Taylor y, en particular, de las series de Maclaurin, Cauchy formula una observación muy importante que estipula que una serie infinita de Taylor converge hacia la función que ha sido desarrollada si el resto de Taylor tiende a cero. Mediante un ejemplo, la función $e^{-x^2} + e^{-1/x^2}$, demuestra que la serie de Taylor correspondiente no converge hacia esta función. A pesar de algunas falsas interpretaciones, como la relativa a la integración término a término de una serie, y el hecho de que no llegara a comprender el concepto de convergencia uniforme, Cauchy hizo una contribución importante a la elaboración de una teoría coherente de las series infinitas convergentes. Debemos a Cauchy un buen número de definiciones precisas y de métodos rigurosos del ánalisis moderno.

Las funciones de variable compleja en Cauchy

Cauchy nos dejó un monumento. Se trata de su teoría de funciones de una variable compleja y de su integración, una de las grandes contribuciones matemáticas del siglo XIX. Los primeros indicios de

esta teoría se encuentran en su célebre ***Mémoire sur la théorie des intégrales définies*** (Memoria sobre la teoría de las integrales definidas), leída ante la Academia de París en 1814, pero cuya publicación se retrasará hasta 1827. Cauchy se interesa en esta memoria por la validez de una técnica utilizada en aquella época, que consistía en calcular integrales definidas mediante variables complejas. Intenta hacer riguroso este paso de la variable real a la variable compleja, utilizado por Euler desde 1759 y por Laplace desde 1782 en la evaluación de las integrales definidas.

Cauchy estudia, de hecho, en esa memoria la posibilidad de intercambiar el orden de integración en las integrales dobles:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dydx = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)dxdy$$

Se puede pasar del primer miembro al segundo con tal de que $f(x, y)$ sea continua en el interior y en la frontera de la región. A continuación, Cauchy introduce dos funciones auxiliares $U(x, y)$ y $S(x, y)$ tales que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y}$$

(ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Estas funciones fueron obtenidas por Euler hacia 1777, cuando observó que toda función de $z = x + iy$ toma la forma $M + iN$, donde M y N son funciones reales, y que para $z = x - iy$ se obtiene la forma $M - iN$. Después Cauchy considera la función $f(x, y)$ dada por $\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y}$, y por sustitución de f en la integral doble, escribe

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial U}{\partial y} dydx = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial S}{\partial x} dxdy \qquad (1)$$

Asimismo, si $f(x, y)$ viene dada por

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y}$$

se tiene

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial S}{\partial y} dydx = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} dxdy \qquad (2)$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden ser utilizadas para evaluar integrales dobles en uno u otro orden de integración. Sin embargo, Cauchy considera las dos ecuaciones entre las funciones U y S como las que contienen toda la teoría. Por otra parte, habrá que esperar a 1821 para que Cauchy se ocupe de los números complejos y las variables complejas de una manera explícita en su *Curso de análisis*. En 1822, Cauchy parte de las ecuaciones (1) y (2) y deduce el teorema de la integral que lleva su nombre por combinación de esas ecuaciones, con el fin de expresar $F(z) = S + iU$, donde $z = x + iy$ y el teorema en que

$$\int_L F(z)dz = \int_{\bar{L}} F(z)dz$$

Esta integral ilustra el caso sencillo de una integración compleja a lo largo de la frontera de un rectángulo y muestra que el resultado obtenido es independiente del contorno elegido. Pero es en 1825 cuando Cauchy publica un artículo, reconocido por muchos como el más importante de los suyos. Titulado *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (Memoria sobre las integrales definidas entre límites imaginarios), Cauchy presenta en él, en primer lugar, el problema de evaluar la integral siguiente

$$\int_{a+ib}^{c+id} f(z)dz$$

donde $z = x + iy$. Aquí $x + iy$ es definitivamente un punto del plano complejo y la integral está calculada sobre una trayectoria del plano complejo. Es, de hecho, la definición de la integral entre dos límites complejos como el límite de una suma. Resulta de ello una generalización de su resultado para los rectángulos. Cauchy muestra también que si la función y su derivada están acotadas y son continuas, entonces el límite obtenido es independiente del contorno escogido.

Cauchy continuó modificando y afinando sus ideas sobre la integración compleja a partir de 1826. En efecto, en 1827, una nota incluida en sus *Ejercicios de matemáticas* subraya la importancia del concepto de «valor principal» en la teoría de los residuos. El concepto y el desarrollo de los residuos constituyen una contribución muy importante de Cauchy. En 1831 obtiene su «fórmula

integral» y, a partir de 1846, Cauchy aborda el estudio de la teoría de funciones de variable compleja por sí misma y elabora las bases de esta teoría. En 1851, introduce términos nuevos: *monotípica* o *monódroma* para designar la función unívoca para cada valor de z en un dominio cualquiera; una función es *monógena* si para cada z posee una sola derivada (o la derivada es independiente del contorno); una función monogénea que no se hace infinita se llama *sinéctica* (holomorfa).

Otras contribuciones matemáticas de Cauchy

Entre sus muchas otras contribuciones a las diferentes ramas de las matemáticas no podemos más que citar algunas de las más sencillas.

Cauchy mejoró la formación de los conceptos y clarificó una buena parte de la teoría de curvas en el espacio en sus *Leçons sur les aplications du calcul infinitesimal a la géometrie* (Lecciones sobre las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la geometría) de 1826. Tras haber descartado los infinitésimos constantes y los ds, disipó la confusión entre las nociones de crecimiento y de diferencial y acentuó la significación de

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

en términos más explícitos, de

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Su desarrollo de la geometría de curvas es prácticamente moderno y deduce fórmulas modernas para los cosenos directores, la curvatura de las curvas, etc., además de introducir el plano oscilador como el plano formado por la tangente y la normal principal.

Una de las primeras contribuciones de Cauchy a la teoría de los determinantes fue una memoria publicada en 1815 en la que proporciona la primera exposición sistemática de los determinantes en una forma casi moderna. Se le debe, entre otras cosas, la disposición de los elementos en filas y columnas y la notación de los índices dobles a_{ij}, así como el término «ecuación característica» para $p(\lambda\ ) = 0$ donde p representa un polinomio matricial. Es en esa memoria

donde se encuentran numerosos teoremas generales como el de la multiplicación de los determinantes:

$$|a_{ij}| \cdot |b_{ij}| = |c_{ij}| \quad \text{donde} \quad |a_{ij}| \quad \text{y} \quad |b_{ij}|$$

son determinantes de orden n y

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

El término de la fila i y la columna j del producto es la suma de los productos de los elementos correspondientes de la fila i de $|a_{ij}|$ y de la columna j de $|b_{ij}|$. Cauchy mejoró el desarrollo de Laplace de los determinantes. En 1829 encontró la primera demostración general de que los valores propios de una matriz simétrica son reales y de que la forma cuadrática correspondiente puede ser transformada en una suma de términos cuadrados (diagonalización), mediante una sustitución ortogonal (o transformación lineal). Se encuentra, por último, en una memoria de 1826, una demostración directa de que la ecuación característica es invariante respecto de transformaciones ortogonales, con motivo de la reducción de una forma cuadrática de tres variables, y una demostración de que las raíces de la ecuación característica son reales.

Cauchy fue el primer matemático que consideró la cuestión de la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales y consiguió dar dos métodos apropiados. Redactó una serie de memorias sobre el tema que movieron a los matemáticos a preocuparse del problema de los teoremas de existencia en ecuaciones diferenciales. Se interesó también activamente, desde 1844, por la geometría analítica del espacio, y obtuvo resultados interesantes: entre otros, una fórmula general para la transformación de coordenadas oblicuas y la ecuación de una línea recta bajo la forma

$$\frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} + \frac{z-c}{\cos\gamma}$$

(fue el primero en escribirla bajo esa forma). En el tema de las congruencias de polinomios, Cauchy demostró, en particular, que para todo polinomio

$$f(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \ldots$$

se tiene

$$f(i) \equiv a_0 - a_2 + a_4 - \ldots + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots)i \text{ módulo } i^2 + 1$$

(Cauchy introdujo i en lugar de x, porque i representaba para él una cantidad realmente indeterminada). Se interesó también por la teoría de los grupos de sustitución y consagró un buen número de memorias a la cuestión. En particular, demostró la afirmación de Galois de que todo grupo finito de sustitución cuyo orden es divisible por un número primo p contiene al menos un subgrupo de orden p, además de tratar abundantemente los valores no numéricos que pueden adoptar funciones de n letras por permutación de las letras, y encontrar funciones que toman un número dado de letras.

El nombre de Cauchy se ha mantenido en un primer plano en campos tan variados como el análisis, la mecánica o la física matemática.

Si bien es cierto que las dos figuras dominantes de la primera mitad del siglo XIX fueron, sin discusión, Gauss y Cauchy, también se hicieron notar, en esta época, una pléyade de matemáticos de talento. Queremos, en las páginas siguientes, hacer justicia particularmente a un cierto número de ellos, mencionando brevemente algunas de sus contribuciones.

DIRICHLET

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemán que terminó sus estudios en París, fue discípulo de Gauss al que sucedió en Gotinga en 1855. Su gran tratado, titulado *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Lecciones sobre teoría de números) es, de hecho, una explicación de las *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss que comprende además un número imponente de resultados originales. Dirichlet se vio obligado a utilizar los recursos del análisis para tratar problemas de la teoría de números. Partiendo de una sucesión aritmética general de la forma a, $a + b$, $a + 2b$, ..., $a + nb$, ..., donde a y b son primos entre sí, Dirichlet mostró que esta sucesión contiene un número infinito de números primos. Enunciado anteriormente por Euler y Legendre, este teorema fue demostrado por Lejeune Dirichlet en 1837 y constituye una generalización del teorema de Euclides sobre el número infinito de núme-

ros primos en la sucesión de números naturales 1, 2, 3, ..., etc. Para demostrar esta generalización, Dirichlet recurrió a una prueba analítica larga y complicada, en la que se utiliza lo que se llama actualmente la serie de Dirichlet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z},$$

donde las a_n y z con complejas. En relación con el resultado de su teorema, demostró también que la suma de los recíprocos de los números primos de la sucesión $\{a + nb\}$ diverge. Dirichlet nos legó también una demostración del último teorema de Fermat para el caso $n = 5$.

Hemos visto que Lejeune Dirichlet terminó sus estudios científicos en París y, de 1822 a 1825, se relacionó a menudo con Fourier, quien le ayudó a obtener un puesto de profesor en Alemania recomendándole a Von Humboldt. Parece que Dirichlet desarrolló un interés marcado por las series de Fourier como consecuencia de sus encuentros con él en París. Fue el primero en formular un conjunto de condiciones *suficientes* para asegurar la convergencia de las series de Fourier hacia la función $f(x)$; estas condiciones son:

1. que f sea unívoca y acotada;
2. que f sea continua a trozos, es decir, que acepte solamente un número finito de discontinuidades en el período;
3. que f sea monótona a trozos, es decir, que posea solamente un número finito de máximos y mínimos en un período.

También con motivo de este estudio, Dirichlet ofreció en 1829 un ejemplo de función que se define así

$$f(x) = \begin{cases} c \text{ para todo } x \in Q \text{ (racionales)} \\ d \text{ para todo } x \in IR/Q \text{ (irracionales).} \end{cases}$$

Se debe también a Dirichlet una definición de la función uniforme que se utiliza frecuentemente en la actualidad: y es una función de x si a cada valor de x en un intervalo dado corresponde un valor único de y.

En resumen, sus trabajos se refieren sobre todo a la teoría de números y a la teoría de las series e integrales trigonométricas, así como a la de las ecuaciones en derivadas parciales.

ABEL

Niels Henrik Abel (1802-1829) fue el mayor matemático que haya producido Noruega. Hijo de un pastor, se crió en una familia pobre y desunida, pero gracias a su profesor Berdt Michael Holmboe, quien reconoció en él al futuro mayor matemático del mundo, y al gobierno noruego, pudo llevar sus estudios a término. Después de realizar estudios en Christiana y Copenhague, recibió una beca que le llevó a visitar Europa. Abel residió en París, pero fue prácticamente ignorado por los matemáticos franceses. Viajó también a Italia y después a Berlín, donde conoció a Crelle. Al volver a su país tuvo todo tipo de dificultades, pero sus trabajos comenzaron a atraer la atención de los matemáticos de la época. Desgraciadamente, enfermó de tuberculosis y murió casi en la miseria en Arendal, cuando tenía tan sólo veintiséis años.

Los siglos XVII y XVIII fueron testigos de innumerables tentativas infructuosas de resolver la ecuación general de quinto grado mediante radicales. Durante sus primeras investigaciones, Abel creyó haber encontrado una solución utilizando el enfoque preconizado por Gauss para la ecuación binómica. Pronto descubrió un error, e intentó demostrar la imposibilidad de tal solución. Algún tiempo después consiguió demostrar el teorema siguiente: las raíces de una ecuación resoluble por radicales pueden ser formuladas de forma que cada radical que aparece en la expresión de las raíces pueda expresarse como una función racional de las raíces de la ecuación y ciertas raíces de la unidad. Hacia 1826, Abel se sirve de este teorema para probar que la ecuación

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

no es resoluble por radicales, es decir, que y no puede ser expresada en términos de a, b, c, d y e utilizando un número finito de veces las cuatro operaciones aritméticas fundamentales además de la extracción de raíces. Estudiando ciertas ecuaciones especiales, como la de la lemniscata ($x^n - 1 = 0$, equivalente a la ciclotomía de Gauss), llegó a una clase de ecuaciones algebraicas, llamadas «ecuaciones abelianas», que son resolubles por radicales. Por ejemplo, la ecuación ciclotómica $x^n - 1 = 0$, en donde n es un número primo, es una ecuación abeliana. Abel introdujo también dos nociones nuevas: cuerpos y polinomios irreducibles en un cuerpo dado. Un

cuerpo de números significa, según Abel, una colección de números tales que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de toda pareja cualquiera de la colección son cerradas en la colección (son también números de la misma colección). Así, los números racionales, reales y complejos forman, respectivamente, un cuerpo.

Durante su estancia en París, Abel escribió una carta a un amigo, en la que el extracto siguiente es particularmente revelador de las dificultades personales con las que se enfrentó para darse a conocer:

> Todo principiante tiene dificultades enormes para hacerse notar aquí. Acabo precisamente de terminar un tratado considerable sobre una cierta clase de funciones trascendentes [...] pero el Sr. Cauchy se propone mirar este trabajo sólo por encima.

Por consiguiente, Abel confió la memoria a Cauchy con la esperanza de que éste la analizara en profundidad, pero Cauchy la extravió, por descuido o voluntariamente, lo que no se sabrá probablemente nunca. Titulado *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* (Memoria sobre una propiedad general de una clase muy extensa de funciones trascendentes), este texto largo y difícil de comprender debía ser evaluado por Cauchy y Legendre. Como se sabe, Cauchy perdió su pista y Legendre simplemente lo olvidó, pero después de la muerte de Abel la Academia buscó la memoria y la publicó en 1841, cuando fue encontrada, como reconocimiento póstumo a este joven genio de las matemáticas. Mientras tanto, otros matemáticos publicaron antes de 1841 resultados sobre las funciones elípticas, varios de los cuales estaban ya contenidos en la memoria de Abel. La idea profundamente original de Abel fue realizar la inversión de la integral elíptica de primera especie,

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

tomando su valor como variable independiente y su límite superior como función. Como $x = \operatorname{sen} \theta$, Abel propuso estudiar x como una función de F. La introducción de los números complejos en las integrales elípticas le permitió desarrollar lo que se llama habitualmente «teorema de adición para las funciones elípticas». Pero Abel

hizo, en 1828, un descubrimiento importante que despertó el entusiasmo de numerosos matemáticos, comenzando por Legendre y Jacobi. Hablamos de la propiedad fundamental de las integrales llamadas actualmente abelianas. Por el estudio de una generalización de las integrales elípticas e hiperelípticas ($\int R(x, y)dx$, donde $R(x, y)$ es una función racional de x y de y con $y^2 = P(x)$ y el grado de P al menos cinco), Abel se vio conducido al estudio de la integral siguiente:

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado superior o igual a cinco. Invirtiendo la relación entre u y v, obtiene evidentemente $v = f(u)$, y esta función es un caso especial de lo que se llama una «función abeliana». La importancia de esta generalización es ilustrada claramente por las palabras de Emile Picard en 1893:

No hay, en la historia de la ciencia, proposición tan importante obtenida a partir de consideración tan sencilla.

Abel se ocupó también del problema general del rigor en análisis y, en particular, se inspiró en el rigor de los trabajos de Cauchy. En el tema de la convergencia de las series infinitas, fue el primero en demostrar la convergencia de la serie binómica, además de haber corregido un error de Cauchy sobre la continuidad de la suma de una serie convergente de funciones continuas sirviéndose de la idea de la «convergencia uniforme».

Después de su muerte su talento fue reconocido por dos hechos notables. Dos días después de su muerte, Crelle anunciaba en una carta su nombramiento para un puesto de profesor en la Universidad de Berlín. Con Jacobi, Abel recibió el Gran Premio de la Academia de París del año 1830. Ha habido pocos matemáticos cuyo nombre haya quedado unido a tantos conceptos de la matemática moderna; baste mencionar los teoremas de Abel, las integrales abelianas, las ecuaciones abelianas, los grupos abelianos, las fórmulas de Abel.

JACOBI

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), matemático alemán cuyos estudios, realizados en Berlín, le llevaron en 1827 a enseñar matemáticas en Königsberg. Su padre, rico banquero, le procuró cuanto era necesario para completar su formación filológica y matemática. Profesor nato, conoció una carrera brillante, como docente y como investigador, pero renunció a sus funciones en 1842 por razones de salud y se retiró a Berlín con una pensión del gobierno prusiano.

Jacobi es célebre en matemáticas principalmente por sus trabajos sobre las funciones elípticas y los determinantes funcionales, llamados también jacobianos. En 1829 Jacobi utiliza por primera vez los determinantes funcionales que llevan su nombre. Algunos años después, expresa los cambios de variable en las integrales múltiples, mediante determinantes. Por ejemplo, la integral doble $\iint F(x, y)dxdy$, mediante el cambio de variables $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, se convierte en

$$\iint H(u, v) \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} dudv$$

donde

$$H(u, v) = F(f(u, v), g(u, v))$$

y el determinante

$$\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}$$

se llama el jacobiano de x e y con respecto a u y a v. Se dice que Jacobi estaba tan entusiasmado con los determinantes funcionales que insistía en concebir los determinantes numéricos ordinarios de orden n como jacobianos de n funciones lineales de n variables. Además, en 1841, se tomó el trabajo de publicar una larga memoria consagrada exclusivamente a los determinantes funcionales. En esta memoria pone claramente de manifiesto que el determinante funcional es, en varios aspectos y para las funciones de varias variables, análogo al cociente diferencial de una función de una sola variable. Jacobi insiste también en el papel de este determinante para definir

las condiciones de dependencia e independencia de un conjunto de ecuaciones o de funciones. Así, considera n funciones $v_1, v_2, ..., v_n$, tales que cada una es una función de las n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, y propone la cuestión de cómo, partiendo de estas n funciones, las n variables pueden ser eliminadas de manera que las v_i estén relacionadas mediante una ecuación. Demostró que si el jacobiano de las v_i con respecto a las x_i se anula, las n funciones son mutuamente dependientes, y a la inversa. Se puede también subrayar la presencia en esta memoria del teorema del producto para los jacobianos: si las v_i son funciones de las y_i y éstas son funciones de las x_i, entonces el jacobiano de las v_i con respecto a las x_i,

$$\begin{matrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_n}{\partial x_2} & \frac{\partial v_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{matrix}$$

es el producto del jacobiano de las v_i con respecto a las y_i y del jacobiano de las y_i con respecto a las x_i. Finalmente, Jacobi demostró también, como lo había hecho Cauchy, que todo determinante real simétrico de cualquier orden tiene raíces características reales.

Dado que Gauss publicó muy pocos de sus resultados originales, fueron Abel y Jacobi los que influyeron más en el desarrollo ulterior de las integrales elípticas. Parece ser que Abel y Jacobi estuvieron influenciados al principio por los trabajos de Legendre, y los dos matemáticos comparten la gloria de haber reconocido, independientemente uno del otro y de cualquier otro, por una parte la necesidad de invertir las integrales elípticas de Legendre y de trabajar en todo el campo de la variable compleja, y por otra parte la necesidad de referirse a la integral misma con el fin de deducir sus principales propiedades, la fundamental de las cuales quizá sea la de la doble periodicidad, es decir, que existen dos números complejos z_1 y z_2 tales que

$$v = f(u) = f(u + z_1) = f(u + z_2)$$

donde

$$u = \int_0^v \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

y z_1 y z_2 son dos períodos distintos de la función elíptica. Jacobi publicó en 1827 sus primeros trabajos sobre el tema, cuatro años después de la memoria de Abel; estas dos memorias fueron editadas en la misma revista científica, *La revista de Crelle* (la primera revista matemática alemana). Jacobi recogió en un cuerpo de doctrina sus propios descubrimientos sobre las funciones elípticas; varios de estos resultados fueron también obtenidos por Abel, en los *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* de 1829.

Después de 1829, Jacobi tomó conciencia de que el método de base utilizado en sus *Fundamenta nova* resultaba inapropiado y, en consecuencia, intentó expresar las funciones elípticas mediante funciones auxiliares. Fue así como introdujo las funciones zeta, que son ilustradas mediante

$$\Theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2t+2niz}$$

donde z y t son complejas, y expresó entonces las funciones elípticas seno amplitud ($sn\ u$), coseno amplitud ($cn\ u$) y delta amplitud ($dn\ u$) en términos de estas funciones. Obtuvo también diversas expresiones para las funciones zeta bajo la forma de series infinitas y productos infinitos. En una importante memoria de 1835, Jacobi demostró que si una función unívoca de una sola variable es doblemente periódica, la razón de los períodos no es un número real, y que es imposible que tal función tenga más de dos períodos distintos. Este descubrimiento abría un nuevo campo de investigación: el problema de encontrar todas las funciones doblemente periódicas. Aplicó así las funciones zeta a la teoría de números.

Jacobi se interesó también por el cálculo de variaciones, y su principal descubrimiento se refiere a la existencia del concepto de puntos conjugados. Finalmente, mencionemos en teoría de números sus demostraciones, las primeras sobre las leyes de reciprocidad bicuadrática y cúbica.

BOLZANO

Bernhard Bolzano (1781-1848), filósofo, lógico y matemático checo, nació en Praga en 1781. Era hijo de un anticuario italiano y de una alemana. Al terminar sus estudios se piensa en él para la cátedra de matemáticas recientemente vacante en la Universidad de Praga. Después de haberse consagrado como sacerdote, enseña filosofía y religión en la Universidad, pues el puesto de matemáticas había sido adjudicado a un candidato que poseía mayor experiencia pedagógica que la suya. Acusado de racionalismo, se le incoó un proceso que condujo, en 1820, a su expulsión de la Universidad y a la prohibición de publicar sus obras. Durante la estancia de Cauchy en Praga, Bolzano menciona en una carta de 18 de diciembre de 1843 dirigida a su alumno Fesl en Viena que «nos visitamos varias veces durante los días que pasé en Praga».

En su memoria de 1817, titulada *Demostración puramente analítica del teorema: entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos se encuentra al menos una raíz real de la ecuación,* Bolzano presenta definiciones rigurosas de la función continua y de la derivada de una función, así como una concepción clara de las relaciones que unen la diferenciabilidad y la continuidad de una función.

Bolzano da la definición siguiente de la continuidad de una función:

Que una función $f(x)$ varíe según la ley de continuidad para todos los valores de x situados en el interior o en el exterior de ciertos límites, equivale a lo siguiente: si x es cualquiera de tales valores, se puede hacer que la diferencia

$$f(x + w) - f(x)$$

sea más pequeña que toda magnitud dada si se puede tomar w tan pequeña como se quiera.

Se observa que esta definición no difiere esencialmente de la de Cauchy, y que convierte también en un elemento fundamental el concepto de límite. Ocurre lo mismo con la definición de derivada de una función propuesta por los dos autores. Añadamos que Bolzano subrayó el hecho de que la derivada de f no es un cociente

de ceros o de cantidades evanescentes, sino un número hacia el que se aproxima el cociente. Además, intentó demostrar el teorema siguiente:

Toda función continua de x que es positiva para $x = \alpha$ y negativa para $x = \beta$, debe anularse para cierto valor intermedio situado entre α y β.

pero afirma que, «reflexionando de manera más precisa sobre ello», en el fondo esta proposición es idéntica al teorema sobre el que versa su memoria. Siempre a propósito de la continuidad de las funciones, Bolzano distingue entre función continua y función diferenciable, cosa que Cauchy no hizo porque creyó durante casi toda su vida que una función continua era siempre diferenciable. En efecto, en 1834, Bolzano, en su *Théorie des fonctions* (Teoría de

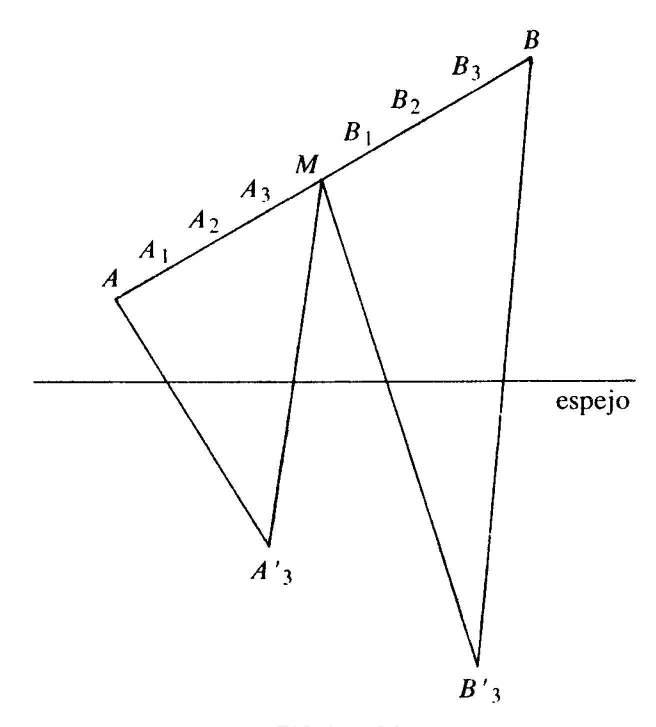


FIGURA 7.2

funciones) separa el concepto de continuidad del de derivabilidad: cuarenta años antes de Weierstrass, había construido una función de una variable real, continua en un intervalo cerrado, que no tiene derivada en ningún punto de ese intervalo.

Sea AB un segmento de recta y M su punto medio. Se dividen AM y MB en cuatro partes iguales. Sean A_3' y B_3' las reflexiones de A_3 y B_3 por el espejo. La línea quebrada $AA_3'MB_3'B$ sobre la que se aplica el mismo proceso de subdivisión que sobre AB proporciona 16 segmentos de recta. Continuando este proceso indefinidamente, el conjunto de las líneas quebradas converge hacia una curva que representa una función continua, la cual no es diferenciable en ninguna parte.

Subrayemos que la importancia de esta obra inacabada reposa esencialmente en su tratamiento sistemático y profundo del concepto de función. En particular, Bolzano subraya el carácter local de la continuidad: examina la continuidad en un punto y estudia separadamente la continuidad a la izquierda y a la derecha.

Bolzano pone de manifiesto también la necesidad de considerar la cuestión de la convergencia de las series infinitas. Definió así una clase de series:

> La variación (crecimiento o decrecimiento) que experimenta su valor mediante una *prolongación de sus términos llevada tan lejos como se quiera,* es siempre *más pequeña* que una cierta cantidad, que puede tomarse, a su vez, *tan pequeña como se quiera,* si se hubiera prolongado ya la serie lo suficientemente.
> [...] existe siempre una, pero sólo *una cantidad constante* a la que se aproxima el valor de esta serie (de términos finitos) tanto como se quiera, cuando se la prolonga lo suficientemente.

Introdujo también, para la sucesión de funciones con x fijo, $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x), \ldots, F_{n+r}(x), \ldots,$ el teorema que afirma que la diferencia entre su término n-ésimo $F_n(x)$ y todo término ulterior $F_{n+r}(x)$, por alejado que esté del n-ésimo, es más pequeña que toda cantidad dada, si n se ha tomado lo suficientemente grande; entonces, existe siempre, según Bolzano, una cierta *cantidad constante,* y *una sóla,* a la que se aproximan cada vez más los términos de esta serie, y a la que pueden aproximarse tanto como se quiera, cuando se prolonga la serie lo suficientemente. Su demostración no es

completamente rigurosa, porque la determinación de esta «cantidad constante» exigía una concepción lúcida de los números irracionales. Además, se encuentra en esta demostración la condición de Cauchy para la convergencia de las sucesiones, formulada en términos de una condición suficiente solamente, sin formular en términos explícitos la condición necesaria.

En su demostración puramente analítica del teorema que afirma la existencia de una raíz de la ecuación entre dos valores cualesquiera que dan dos resultados de signos opuestos, Bolzano utiliza un lema que establece la existencia de una cota superior mínima para un conjunto de números reales. Este lema está formulado en estos términos:

> Si una propiedad *M* no pertenece a *todos* los valores de una cantidad variable *x*, pero pertenece a *todos* los que son *más pequeños* que un cierto *u*, existe siempre una cantidad *U* que es la mayor de aquéllas de las que se puede afirmar que todos los valores inferiores *x* poseen la propiedad *M*.

Es el teorema de Bolzano-Weierstrass: un conjunto mayorado de números reales admite un límite superior preciso *U*.

Bolzano se interesó también por el estudio de los números reales con el fin de erigir una teoría al respecto, además de abordar nociones que abrían a las matemáticas una perspectiva nueva: la de la teoría de conjuntos. Su última gran obra, titulada *Paradozien des Unendlichen* (Paradojas del infinito), publicada por Préhonsky en 1851, después de la muerte de Bolzano, aporta las definiciones (tomadas de la *Teoría de la ciencia,* de 1837) de conjunto, cantidad, número, conjunto finito y conjunto infinito. Bolzano demostró la existencia de la correspondencia biunívoca, como lo había hecho Galileo, entre los enteros naturales y los cuadrados perfectos, entre los elementos de un conjunto infinito y los de un subconjunto propio. Además, Bolzano parece haber reconocido que la cardinalidad de los números reales es de un orden diferente de la del conjunto de los enteros.

Como Boyer se complace en decir, Bolzano «predicaba en el desierto», y muchos de sus resultados originales fueron redescubiertos más tarde. Por otra parte, sus trabajos no fueron conocidos hasta finales del siglo XIX.

POISSON

Siméon-Denis Poisson (1781-1840), hijo de un administrador de la ciudad de Pithiviers, entró en la Escuela Politécnica en 1798, aunque su padre esperaba que se hiciera médico. Fue el alumno preferido de Laplace y, a su salida de la Escuela, a los diecinueve años, se orientó hacia la enseñanza. Primero suplente de Fourier, se convirtió a continuación en profesor y después en examinador en la Escuela Politécnica. Elevado a la dignidad de par en 1837, fue llamado el mismo año para formar parte del Consejo Real de la Universidad, en donde se hizo cargo de la dirección de la enseñanza de las matemáticas en todos los colegios de Francia. Publicó cerca de 400 trabajos y memorias, y su reputación como profesor fue excelente. Su obra, inmensa y diversificada, aborda principalmente la física matemática, los problemas de atracción de potencial, mecánica celeste y probabilidades, enriqueciendo también el análisis matemático, aunque guardándose bien de ser un matemático puro. Sus dos tratados principales son: *Traité de mécanique* (Tratado de mecánica), 2 vols., 1811 y 1833, y *Recherches sur la probabilité des jugements* (Investigaciones sobre la probabilidad de los juicios), 1837.

Poisson se interesó por la manipulación de las series y, en particular, sus investigaciones trataron de la fórmula para la suma de las potencias enteras de los enteros positivos, que recurre a los números de Bernoulli, y fue el primero en ocuparse del resto R haciendo un estudio serio de él. Su interés se centró también en el estudio de la convergencia de las series, rechazando la utilización de las series infinitas divergentes aunque, sin embargo, en la práctica las utilizara abundantemente, quizá sin saberlo, para la representación de funciones arbitrarias mediante series trigonométricas. Poisson publicó una memoria en 1820 en la que se sirve de las integrales de funciones complejas calculadas a lo largo de trayectorias del plano complejo. Por ejemplo, partiendo de $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$, hace $x = e^{i\theta}$ donde θ toma sus valores de $(2n + 1)\pi$ a 0, y obtiene el valor $-(2n + 1)\pi i$, tratando la integral como el límite de una suma. A propósito de las ecuaciones integrales, descubrió la expresión integral de la función g en la transformada de Laplace de

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt}\, g(t)dt.$$

Utilizó también la noción de sumabilidad en el estudio de la suma de series trigonométricas, además de servirse de lo que se denomina actualmente la «sumabilidad de Abel»:
Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tiene un radio de convergencia r y converge para $x = r$, entonces

$$\lim_{z \to r} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

En su tratado de probabilidad de 1837, puede encontrarse la conocida distribución de Poisson o la ley de los grandes números de Poisson: en la distribución binomial $f(x) = (p + q)^n$ donde $p + q = 1$ y n es el número de pruebas, cuando n aumenta indefinidamente, esta distribución tiende ordinariamente hacia una distribución llamada normal; pero si, cuando n aumenta indefinidamente p tiende a cero de manera que el producto np permanezca constante, se tiene el caso límite de la distribución binomial llamada la «distribución de Poisson».

Poisson quedó muy impresionado con los trabajos de Fourier sobre las series trigonométricas, y consagró muchas energías y esfuerzos a resolver, mediante estas series, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, pero a este respecto fue demasiado optimista en la utilización que hizo de estos desarrollos en serie. En su *Mémoire sur la théorie des ondes* (Memoria sobre la teoría de las ondas), de 1816, Poisson da la integral de Fourier de una manera parecida a la de Cauchy.

Proporciona, por ejemplo, la ecuación exacta del potencial cuando el punto es atraído hacia el interior de la masa atractora, llamada ecuación de Poisson, pero cuya demostración es poco rigurosa, incluso para las exigencias de la época: partiendo de la ecuación del potencial de Laplace.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

donde V es una función de x, y, y z que está definida para todo punto (x, y, z) que esté en el interior o en el exterior de la masa

atractora, Poisson demostró que si el punto está en el interior de esta masa, entonces V satisface.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}= -4\pi\varrho$$

donde ϱ designa la densidad de la materia atractora, la cual es también una función de las coordenadas x, y y z del punto.

Pero es sobre todo en electricidad y en magnetismo en donde es el iniciador de la teoría del potencial magnético, estableciendo los principios de la teoría matemática de la electrostática y estudiando la distribución de la electricidad en la superficie de los cuerpos conductores, las propiedades de los imanes producidos por influencia, sin olvidar, finalmente, sus trabajos sobre la capilaridad, la elasticidad y su papel importante en mecánica. Inspiró muchas investigaciones ulteriores, en particular las de Green.

GREEN

George Green (1793-1841), matemático inglés, autodidacto, desarrolló las investigaciones de Poisson en electricidad y en magnetismo. En 1828 publicó una memoria titulada *Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism* (Ensayo sobre la aplicación del análisis matemático a las teorías de la electricidad y el magnetismo), que tuvo una difusión restringida. Este estudio permaneció prácticamente desconocido hasta que Lord Kelvin, sir William Thomson (1824-1907), lo hiciera reimprimir en 1846.

Como Poisson, parte de de la ecuación del potencial de Laplace y demuestra, en este ensayo, el célebre teorema al que está unido su nombre, y cuya formulación moderna es: si P y Q son dos funciones de x e y tales que sus derivadas parciales son continuas en una región del plano xy acotada por una curva C, entonces

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_C Pdx + Qdy$$

(en notación moderna). Este teorema, y el correspondiente en tres dimensiones, fueron demostrados también por Ostrogradsky en 1828. Green aplicó su fórmula a problemas de electricidad y magne-

tismo, y sus trabajos inspiraron a la escuela inglesa de física matemática, que contaba en sus filas con Kelvin, Stokes, Rayleigh y, evidentemente, Maxwell.

OSTROGRADSKY

Miguel Ostrogradsky (1801-1861), de origen ucraniano, comenzó sus estudios universitarios a los catorce años en la Universidad de Jarkov, fundada en 1805 como consecuencia de una reforma emprendida por el zar en 1802. Ostrogradsky hizo estudios brillantes en la Universidad, obtuvo su primer grado científico, y parecía destinado muy naturalmente al profesorado de universidad. Pero el impulso del movimiento revolucionario y la represión administrativa y policial ejercida por Alejandro I hicieron que la arbitrariedad de las autoridades locales dejara, en 1820, al mejor alumno de Jarkov sin documentación oficial que atestiguara los estudios que había hecho. Ostrogradsky aceptó su suerte pero decidió proseguir sus estudios en París, en donde puede encontrársele ya en el verano de 1822. Según parece, el joven matemático ruso se hizo notar por su inteligencia y la seriedad de sus estudios, pues Cauchy, Poisson, Fourier, Lamé, etc., se interesaron por sus trabajos. En 1828 volvió a Rusia, más precisamente a San Petersburgo, donde sus primeras memorias publicadas en París le habían procurado una reputación que precedió a su llegada a Rusia. Si su ilustre contemporáneo Lobachevsky, que trabajaba en Kazán, no consiguió ningún reconocimiento en vida, ni siquiera de Ostrogradsky, este último, por el contrario, gracias a sus investigaciones en matemáticas y en mecánica, conoció un gran renombre y un respeto merecido ya desde sus primeros años de actividades matemáticas. Miembro de numerosas Academias, fue elegido correspondiente del Instituto de Francia en 1856 en el lugar de Dirichlet.

Ostrogradsky escribió, en 1826, una memoria titulada *Démostration d'un théorème du calcul intégral* (Demostración de un teorema de cálculo integral), en la que se encuentra, de hecho, dos teoremas que tienen un carácter auxiliar: el que dio su nombre a la memoria es un caso particular del teorema de Green pero, para establecer este teorema, demuestra en primer lugar una proposición importante. Esta proposición transforma las integrales triples, tomadas con

respecto a un volumen V, en integrales con respecto a la superficie S que limita el volumen (en notación moderna)

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

donde dV es el elemento diferencial de volumen, dS el elemento diferencial de superficie, α, β y γ representan los ángulos de la seminormal positiva con los ejes de coordenadas rectangulares, P, Q y R son funciones de x, y y z. En la literatura matemática, se llama a veces teorema de Gauss, a veces fórmula de Green, a veces fórmula de Ostrogradsky y a veces teorema de la divergencia.

Los trabajos científicos y la actividad pedagógica de Ostrogradsky tuvieron una influencia particularmente importante en el desarrollo de las ciencias en Rusia. En efecto, preparó las condiciones propicias para la creación de la escuela matemática, organizada por Chebichev, además de ser considerado como el fundador de la escuela rusa de mecánica teórica. Estimuló en Rusia numerosas investigaciones, sobre todo en física matemática, cálculo de variaciones, teoría de las integrales múltiples y teoría de las funciones algebraicas. Con sus enseñanzas preparó a numerosos profesores de matemáticas, cuya formación estaba dirigida sobre todo hacia el campo de las matemáticas aplicadas.

BIBLIOGRAFÍA

Bachmacova, Isabella, «Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 13, 1960, pp. 211-22.

Bell, Eric T., *Men of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1965, pp. 218-93; 307-39.

Birkhoff, Garret, comp., *A source book in classical analysis,* Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), 1973, pp. 1-15, 31-44, 60-70, 115-17, 145-47, 156-64, 188-96, 206-23, 243-47, 374-79, 385-86, 437-42.

Bonola, Roberto, *Non-Euclidean geometry,* Nueva York, Dover, 1955, pp. 64-75.

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley & Sons, 1968, pp. 544-71.
Boyer, Carl B., *The history of the calculus and its conceptual development,* Nueva York, Dover, 1959, pp. 267-84.
Boyer, Carl B., *History of analytic geometry,* Nueva York, *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 236-38, 262-63.
Campbell, Paul J., «Gauss and the eight queens problems: A study in miniature of the propagation of historical error», *Historia Mathematica,* 4, 1977, pp. 397-404.
Coxeter, H. S. M., «Gauss as a geometer», *Historia Mathematica,* 4, 1977, pp. 379-96.
Coolidge, Julian L., *The mathematics of great amateurs,* Nueva York, Dover, 1963, pp. 195-205.
Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 616-26.
Dubbey, S. M., «Cauchy's contribution to the establishment of the calculus», *Annals of Science,* 22, 1966, pp. 61-67.
Ettlinger, H. J., «Cauchy's paper of 1814 on definite integrals», *Annals of Mathematics,* 23, 1922, pp. 255-70.
Eves, Howard, *An introduction to the history of mathematics,* Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1969, pp. 374-78.
Eymard, P. y J. P. Lafon, «Le journal mathématique de Gauss», *Revue d'Histoire des sciences et de leur Applications,* 9, 1956, pp. 21-51.
Fitzpatricks, Sister M., «Saccheri, forerunner of non-Euclidean geometry», *The Mathematics Teacher,* 57, 1964, pp. 323-32.
Gauss, Carl F., *Disquisitiones arithmeticæ.* Traducción inglesa de A. A. Clarke, Londres, Yale University Press, 1966.
Grattan-Guinnes, I., «Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteenth century», *Archives for History of Exact Sciences,* 6, 1970, pp. 372-400.
Hawkins, Thomas, «Cauchy and the spectral theory of matrices», *Historia Mathematica,* 2, 1975, pp. 1-29.
Jourdain, Philip E., «The origin of Cauchy's conceptions of a definite integral and of the continuity of a function», *Isis,* 1, 1914, pp. 661-703.
Jourdain, Philip E., «The theory of functions with Cauchy and Gauss», *Bibliotheca Mathematica,* 6, 1905, pp. 190-207.
Kline, Morris, *Mathematical thought from Ancient to Modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 560-62, 598-99, 631-41, 644-55, 680-81, 699-703, 717-21, 745-47, 754-55, 765-67, 796-802, 813-818, 827-830, 870-73, 882-89, 949-59, 962-68.
Loria, Gino, «A. L. Cauchy in the history of analytic geometry», *Scripta Mathematica,* 1, 1932, pp. 123-28.

May, Kenneth, O., «Carl Friedrich Gauss (1777-1855)», *Dictionary of scientific biography,* Nueva York, Charles Scribner's Sons, 1970.
Meschkowski, Herbert, *Ways of thought of great mathematicians,* San Francisco, Holden-Day Inc., 1964, pp. 62-69.
Petrova, S. S., «Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre», *Historia Mathematica,* 1, 1974, pp. 255-61.
Prielipp, Robert W., «Niels Henrik Abel», *The Mathematics Teacher,* 62, 1969, pp. 482-84.
Rychlik, Karel, «Sur les contacts personnels de Cauchy et de Bolzano». *Revue d'Histoire des Sciences et leur Applications,* 14, 1961, pp. 163-64.
Rychlik, Karel, «La théorie des nombres réels dans un ouvrage posthume manuscrit de Bernard Bolzano», *Revue d'Histoire des Sciences et leurs Applications,* 14, 1961, pp. 313-27.
Sebestik, Jan, «Bernard Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse», *Revue d'Histoire des Sciences et leur Applications,* 17, 1964, pp. 129-64.
Smith, David E, *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vols. I y II, 1959, pp. 107-18, 261-66, 286-306, 348-50, 463-76, 530-531, 656-662.
Stigler, M., «An attack on Gauss, published by Legendre in 1820», *Historia Mathematica,* 4, 1977, pp. 31-35.
Struik, Dirk, J. y Ruth, «Cauchy and Bolzano in Prague», *Isis,* II, 1928, pp. 364-66.
Struik, Dirk, J., *A source book in mathematics 1200-1800,* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1969, pp. 115-22.
Struik, Dirk, J., *A concise history of mathematics,* Nueva York, Dover, 1967, pp. 139-56.
Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. III, *La science contemporaine,* París, P.U.F., 1961, pp. 7-10, 11-12, 29-30, 44, 51-62, 71-72.[*Historia general de las ciencias,* vol. III, Barcelona, Destino, 1973].
Turnbull, H. W., *The great mathematicians,* Londres, Methuen, 1951, pp. 122-128.
Youschkevitch, Pr A., *Michel Ostrogradski et le progrès de la science au XIX^e siècle,* D-114, París, Palais de la Découverte, 1966.

EJERCICIOS

1. Las condiciones del trabajo científico en el siglo XIX no son las mismas que las del siglo XVIII. Justificar esta afirmación.

2. Las sociedades matemáticas se organizaron antes que las revistas matemáticas. Justificar esta afirmación y dar ejemplos.
3. ¿En qué difieren los trabajos matemáticos de Gauss y Cauchy de la tradición del siglo XVIII? Justificar la respuesta.
4. ¿Quién entre Gauss y Cauchy influyó más en las matemáticas actuales que se enseñan antes de la Universidad? Justificar la respuesta y dar varios ejemplos.
5. Las personalidades de Gauss y Cauchy difieren entre sí en varios aspectos. ¿Cuáles son estos aspectos? Precisar el origen de estas marcadas diferencias.
6. Representar gráficamente los números $-i$, $3 + 2i$, $-5 + \sqrt{3i}$ en el plano de Gauss.
7. Entre el conjunto de todos los polígonos regulares que no tienen más de 52 lados, elaborar la lista de todos los que pueden construirse mediante la regla y el compás solamente.
8. ¿Es posible construir polígonos regulares de 17 990 lados y de 26 214 lados mediante la regla y el compás solamente? Justificar la respuesta.
9. Demostrar que la ecuación $x^2 - x(2 - i) - 2 + 16i = 0$ posee dos raíces imaginarias distintas de la forma $a + bi$.
10. Ilustrar, mediante dos ejemplos, la conclusión de Gauss de que la congruencia $x \equiv v$ (módulo m) da la solución completa de $ax + b = c$, donde v es una raíz de la congruencia y c es el módulo.
11. Resolver la ecuación ciclotómica $x^5 - 1 = 0$ y mostrar que las raíces son los vértices de un pentágono inscrito en un círculo.
12. Mostrar que los números 13 y 17 son enteros complejos compuestos o enteros de Gauss.
13. Comparar el valor de $\pi(n)$ con el de $n/ln\ n$ para $n = 50$.
14. Se dice que Cauchy fue el primero en emprender seriamente la aritmetización del análisis. Comentarlo con ejemplos.
15. Comparar los trabajos de Cauchy y Bolzano con respecto al rigor en análisis. Justificar la comparación y poner de relieve las diferencias observadas.
16. Tras los intentos de Cauchy y Bolzano para introducir el rigor en el análisis, ¿qué quedaba por hacer? Justificar la respuesta.

8. LA ARITMETIZACION DEL ANALISIS

INTRODUCCIÓN

Newton y Leibniz enunciaron claramente las reglas de operación de cálculo diferencial e integral, y sus sucesores inmediatos confiaron ciegamente en el simbolismo para lanzarse con entusiasmo a la búsqueda de resultados sorprendentes y numerosos. A pesar del clima de confianza que reinaba a comienzos de 1800 sobre la eficacia de este nuevo cálculo de los procesos infinitos, antes incluso de finales del siglo XVII ya algunos críticos como Nieuwentijt, Berkeley y Rolle suscitaron interrogantes sobre las bases lógicas de este nuevo análisis y sobre el carácter vago e impreciso de los conceptos fundamentales a él asociados.

A principios del siglo XVIII, algunos matemáticos se preguntan por la justificación de los procedimientos y las dificultades encontradas en el desarrollo de los principios y métodos del cálculo diferencial e integral. Entre estas dificultades de todas clases, pueden subrayarse las más importantes: el concepto de función es vago e impreciso; el uso abundante de las series infinitas sin tener en cuenta el concepto de convergencia conlleva el nacimiento de paradojas y de resultados incongruentes; las diversas tentativas para representar funciones mediante series de potencias, y en particular con la ayuda de series trigonométricas, se añaden a la confusión ya existente; finalmente, los conceptos fundamentales de límite, derivada e integral deben ser redefinidos con bastante más claridad y precisión. Todas estas dificultades despertaron finalmente un cierto descontento con respecto al estatuto lógico del nuevo análisis, y diversos matemáticos decidieron hacer lo posible por remediar esta situación.

Hemos visto anteriormente las contribuciones de D'Alembert, Lagrange, Gauss, Cauchy, Bolzano, Abel y Dirichlet para dotar de unas bases más apropiadas al fundamento mismo del análisis. Re-

cordemos que D'Alembert fue el primero en reconocer la necesidad de una teoría del límite, a fin de establecer el cálculo diferencial sobre bases irreprochables, con lo que comenzaba, en las matemáticas, la transición de la filosofía especulativa hacia una construcción rigurosa. Lagrange intentó, como John Landen (1719-1790) lo había hecho en su *Residual analysis* (Análisis residual), de 1764, evitar las dificultades de este cálculo refiriendo todas las operaciones al álgebra y a la geometría. El problema de la representatividad y la convergencia, sobre el cual reposaba la validez de los argumentos de Lagrange, se asocia directamente a consideraciones sobre el límite, concepto que Lagrange intentaba justamente evitar. El serio estudio emprendido por Gauss sobre las series hipergeométricas marca el fin de la utilización temeraria de las series y el comienzo de una preocupación por las cuestiones de convergencia y divergencia. Cauchy, Bolzano y Dirichlet contribuyeron a la formulación de definiciones y criterios de convergencia que marcan una primera etapa en la aritmetización del análisis. Nos proponemos ahora presentar, en las páginas que siguen, las principales contribuciones del siglo XIX a la liberación del concepto de función y a la creación de números reales con el fin de aritmetizar el análisis.

Liberación del concepto de función

Concepto clave del análisis, el concepto de función fue objeto de un estudio emprendido en el siglo XVIII para clarificar su expresión analítica. Euler fue el primer autor que llamó la atención sobre el concepto de función en un estudio sistemático de todas las funciones elementales. Más adelante, a mediados del siglo XVIII, la representación de funciones se desarrolló gracias a la controversia suscitada a propósito del problema de la cuerda vibrante. Euler, D'Alembert y Bernoulli encontraron soluciones a este problema en términos de funciones llamadas «arbitrarias» o de series infinitas de funciones trigonométricas, mientras que Lagrange, por su parte, introdujo una innovación al fundamentar el concepto de función sobre la serie de potencias. Evidentemente estos matemáticos no llegaron a una definición comúnmente aceptable ni a resolver el problema del tipo de funciones representables mediante series trigonométricas. Es a

Fourier a quien corresponde el honor de haber ampliado el campo de estudio del concepto de función.

FOURIER

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), hijo de un sastre de Auxerre, nace el 21 de marzo de 1768. Fourier es alumno de la escuela militar de esa ciudad, y a continuación se orienta hacia el estado eclesiástico y toma el hábito de novicio en la abadía benedictina de Saint-Benoît-sur-Loire. Pero la Revolución le aleja de allí antes de haber hecho los votos, y sus dotes excepcionales le lanzan a una carrera científica. Bonaparte le lleva a Egipto, y es él quien redacta la introducción general a la publicación de los trabajos del Instituto de Egipto. Es uno de los primeros miembros del cuerpo de profesores a raíz de la fundación de la Escuela Politécnica, a su vuelta a Egipto; permanece en la administración y, en 1802, es nombrado prefecto de Isère. Su carrera se ve trastornada, desgraciadamente, por la caída del imperio. Dimite de su puesto de prefecto en 1814 y se une a los Borbones, pero a la vuelta de Napoleón de la isla de Elba, Fourier no sabe muy bien qué hacer y decide huir. Napoleón no se lo toma en cuenta, y durante los Cien Días le nombra prefecto del Rhône y conde. En 1815, Louis XVIII le desposee de todo cargo, y en el momento de su primera elección a la Academia de Ciencias, en 1816, el rey se niega a aprobar su nombramiento. Reelegido al año siguiente, Fourier recibe la aprobación del rey y entra en la Academia, donde, gracias al valor de sus trabajos, llegará a ser secretario perpetuo de la Academia de Ciencias y miembro de la Academia francesa. Los últimos años de su vida estuvieron enteramente consagrados a la ciencia y a sus trabajos de académico. Murió en París el 16 de mayo de 1830, a los sesenta y dos años.

La obra de Fourier puede considerarse como la primera realmente típica de la física matemática. Atraído por un problema ampliamente discutido en su época, la propagación del calor, Fourier recogió sus estudios en una primera memoria presentada a la Academia de Ciencias en 1807. Lagrange, Laplace y Legendre, designados para juzgar el valor de la memoria, criticaron severamente el ensayo a causa de su imprecisión, y la memoria fue, por

tanto, rechazada. Pero la Academia quiso estimular a Fourier a proseguir sus estudios instituyendo, como tema del gran premio para el año 1812, precisamente el de la propagación del calor. En 1811, Fourier presentó de nuevo una memoria revisada y corregida, y ganó el gran premio, pero los jueces, entre los que se encontraban los de 1807, formularon una vez más críticas a causa de su falta de rigor, lo que le impidió ver su memoria publicada por la Academia. Profundamente herido por la forma en que había sido tratado, Fourier no deja por ello sus trabajos y, en una importante obra, la *Teoría analítica del calor* (1822), establece la teoría matemática de las leyes de propagación del calor, que comprende las ideas fundamentales de Fourier sobre las series que llevan su nombre. Subrayemos que dos años después de la publicación de este libro, Fourier se convierte en secretario de la Academia y hace que la Academia publique íntegramente su memoria de 1811.

Bajo ciertas condiciones, la temperatura v de una placa sólida cuyo espesor es despreciable, es una función de x, y y t. Fourier demostró, sobre la base de principios físicos, que v debe satisfacer la ley de propagación dada por la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

donde $\frac{K}{CD}$ es una constante que depende de la naturaleza del sólido. En particular, a temperatura constante (con el tiempo), la ecuación se convierte en

a) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

a la que hay que añadir condiciones en el contorno. Para resolver este problema, Fourier hace $v = F(x)f(y)$, y por el método de separación de variables obtiene a partir de la ecuación a)

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{f''(y)}{f(x)} = 0.$$

Suponiendo que $\frac{F''(x)}{F(x)} = m$ y que $\frac{f''(y)}{f(y)} = -m$ (donde m es una constante), obtiene las soluciones de v en términos de $v(x, y) = e^{-mx} \cos my$.

En virtud de las condiciones en el contorno, el parámetro m

debe ser positivo, impar y entero. Por superposición, Fourier obtiene un valor más general de v que es

b) $v(x, y) = ae^{-x} \cos y + be^{-3x} \cos 3y + ce^{-5x} \cos 5y + \ldots$

Otra condición de contorno impone que $v(0, y) = 1$, de donde se deduce que la ecuación b) debe satisfacer

c) $1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + d \cos 7y + \ldots$

donde los coeficientes $a, b, c, d, \ldots$, cuyo número es infinito, están determinados, según Fourier, por esta identidad. Es precisamente el cálculo de los coeficientes de la ecuación c) lo que marca el comienzo del tratamiento de las series trigonométricas por Fourier. Después de haber efectuado de una manera algo dudosa las diferenciaciones término a término, se sirve de la ortogonalidad y de la integración por partes para demostrar que

d) $\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \frac{1}{5} \cos 5y - \frac{1}{7} \cos 7y + \ldots$

Fourier subraya que la función es periódica de período π sin, por otra parte, demostrar este resultado. Un poco más adelante en su texto, demuestra que la serie de d) converge hacia $\frac{\pi}{4}$ y obtiene también series para $\frac{x}{2}$ y $\log\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$. A continuación, Fourier demuestra que toda función periódica par $(f(x) = f(-x))$ o impar$(f(x) = -f(-x))$ puede ser desarrollada en series de senos o cosenos, respectivamente. Finalmente, Fourier trata de generalizar el problema: dada una función arbitraria $\phi(x)$, encontrar los coeficientes a_n y b_n tales que la ecuación

$$\phi(x) = \frac{a_0}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos mt \, dt, \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} mt \, dt$$

y

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) dt$$

sea una identidad sobre un intervalo dado del eje de las x. Es así como obtiene la fórmula integral de los coeficientes a_n y b_n (obtenidos anteriormente por Clairaut y Euler para funciones específicas), de una manera algo larga y tortuosa y que adolece de una cierta falta de rigor. Sin embargo, su *Tratado* contiene resultados de una importancia indiscutible para el desarrollo futuro de las matemáticas.

Su principal contribución fue la idea, esbozada por Daniel Bernoulli, de que toda función $f(x)$ puede ser representada por una serie de Fourier. Aunque no se encuentra en su tratado una demostración completa de este enunciado, Fourier parecía muy convencido de la veracidad de esta proposición, pues reposaba, según él, en una evidencia geométrica que traduce la «función arbitraria» por la expresión «función trazada arbitrariamente». Esta idea, excesivamente amplia, de función arbitraria tiene sin embargo el gran mérito de haber provocado un replanteamiento del concepto mismo de función. En efecto, sea, por ejemplo, $f(x) = x$ la función definida en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, que se representa mediante la serie de Fourier de senos

$$f(x) = 2 \text{ sen } x - \text{sen } 2x + \tfrac{2}{3} \text{ sen } 3x$$

y en cada intervalo de longitud 2π, se representa mediante el gráfico siguiente

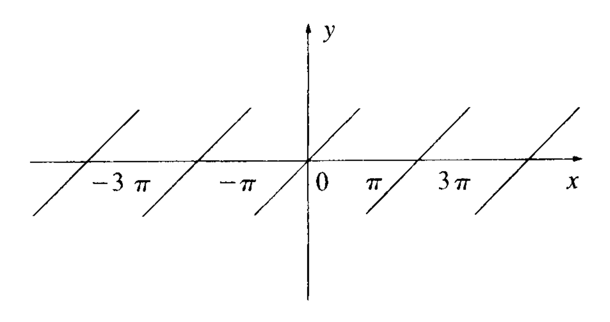


FIGURA 8.1

Una función semejante no puede representarse mediante una expresión analítica finita, mientras que los predecesores de Fourier

insistían en que una función debía ser representable mediante una sola expresión analítica. Además, Fourier afirma que sus series pueden representar funciones que tienen diferentes expresiones analíticas en diferentes partes de un intervalo dado $(-\pi, \pi)$. Por ejemplo, la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

posee un desarrollo en serie de Fourier en el que

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \ a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \text{ y } b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

y la gráfica de esta función es la siguiente:

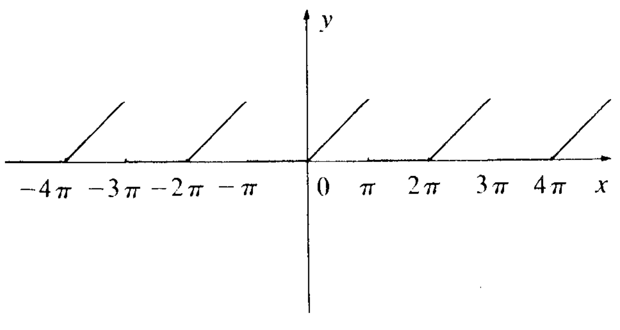


FIGURA 8.2

Fourier añade también que las expresiones diferentes para cada parte de un intervalo dado pueden corresponder a una gráfica compuesta de curvas juntas o disjuntas en ese intervalo. Además, Fourier considera que sus trabajos sobre las series trigonométricas demuestran de una vez por todas que la solución de Daniel Bernoulli es la única aceptable en el tema del problema de la cuerda vibrante.

Los trabajos de Fourier muestran también que se puede representar una función en un intervalo completo, mientras que la serie de Taylor representa una función solamente en un entorno de un punto para el cual la función es analítica. Además, hacen más

aceptables las representaciones de funciones efectuadas por Euler y Laplace por medio de las funciones de Bessel y los polinomios de Legendre, y muestran cómo se puede resolver una ecuación diferencial teniendo en cuenta las condiciones en los límites impuestas a la solución de la ecuación. Finalmente, Fourier, Cauchy y Poisson obtuvieron, aproximadamente en la misma época, las integrales dobles, llamadas «integrales de Fourier» para representar funciones arbitrarias y para resolver diversos tipos de ecuaciones diferenciales.

RIEMANN

Bernhard Riemann (1826-1866), nació el 17 de septiembre de 1826 en Breselenz, Hannóver, en una familia pobre pero feliz. Su padre, pastor luterano, se ocupó personalmente de instruirle en historia, aritmética y geometría, y completó su primera educación. Más tarde, a los catorce años, comenzó sus estudios secundarios, y su timidez acentuada constituyó para él una fuente de numerosos sinsabores. Durante sus estudios en el colegio, Riemann demostró ya un talento natural y prodigioso para las matemáticas. En 1846, entra en la Universidad de Gotinga como estudiante de filosofía y teología. En esta época, Riemann quería ser pastor como su padre, pero su interés por los cursos de matemáticas de Gauss le llevó a seguir la carrera de matemático, con el consentimiento de su padre. Después de un año en Gotinga fue a Berlín, en donde fue alumno de Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisenstein. Volvió a Gotinga para redactar su tesis doctoral bajo la dirección de Gauss. En 1851 presentó la tesis, titulada *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionem einer veränderlichen complexen Grösse* (Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja), que cambió completamente la teoría de funciones de variables complejas y en la que introdujo las célebres superficies que llevan su nombre. Después de haber ocupado diversos puestos de enseñanza en la Universidad, fue nombrado profesor extraordinario en 1857, y sucedió a Dirichlet en 1859 en la cátedra de matemáticas de Gotinga. En 1862, aproximadamente un mes después de su matrimonio con Elise Kich, cayó gravemente enfermo y el gobierno alemán le concedió fondos para proseguir su convalecencia en Italia, esperando que el clima más clemente le permitiera recuperarse

completamente. Interrumpida por viajes a Gotinga, su estancia en Italia no le permitió curarse, y murió el 20 de julio de 1866 en Selasca, cuando sólo tenía treinta y nueve años.

Hemos visto que Bolzano separó, en 1834, el concepto de continuidad del de derivabilidad, y que ilustró esta separación mediante una función continua en un intervalo cerrado que no es derivable en ningún punto de ese intervalo. Dado que los trabajos de Bolzano no fueron conocidos hasta finales del siglo XIX, se debe a Riemann la primera distinción neta entre la continuidad y la diferenciabilidad, la cual será formulada en una memoria de 1854 escrita como mérito para el puesto de *Privatdozent* en Gotinga. En esta memoria, consagrada a la posibilidad de representar una función mediante una serie trigonométrica, Riemann presenta una función definida como sigue. Sea (x) una función que denota la diferencia entre x y el entero más próximo, y sea $(x) = 0$ si x está a mitad de camino entre dos enteros. Entonces

$$-\tfrac{1}{2} < (x) < \tfrac{1}{2}\,.$$

Sea ahora $f(x)$ definida mediante

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \ldots = \sum_{1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

La serie converge para todo valor de x. Sin embargo, para $x = p/2n$ donde p es un entero primo con n, $f(x)$ es discontinua, con un salto cuyo valor es $\pi^2/8n^2$. Para cualquier otro valor de x, $f(x)$ es continua. Además, $f(x)$ es discontinua un número infinito de veces en cualquier subintervalo. Por otra parte, $f(x)$ es integrable y

$$F(x) = \int f(x)dx$$

es continua para todo x pero no es diferenciable en los puntos en los que $f(x)$ es discontinua. Este ejemplo de función continua pero no diferenciable no fue publicado hasta 1868, algunos años antes de la función patológica que presentó Weierstrass.

En esta misma memoria, Riemann se dio cuenta de que debía reconsiderar la noción de integral definida formulada por Cauchy, con el fin de hacer progresar la utilización de las series de Fourier para representar funciones cada vez más irregulares e incluso patológicas. En lugar de postular la continuidad puntual para el inte-

grando, como había hecho Cauchy, Riemann busca funciones más generales y determina las restricciones necesarias para las que pueden existir las integrales de esas funciones. De esa manera llega a la generalización del concepto de integral que engloba las funciones $f(x)$ definidas y acotadas en un intervalo cerrado $[a, b]$. Subdivide este intervalo en subintervalos

$$\Delta x_1 = x_1 - a,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \ldots\ \Delta x_n = b - x_{n-1},$$

y a continuación define la oscilación de $f(x)$ sobre Δx_i como la diferencia entre el valor mayor y menor de $f(x)$ en Δx_i. Hagamos

$$S_n = \Delta x_1 f(a + \delta_1\varepsilon_1) + \Delta x_2 f(x_1 + \delta_2\varepsilon_2) + \ldots + \\ + \Delta x_n f(x_{n-1} + \delta_n\varepsilon_n)$$

donde $0 \leq \varepsilon_i \leq 1$ para todo i. Si S_n se aproxima a un límite fijo, A, cuando todos los Δx_i tienden a cero, independientemente de la elección de los Δx_i y de los ε_i, entonces A es el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$. La definición habitual de la integral definida en un intervalo, en términos de sumas superiores y sumas inferiores, se conoce generalmente bajo el nombre de Riemann, pues fue él el primero en dar esta definición en su memoria de 1854 a propósito de la condición necesaria y suficiente para que una función acotada $f(x)$ sea integrable en $[a, b]$. Riemann la formula como sigue:

$$S = M_1\delta_1 + \ldots + M_n\delta_n$$

$$s = m_1\delta_1 + \ldots + m_n\delta_n$$

donde M_i y m_i son los valores maximales y minimales, respectivamente, de $f(x)$ en δ_i. Hace entonces $D_i = M_i - m_i$ y enuncia que la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ existe sólo si

$$\lim_{max\ \delta_i \to 0} = \left\{ D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \ldots + D_n\delta_n \right\} = 0$$

para todos los δ_i que cubren enteramente el intervalo $[a, b]$.

Riemann estudió durante algún tiempo bajo la dirección de Dirichlet en Berlín, y este último se interesó mucho por los trabajos de Riemann. En particular, Riemann estudió con gran interés las series de Fourier, quizá a partir de los trabajos de su maestro,

Dirichlet, sobre esas series. Este último, recordémoslo, fue el primero en enunciar un conjunto de condiciones suficientes para que la serie de Fourier que representa una función $f(x)$ converja y lo haga a $f(x)$. La demostración de Dirichlet es un refinamiento de la que esbozó Fourier en la última sección de su *Teoría analítica del calor.* Las condiciones de convergencia de Dirichlet son las siguientes:

1. que $f(x)$ sea uniforme y acotada;
2. que $f(x)$ sea continua a trozos y no acepte más que un número finito de discontinuidades en el período 2π;
3. que $f(x)$ sea monótona a trozos y no acepte más que un número finito de máximos y mínimos en un período.

Sabemos que una serie de Fourier no converge siempre hacia la función $f(x)$ de la que se obtiene la serie, pero Dirichlet demostró que, para todo valor de x, la suma de la serie es $f(x)$ con tal que la función sea continua para todo valor de x, y que en los puntos de discontinuidad la serie converge hacia la media aritmética del límite a la izquierda y el límite a la derecha de la función, es decir, hacia

$$\frac{1}{2}\,[f(x-0)+f(x+0)].$$

Riemann emprende sus trabajos sobre el tema en 1854 en su *Habilitations-schrift* (Memoria de habilitación) en Gotinga, y los prosigue en una obra que trata *Sobre la posibilidad de representar una función mediante una serie trigonométrica, sin hacer ninguna suposición sobre la naturaleza de la función.* Riemann procede a la demostración del teorema fundamental dividiendo la serie trigonométrica en dos partes:

Partiendo de

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx + \tfrac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$$

hace

$$\tfrac{1}{2}b_0 = A_0,\; a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx = A_n,$$

a continuación forma la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

y llama Ω a la suma y $f(x)$ a su valor, donde $f(x)$ estará determinada solamente para los valores de x para los cuales la serie converge. Es necesario que $A_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ para asegurar la convergencia. Si los coeficientes a_n y b_n tienden a cero, los términos de Ω tienden a cero para todo x. Riemann demuestra, pues, que si $f(x)$ es acotada e integrable en $[-\pi, \pi]$ entonces los coeficientes a_n y b_n tienden a cero cuando n tiende a infinito; es el teorema fundamental. Subrayemos aquí un problema aún no resuelto: determinar las condiciones necesarias y suficientes de $f(x)$ para que su serie de Fourier converja hacia $f(x)$. Se encuentran también en su última obra otros teoremas importantes sobre las series de Fourier: $f(x)$ puede ser integrable sin ser necesariamente representable mediante una serie de Fourier; hay funciones no integrables para las cuales las series trigonométricas Ω convergen para un número infinito de valores de x, tomados entre dos límites próximos cualesquiera; una serie trigonométrica puede converger para un número infinito de valores de x en un intervalo arbitrariamente pequeño incluso si a_n y b_n no tienden a cero para todo x.

Riemann se significó en muchas otras ramas de las matemáticas, en particular en la teoría de números, demostrando la importancia de la función dsda en la teoría aritmética de los números primos; en ecuaciones diferenciales, proponiendo un nuevo método para resolver el problema de valores iniciales de la ecuación de ondas; en geometría diferencial, con la introducción de la noción de superficie de Riemann (formada de planos superpuestos, en número igual al grado de una ecuación algebraica, y ligados por líneas de paso) que transforma una función no uniforme en una función uniforme sobre la superficie en oposición al plano Z. Sus trabajos sobre las relaciones entre la teoría de funciones y la teoría de superficies han conducido al estudio de problemas de naturaleza topológica. Subrayemos también sus importantes trabajos en geometría, que serán analizados en un capítulo posterior al presentar los trabajos fundamentales de geometría del siglo XIX. Los trabajos de Riemann cambiaron completamente la teoría de funciones de variables complejas, y aportaron puntos de vista nuevos sobre la teoría de las integrales elípticas, además de sus memorias sobre el calor, la luz, la teoría de los gases, el magnetismo, la dinámica de fluidos y la acústica. Riemann consideraba que sus investigaciones sobre las leyes de la física eran las que más le interesaban. Como matemático,

se sirvió libremente de la intuición geométrica y de argumentos físicos.

WEIERSTRASS

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Westfalia, en una familia católica pero liberal. Karl era el mayor de una familia que contaba además con otro hijo y dos hijas, pero ninguno de ellos se casaría, probablemente a causa de la actitud dominadora de su padre. Después de brillantes estudios secundarios, entró en la Universidad de Bonn como estudiante de Derecho, pero sus múltiples actividades le impidieron completar sus estudios universitarios. Se dedicó a las matemáticas sólo a partir de 1838, pero no llegó a terminar sus estudios de doctorado. Karl se orientó más bien hacia la enseñanza, y de 1841 a 1854 fue profesor en un colegio privado. Después de haber debutado como maestro en Munster, y luego en Deutsch-Drone y Braunsberg, fue nombrado profesor en 1856 en el Instituto Profesional de Berlín, sobre todo gracias a algunos resultados que fueron publicados en un período durante el cual no mantuvo prácticamente ningún contacto con los matemáticos de su tiempo, excepto con Christophe Guderman (1798-1851) que estaba interesado particularmente en la representación de funciones mediante series de potencias. Encargado de curso en 1856 en la Universidad de Berlín, Karl se convirtió en profesor titular de esta universidad a partir de 1863. Permaneció en su puesto hasta su muerte, a los ochenta y dos años, el 19 de febrero de 1897. Metódico y cuidadoso, Weierstrass intentó fundamentar las matemáticas, y en particular el análisis, con el máximo de rigor posible más que recurrir a la intuición. Al haber publicado muy poco, se dio a conocer por sus enseñanzas en la universidad. Su influencia se hizo sentir a través de las publicaciones matemáticas de sus numerosos discípulos, y en el Congreso Internacional de París, en 1900, Hermite dirá de él: «Weierstrass es el maestro de todos nosotros».

Los trabajos de Weierstrass sobre la aritmetización del análisis completaron los de Bolzano, Abel y Cauchy, y serían conocidos sólo a partir de 1859 por sus enseñanzas en la Universidad de Berlín. La

expresión «una variable se aproxima a un límite» que se encuentra en las definiciones de Cauchy y Bolzano sugiere implícitamente el tiempo y el movimiento. Weierstrass, por su parte, resalta el concepto aritmético e interpreta sencillamente una variable como «una letra que representa cualquier valor de un conjunto dado», eliminando así la idea de movimiento. Una variable continua es una variable tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de los valores atribuidos a la variable y δ es un número positivo cualquiera, hay otros valores de la variable en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

La primera definición de límite de una función en términos de ε y δ propuesta por Weierstrass puede encontrarse, según parece, en su curso de cálculo diferencial impartido en 1861. La formulación de Weierstrass precisa la expresión vaga «llega a ser y sigue siendo tan pequeña como cualquier cantidad dada», que puede encontrarse en las definiciones de Cauchy y Bolzano, en estos términos:

> Si es posible determinar una cota δ tal que para todo valor de h, más pequeño en valor absoluto que δ, $f(x + h) - f(x)$ sea más pequeña que una cantidad ε tan pequeña como se quiera, entonces se dirá que se ha hecho corresponder a una variación infinitamente pequeña de la variable una variación infinitamente pequeña de la función.

La definición de la continuidad de una función propuesta por Weierstrass proviene de una simplificación de un teorema demostrado anteriormente por Dirichlet. Equivalente a las de Bolzano y Cauchy, esta definición tiene el mérito de ser más precisa y menos ambigua: $f(x)$ es continua en $x = x_0$, si para un número positivo arbitrariamente pequeño ε, es posible encontrar un «entorno» de x_0 de amplitud δ tal que para todos los valores en ese entorno la diferencia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$. Weierstrass extiende la continuidad de la función en un intervalo mostrando que es continua en cada punto de ese intervalo.

Después de 1861 Weierstrass se planteó la cuestión de la construcción de una función continua que no es derivable en ningún punto. La célebre función de Weierstrass fue comunicada en una carta de 1874 a Du Bois-Reymond. Fue a partir de esta correspondencia cuando los matemáticos se plantearon un nuevo y completo examen de los fundamentos del análisis (las funciones de Bolzano y

Riemann, aunque encontradas anteriormente, no habían llamado la atención de los matemáticos). Su función se define como sigue:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos (a^n \pi x)$$

donde x es una variable real, a un entero impar mayor que 1, b una constante positiva menor que 1, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. La serie es uniformemente convergente y define así una función continua. Esta función continua pero no derivable en ningún punto precipitó la crisis que engendró la construcción del sistema de los números reales. Ya en el siglo XIX este género de funciones suscitaba la indignación de los matemáticos, y Hermite decía: «Me alejo con espanto y horror de esta plaga lamentable de funciones continuas que no tienen derivada.»

Una parte importante del curso de 1861 fue el estudio de la derivación de las series infinitas, en el que Weierstrass introdujo la noción de convergencia uniforme. Aunque esta noción fuera reconocida y en 1848 por el físico matemático G. G. Stokes (1819-1903), cuyo nombre ha quedado unido a un importante teorema que transforma una integral de superficie en una integral simple, y por P. L. Seidel (1821-1896), ni uno ni otro dieron una formulación precisa como la de Weierstrass. Sabemos que la convergencia uniforme exige que, dado un ε cualquiera, exista un N tal que para todo $n > N$,

$$\left| S - \sum_{1}^{n} u_n(x) \right| < \varepsilon$$

para todo x en el intervalo considerado, donde S es la suma de la serie. Weierstrass utilizó esta noción de convergencia uniforme para demostrar que el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, y también para demostrar los teoremas de derivación e integración término a término de una serie de funciones.

Weierstrass se distinguió en numerosas ramas de las matemáticas: fue el primero que utilizó ampliamente las series de potencias para representar funciones en dominios diferentes; sus estudios sobre las funciones elípticas expresadas como cocientes de series de potencias le condujeron a completar y remodelar la teoría de estas funciones; sus trabajos referentes al cálculo de variaciones engen-

draron un nuevo interés y estimularon las actividades de matemáticos dedicados a esta disciplina. Weierstrass se ocupó igualmente de las álgebras de dimensión finita, de las integrales abelianas y de la geometría algebraica. Finalmente, sus estudios sobre los fundamentos de la aritmética y su teoría de los números reales, como veremos más adelante, marcaron profundamente el desarrollo de los fundamentos lógicos de las matemáticas.

Creación de los números reales

La fundación lógica del sistema de los números reales no fue realizada hasta finales del siglo XIX, lo que aparece como uno de los hechos más sorprendentes de la historia de las matemáticas. El concepto de número aparece muy pronto en la historia de la humanidad, y ciertos factores nos permiten pensar que el hombre primitivo poseía ya una vaga idea del concepto de número. Gradualmente, el hombre aprendió a servirse de él para sus necesidades prácticas y utilitarias, y ya en la época de los griegos el número se había convertido en un objeto que podía ser estudiado por sí mismo. A través de los siglos, se constituyó un álgebra en la que las operaciones estaban de alguna manera ligadas a la veracidad de las soluciones obtenidas. Así, de una manera lenta y progresiva, los conceptos de números natural, cero, número negativo, fracción, números racional e irracional y número complejo emergen tímidamente a la superficie, pero la propia existencia de esos números reposa esencialmente sobre consideraciones de naturaleza geométrica o algebraica. A mediados del siglo XIX los matemáticos se contentaban con una comprensión intuitiva de esos números, y la mayoría de ellos parecían satisfechos operando sobre esta base más concreta que lógica. No es sorprendente, pues, constatar cómo las sencillas propiedades de los números racionales positivos y negativos no son establecidas lógicamente, e incluso ni siquiera definidas antes del siglo XIX, lo que constituye una prueba de que el desarrollo de las matemáticas no progresa siempre de manera lógica.

La introducción del rigor en el análisis puso de manifiesto la falta de claridad y la imprecisión del sistema de los números reales. El estudio más preciso de los límites demostró la necesidad de llegar a una comprensión lógica de los números, y en particular del hecho de que una sucesión de números racionales puede tener como límite un

número irracional e inversamente. Los trabajos de Cauchy sobre la convergencia de las series infinitas, el teorema de la media demostrado por Bolzano y el estudio de las funciones discontinuas representables mediante series de Fourier revelaron esta misma laguna, que exigía una estructuración lógica de los números sobre bases esencialmente aritméticas.

Antes de abordar el desarrollo del sistema de los números reales a través de las teorías de los números racionales e irracionales, intentaremos hacer un breve resumen histórico de los trabajos sobre los números algebraicos y trascendentes.

Números algebraicos y trascendentes

La distinción entre los números irracionales algebraicos y los números irracionales trascendentes apareció en el siglo XVIII, en la época en que Euler demostró sustancialmente que e y e^2 son irracionales y en que Lambert demostró que π es irracional. Los trabajos de Legendre sobre la hipótesis de que π podía no ser una raíz de una ecuación algebraica con coeficientes racionales señalaron el camino hacia la existencia de números irracionales de diferentes tipos. Por ejemplo, toda raíz de una ecuación algebraica polinómica con coeficientes racionales es llamada «número algebraico», mientras que todo número que no sea algebraico es llamado trascendente. Recordemos que Euler reconocía la distinción entre estos dos géneros de irracionales ya en 1744. Habrá que esperar casi un siglo antes de que se establezca claramente la existencia de los irracionales trascendentes, sobre todo gracias a los trabajos de Liouville, Hermite y Lindemann.

LIOUVILLE

Joseph Liouville (1809-1882) nació en Saint-Omer en 1809 e hizo estudios de ingeniero, figurando entre los mejores discípulos de Cauchy. Enseñó matemáticas en las grandes escuelas y en la Facultad de Ciencias de París. Liouville fundó en 1836 el *Journal de Mathématiques Pures y Appliquées,* que se conoce actualmente bajo el nombre de *Journal de Liouville,* el cual sustituyó a los *Annales* de

Gergonne, ya desaparecidos en esa época. Aunque su nombre no vaya unido a ningún descubrimiento realmente fundamental, escribió sobre aritmética, geometría y física, y se distinguió particularmente como analista. En efecto, un teorema de análisis lleva su nombre: si $f(z)$, una función analítica entera de una variable compleja z, está acotada en el plano complejo, entonces $f(z)$ es constante. El teorema fundamental del álgebra puede ser considerado como un corolario del teorema de Liouville. Se le deben también estudios sobre las propiedades generales de las funciones monógenas (analíticas) y la primera teoría completa de las funciones elípticas consideradas como casos particulares de las funciones de una variable imaginaria.

En 1844 Liouville mostró que todo número de la forma

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \dots$$

donde las a_i son enteros cualesquiera tales que $0 \leq a_i \leq 9$ es un número trascendente. Por ejemplo, el número 0,10010001... es un número trascendente así como todos los números de la forma particular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$$

Liouville demostró que si p/q es una aproximación de un número irracional algebraico x de grado n, con p y q enteros, entonces existe un número positivo M tal que

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{M}{q^n}$$

Pudo demostrar así, mediante la teoría de las fracciones continuas, que ni e ni e^2 podían ser la raíz de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros. La siguiente etapa importante será la demostración de la trascendencia de e por Hermite.

HERMITE

Charles Hermite (1822-1901), nació en Dieuze en 1822. Fue diplomado de la Escuela Politécnica, donde más tarde ocupará una

puesto de profesor, así como en la Facultad de Ciencias de París y en el Colegio de Francia. Durante toda su vida, consagrada a las matemáticas puras, Hermite no cesará de perfeccionar la teoría de las funciones elípticas. En particular, Hermite encontró una fórmula de descomposición en elementos simples que lleva su nombre y que permite la integración de toda función elíptica. Además, descubrió la relación que existe entre las funciones elípticas y la aritmética superior, y demostró que estas mismas funciones permiten integrar la ecuación diferencial llamada de Lamé. Llegó incluso a encontrar una solución de la ecuación general de quinto grado, que se encuentra publicada en los *Nouvelles Annales de Mathématiques,* mediante esta teoría de funciones. Finalmente, su nombre ha quedado unido a las formas llamadas hermíticas, para la representación de los enteros reales o complejos (en las matrices, por ejemplo), así como a ciertos polinomios que se obtienen resolviendo un tipo de ecuaciones diferenciales mediante series.

Trascendencia de e *y* π

En una memoria sobre la función exponencial publicada en los *Comptes rendus* de la Academia en 1873, Hermite demostró que el número *e* no podía ser raíz de ninguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, es decir, que *e* es un número trascedente. La demostración de Hermite es muy sofisticada y requiere un conocimiento profundo de las matemáticas; sin embargo, consiste esencialmente en demostrar que la ecuación

$$C_0 + C_1e + .C_2e^2 + \ldots + C_ne^n = 0$$

donde *e,* que es el número de Euler, no puede existir. En la última parte de su memoria, Hermite aplica su método de demostración para obtener aproximaciones tales como

$$e = \frac{58291}{21444} \text{ y } e^2 = \frac{158452}{21444}$$

La trascendencia del número π será demostrada ulteriormente por Ferdinad Lindemann (1852-1939) en una memoria publicada en los *Mathematische Annalen* en 1882, bajo el título de *Uber diez Zahl* (Sobre el número). Siguiendo un método semejante al de Hermite,

Lindemann demuestra que el número e no puede satisfacer idénticamente la ecuación

$$(1) \qquad C_1e^{x_1} + C_2e^{x_2} + \ldots + C_ne^{x_n} = 0$$

donde los x_i son números algebraicos distintos, reales o complejos, y los C_j son números algebraicos que no son todos nulos. Primero, demuestra que la ecuación $e^{ix} + 1 = 0$ no tiene solución para un x algebraico. En efecto, hagamos en (1) $n = 2$, $C_1 = 1$ y $x_2 = 0$. Se constata que e^{x_1} no puede ser algebraico para un x_1 que sea algebraico diferente de cero. Como x_1 puede ser 1, e es trascendente. Así, sabiendo que $e^{i\pi} + 1 = 0$ para $x = \pi$,el número $i\pi$ no puede ser algebraico. Pero i es un número algebraico, por lo que π ha de ser un número trascendente, ya que el producto de dos números algebraicos es algebraico. Esta demostración de la trascendencia de π representa la respuesta definitiva al célebre problema de la cuadratura del círculo, porque esta cuadratura sería posible mediante la regla y el compás sólo si π fuera la raíz de una ecuación de segundo grado. Además, en virtud de este resultado, el número π puede ser la ordenada de una curva sólo si esta curva es trascendente, como por ejemplo, $y = e^x$, $y = \text{arc sen } x$. Por tanto, la construcción de estas curvas trascendentes puede hacerse sólo mediante procedimientos o aparatos, como el intégrafo por ejemplo. Subrayemos que la naturaleza enigmática de la constante de Euler permanece todavía sin resolver. Lindemann se interesó también por el último teorema de Fermat, y consagró varios años de esfuerzos a intentar demostrarlo, pero sin éxito.

TEORÍA DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

HAMILTON

William Rowan Hamilton (1805-1865), nació el 3 de agosto de 1805 en Dublín, Irlanda. Era el menor de una familia de tres hijos y una hija. Su brillante inteligencia provenía probablemente de su madre y, por un cúmulo de circunstancias el joven William consagró una buena parte de su infancia a aprender lenguas, sin saber muy bien el porqué, bajo la dirección de un tío apasionado por la materia. Así, a

los cinco años tan sólo, Hamilton podía leer el latín, el griego y el hebreo; tres años más tarde añadía a su bagaje lingüístico el italiano y el francés; a los diez años aprendió el árabe y el sánscrito y finalmente, a los catorce años, el persa. Su encuentro con el joven calculador americano Zerah Colburn le hizo abandonar provisionalmente el estudio de las lenguas para lanzarse al estudio de las matemáticas. En 1823 se encuentra en el Trinity College de Dublín, y ya entonces presenta una memoria sobre las caústicas que será leída en 1824 en la Academia Real de Irlanda. Corregida y aumentada, esta memoria será presentada de nuevo a la misma Academia en 1827 con el título de *A theory of systems of rays* (Una teoría de los sistemas de rayos), que erigía la óptica geométrica en un verdadero cuerpo de doctrina e introducía las funciones características de la óptica. En 1830 y 1832, Hamilton publicó tres suplementos a esta célebre memoria. Mientras tanto, sucedió en 1827 a John Brinkley en la cátedra de astronomía del Trinity College, donde destacó como profesor. Es conocido sobre todo por su teoría de los cuaterniones, que será objeto de estudio en el próximo capítulo, pero Hamilton se distinguió también en muchos otros campos: estudio de la dinámica sirviéndose de sus célebres funciones características; secciones cónicas, a las que dedicó varias memorias, así como a la resolución de la ecuación de quinto grado y al primer tratamiento sistemático de los números irracionales, que es el tema que más nos interesa en este capítulo.

Trabajos de Hamilton sobre los números irracionales

En dos memorias leídas ante la Academia Real de Irlanda en 1833 y 1835 respectivamente, y que serían publicadas con el título de *Algebra as the science of pure times...* (El álgebra como la ciencia del tiempo puro...), Hamilton escoge el tiempo como el concepto fundamental del que deduce la noción de unidad. Citado por Manheim, escribe:

> La idea de la continuidad de la progresión de un momento a otro en el tiempo engloba la idea de una progresión continua de manera semejante en las cantidades [...] Prosiguiendo esta sucesión de ideas, nos vemos obligados a concebir [...] la existencia de un número determinado o de una razón

a que es la raíz cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón *b*.

Influenciado por el pensamiento de Newton, Hamilton fundamenta su teoría del álgebra sobre el concepto de tiempo, base intuitiva insatisfactoria para erigir los números en sistemas, ya que cree necesario recurrir al universo físico para justificar ante sus contemporáneos esas nociones abstractas. Partiendo de los enteros positivos y de sus conocidas propiedades elementales, considera una serie equidistante de momentos

$$\ldots E''E'EABB'B''\ldots$$

donde cada letra representa un instante o un momento de tiempo tal que los intervalos de tiempo entre dos momentos sucesivos son todos iguales unos con respecto a otros. El momento *cero,* denotado con A es el patrón y todos los demás deben compararse con él, mientras que B recibe el nombre de «el primer momento positivo». El operador a permite pasar de un momento a otro cuando se coloca a la derecha, de la manera siguiente

$$B = a + A,\ B' = a + B = 2a + A,\ \ldots$$

A continuación, Hamilton introduce los ordinales, θ, 0, 1, 2, 3, ... donde $\theta = -1$, de forma que sea posible representar la serie de las etapas formadas a partir del momento cero como sigue

$$\ldots\ 3\theta a,\ 2\theta a,\ 1\theta a,\ 0a,\ 1a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots$$

donde

$$3\theta a = -3a = E'' = -3a + A$$

Si $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ son los ordinales de esta serie, Hamilton demuestra a su manera propiedades tales como

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,\ \alpha\beta = \beta\alpha,\ \theta\theta = 1,$$

y la asociatividad y distributividad. Introduce las fracciones racionales de manera semejante y afirma, en particular, que el símbolo fraccionario 1/0 denota un acto imposible. Después de esta presentación de los números racionales, Hamilton sugiere la idea de la partición de los racionales en dos clases (cortadura de Dedekind) y define un número irracional como el representante de tal partición. Hamilton asegura que existe un conjunto infinito de números entre

dos números racionales. Si A y B son dos conjuntos infinitos de números racionales tales que cada elemento de A es inferior a todo elemento de B, y además, si los elementos de A y B están definidos en extensión, puede ocurrir que no haya ningún número racional entre A y B. A partir de una intuición de la continuidad del tiempo, Hamilton sugirió, en esta etapa, que esos conjuntos A y B podían servir para determinar los números irracionales. Partiendo de una media proporcional entre dos números positivos, enuncia que si $a > n'/m'$ cuando $n'^2/m'^2 < b$ y si $a < n''/m''$ cuando $n''^2/m''^2 > b$, entonces $a = \sqrt{b}$. Así, la $\sqrt{b}$ es una partición determinada por dos sucesiones $\{\mu_i\}$ y $\{v_i\}$ con la propiedad de que

$$\mu_i^2 < b < v_j^2, \text{ donde } i, j = 1, 2, \ldots$$

Hamilton no desarrolló más su teoría de los números irracionales, y toda ella se basaba esencialmente en determinar los números irracionales mediante los números racionales.

MÉRAY

Charles Méray (1835-1911), matemático francés, nació en Chalon-sur-Saône en 1835, y fue un apóstol de la aritmetización de las matemáticas. Encargado de curso en 1866 en la Facultad de Ciencias de Lyon y después profesor en la misma institución en 1867, Méray fue el primero en publicar un desarrollo aritmético de los sistemas de números. En 1869 publicó una memoria titulada *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limite à des variables données* (Observaciones sobre la naturaleza de las cantidades definidas por la condición de servir de límites a variables dadas) en la *Revue des Sociétés Savantes,* en la que señala, en primer lugar, algunas importantes lagunas en el razonamiento de los matemáticos desde la época de Cauchy, y reconoce las dificultades con que tropezaron esos matemáticos. De hecho, Méray pone de manifiesto el hecho que consiste en definir el número irracional como el límite de una sucesión de números racionales, sin tener demasiado en cuenta que la existencia misma del límite presupone una definición de los números reales.

Méray emplea la palabra «número» para designar el número

racional, y una cantidad μ es llamada «variable progresiva» si puede tomar un número infinito de valores sucesivos de un conjunto $\{\mu_n\}$; Méray define a continuación la convergencia de la variable progresiva μ en términos de $|\mu_{n+p} - \mu_n| \to 0$ con $1/n$, cualquiera que sea el valor asignado al límite. Así, existen dos tipos de sucesiones convergentes. La primera verifica la condición de que existe un N tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un n tal que para todo

$$m \leq n, |N - \mu_m| < \varepsilon \Rightarrow |\mu_{n+p} - \mu_n| \to 0$$

con $1/n$, y la segunda corresponde a la condición siguiente: el N definido anteriormente no existe y μ no tiene límite, pero puede verificarse

$$|\mu_{n+p} - \mu_n| \to 0 \text{ con } 1/n$$

Las sucesiones convergentes sin límite se llaman «límites ficticios» y, en términos de números, Méray las llama «números ficticios». A continuación, Méray muestra cómo la ordenación de estos números ficticios puede ser referida al esquema de la ordenación de los números, así como extiende todas las operaciones entre números racionales a estos números ficticios, que nosotros llamamos números irracionales. A título de ejemplo, Méray explica la significación de $\sqrt{a}$ cuando a no es un cuadrado. Según su teoría, $\sqrt{a}$ es el límite ficticio de toda variable progresiva μ cuyo cuadrado se aproxima a a, y si la variable v es tal que $\mu_i - vj \to 0$, se dice entonces que el límite ficticio de v es también $\sqrt{a}$.

Weierstrass y su teoría de los números irracionales

Weierstrass intentó separar el cálculo diferencial e integral de la geometría y hacer reposar todo ese cálculo sobre el concepto de número. Para realizar este nuevo enfoque, de la misma manera que Méray, se dio cuenta de que era necesario definir el número irracional independientemente del concepto de límite. Sus investigaciones sobre la aritmetización no fueron publicadas, y por ello debemos basarnos sobre todo en las notas publicadas por sus alumnos (V. Dantscher, A. Pringsheim y G. Mittag-Leffler) para extraer de ellas las ideas esenciales.

Weierstrass define una «cantidad numérica» como un conjunto dado de elementos de los que se conoce el número de veces que cada elemento aparece en el conjunto. El número de elementos es finito o infinito, pero el número de veces que un elemento aparece en el conjunto es necesariamente finito. En el caso finito, el conjunto se dice finito, y es igual a la suma de los elementos. La igualdad de dos conjuntos finitos se obtiene cuando las sumas respectivas son iguales. Los enteros como 1, 2, ... se llaman «cantidades numéricas absolutas» mientras que las partes de un entero, como por ejemplo 1/3, son las fracciones.

Una cantidad numérica absoluta *a* contiene un número racional absoluto *r* si un agregado parcial *α* igual a *r* puede ser sustraído de *a*. La cantidad numérica absoluta *a* se dice finita si existe un número racional *p* tal que todo número racional contenido en *a* es más pequeño que *p*. Dos cantidades numéricas absolutas finitas *a* y *b* serán iguales sólo si todo número racional contenido en *a* está también contenido en *b*. En el caso de que *a* contenga un número racional que no sea elemento de *b*, se dice que *a* es mayor que *b*. La suma de *a* y *b* es la cantidad numérica *c* definida como el conjunto cuyos elementos son aquellos que aparecen en *a* o en *b*, de manera que cada elemento de *c* sea igual al número de veces que un elemento *α* aparece en *b*. El producto de *a* y *b* se define como la cantidad numérica absoluta que se obtiene con los agregados cuyos elementos se obtienen formando de todas las maneras posibles los productos de cada elemento de *a* y cada elemento de *b*. Weierstrass extiende esta definición a la suma de un número finito de cantidades numéricas absolutas, de manera que cada cantidad de esta suma sea la suma de las componentes, y pasa a continuación a la suma de un número infinito de cantidades de una manera completamente análoga. En efecto, la suma de un número infinito de cantidades *a, b, c,* ... es la cantidad numérica absoluta *s* (agregado) cuyos elementos aparecen al menos en una de las *a, b,* ..., de manera que cada uno de los elementos *e* está tomado un número de veces N_e igual al número de veces que aparece en *a,* más el número de veces que aparece en *b,* y así sucesivamente. Para asegurarse de que *s* es finita y determinada, es necesario que cada uno de sus componentes aparezca un número finito de veces en *s*. Además es también necesario y suficiente que se pueda asignar un número *N* tal que la suma de todo número finito de cantidades *a, b, c,* ..., sea inferior a *N*. De estas

definiciones, se sigue que toda cantidad absoluta es la suma de los elementos de los que está compuesta.

En la teoría de Weierstrass, los números irracionales son, pues, agregados de números racionales más que sucesiones ordenadas de números racionales, y esta teoría ofrece la inmensa ventaja de evitar el tener que recurrir de antemano a la existencia de límites. Cantor emprendió también algunos estudios con objeto de efectuar la aritmetización, elaborando una teoría de los números irracionales que sería posteriormente modificada en parte por su alumno E. Heine (1826-1881).

CANTOR

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, en una familia de tres hijos. Su padre era un próspero comerciante de origen judío que se había convertido al protestantismo. Educado primero bajo la dirección de un tutor, frecuentó después la escuela elemental de su ciudad natal, donde mostró ya un interés marcado por el estudio de las matemáticas. Sin embargo, su padre deseaba que su hijo mayor hiciera la carrera de ingeniero militar y, después de realizar estudios secundarios en colegios privados de Francfort, en 1859 entra en la Escuela Politécnica de Darmstadt. Deja la escuela de ingeniería militar en 1862 para emprender estudios superiores en Zurich, que abandona en 1863 después de la muerte de su padre. En otoño de 1863, entra en la Universidad de Berlín, donde estudia matemáticas, física y filosofía. Kummer, Weierstrass y Kronecker eran en aquél entonces los tres grandes matemáticos alemanes y, en particular, Kronecker estimuló vivamente a Cantor para que se interesara por la teoría de números. Sin embargo, será Weierstrass quien ejercerá, con mucho, la mayor influencia en la carrera científica del joven Cantor.

En 1867 recibe el doctorado después de haber presentado una disertación sobre las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss y la *Teoría de números* de Legendre. A continuación comienza su carrera como profesor en la Universidad de Halle y publica sus primeros trabajos, todos consagrados a la teoría de números. En 1872 conoce en Suiza a Richard Dedekind, y ese encuentro será el comienzo de una larga amistad entre estos dos célebres matemáticos. El año 1874 fue muy

importante para Cantor, pues fue el año de su matrimonio con Vally Guttman, y el del nacimiento de la teoría de conjuntos, marcado por la publicación de un artículo en la revista de Crelle. El contenido de esa memoria fue considerado paradójico en esa época, y a medida que su teoría progresaba, se hacía más fuerte la oposición a la misma, en particular por parte de Kronecker. Cantor tenía, sin embargo, también defensores, entre los que se contaban Weierstrasss y Dedekind. Desde 1879 hasta 1884 publicó prácticamente toda su teoría de conjuntos, y las numerosas dificultades con que tropezó Cantor durante ese período, como el retraso en la impresión de su tratado de 1878 y el movimiento de contestación dirigido por Kronecker, le afectaron de tal manera que cayó en una profunda depresión nerviosa durante el año 1884. Según parece, a la luz de los acontecimientos, la oposición constante de Kronecker a los trabajos de Cantor no se dirigía personalmente contra este último, sino más bien contra la naturaleza de los conceptos cantorianos, sobre la base de las convicciones científicas personales de Kronecker. La muerte del influyente Kronecker en 1891 y, al mismo tiempo, la amistad sincera de hombres influyentes como Mittag-Leffler, unida al afecto personal de Weierstrass, hicieron probablemente más tolerable la vida de Cantor. Después de 1891, los trabajos de Cantor comenzaron a ser justamente reconocidos y su persona recibió merecidos honores. Murió el 6 de enero de 1918 en una clínica psiquiátrica de Halle, después de asistir a las primeras manifestaciones de la considerable influencia que su teoría ejercería en el mundo de las matemáticas y constatar igualmente el justo reconocimiento general que tanto había deseado.

Cantor se había interesado desde el comienzo de su carrera científica por los estudios en teoría de números; más tarde redactó un cierto número de memorias sobre las series trigonométricas. Fue este estudio de las series trigonométricas el que llevó a Cantor a la teoría de conjuntos de puntos y a los cardinales transfinitos. Además, en su décima memoria, publicada en 1872, Cantor presentó por primera vez su teoría de los números irracionales. Volveremos más tarde sobre su teoría de conjuntos, pero a continuación nos ocuparemos de su estudio de los números irracionales.

Teoría de los números irracionales de Cantor-Heine

Uno de los problemas importantes de la época en el tema de las series trigonométricas consistía en establecer la unicidad del desarrollo trigonométrico a propósito de las series generales, es decir, aquellas cuyos coeficientes no tienen necesariamente la forma integral de Fourier. Desde 1870 a 1872, Cantor redactó cinco memorias sobre las series trigonométricas en las que prestó especial atención al teorema de unicidad, y en noviembre de 1871 añadió una extensión a ese teorema incorporándole la frase: la convergencia o la igualdad de la suma de la serie trigonométrica puede no verificarse en un agregado *infinito* de x en el intervalo $0 \ldots 2\pi$ sin que por ello el teorema deje de ser válido. Es entonces cuando Cantor intenta describir la estructura de tal agregado presentando aclaraciones sobre la naturaleza de las cantidades numéricas tanto finitas como infinitas. Heine sugirió algunas simplificaciones a la teoría de Cantor en una memoria publicada en la revista de Crelle, en 1872, bajo el título *Die Elemente der Funktionenlehre* (Los elementos de la teoría de funciones) y fue así como se convino en hablar de la teoría de Cantor-Heine, aunque el primero hubiera publicado en 1883 una memoria más detallada sobre la teoría de los números irracionales.

Introducen una nueva clase de números, los números reales, que contiene los números racionales y los irracionales. La construcción de los números reales se efectúa sobre la base de los números racionales partiendo de una sucesión de números racionales $\{a_i\}$ que satisface la condición de que, para todo n dado, todos los miembros salvo un número finito difieren uno del otro de manera que

$$\lim_{n \to \infty} (a_n - a_{n+r}) = 0$$

para un número r cualquiera.

Esta sucesión, llamada «fundamental», es por definición un número real, mientras que una sucesión que verifique la propiedad

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

se llama «elemental».

Dos sucesiones fundamentales $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ son iguales o representan el mismo número real sólo si la sucesión $\{a_i - b_i\}$ es elemental. A propósito de estas sucesiones elementales, Cantor-Heine definen la

sucesión nula, la sucesión positiva y la negativa. Dado un número racional arbitrario, si los términos de la sucesión para un N suficientemente grande son todos inferiores en valor absoluto a ese número racional dado, entonces la sucesión se dice nula. La sucesión se dirá positiva si para un N suficientemente grande, todos los términos son superiores a un número racional positivo dado, mientras que si todos los términos son inferiores a un número racional negativo dado, la sucesión se dirá que es negativa. A cada sucesión fundamental $\{a_i\}$ cuyos términos son a_1, a_2, a_3, ... a_n asocian el símbolo A y, en particular, si $a_i = a$ para todo i, el símbolo asociado a A es a. Esta elección del simbolismo permite así encastrar los números racionales en un nuevo conjunto, la sucesión fundamental. Por ejemplo, toda sucesión $\{a_i\}$ con $a_i = a$ para todo i donde a sea un número racional define el número racional a.

Dadas dos sucesiones fundamentales $\{a_i\}$ y $\{v_i\}$, representadas por A y V, puede demostrarse que $\{a_i + v_i\}$, $\{a_i \cdot v_i\}$ y $\{a_i/v_i\}$ (con $v_i \neq \{0\}$) son sucesiones fundamentales. Esto define la suma $A + V$, el producto $A \cdot V$, y el cociente A/V ($V \neq 0$) de dos números reales. Asimismo, se define la igualdad y la desigualdad de la misma manera: $A = V$, $A > V$ o $A < V$ según sea $A - V$, igual, mayor o menor que cero.

Definen a continuación el límite de una sucesión fundamental $\{a_i\}$ de la manera siguiente: si existe un número racional A tal que

$$\lim_{n\to\infty} (A - a_n) = 0,$$

entonces A es el límite de $\{a_i\}$. Después muestran que si los términos de una sucesión fundamental tienen el límite racional A, entonces el símbolo A es también el asociado a la sucesión. Por ejemplo, las fracciones 0.1, 0.11, 0.111, ... tienen como límite 1/9, y 1/9 es el número asociado a la sucesión

$$\{0.1, 0.11, 0.111, \ldots\}.$$

La extensión del concepto de límite a los números irracionales se efectúa de la manera siguiente: si A es un símbolo (racional o no) y si

$$\lim_{i\to\infty} (A - a_i) = 0,$$

entonces A es el límite de $\{a_i\}$. Con ello puede demostrar el teorema

siguiente: si $\{a_i\}$ es una sucesión cualquiera de números reales (racionales o irracionales) y si

$$\lim_{i \to \infty} (a_{i+r} - a_i) = 0,$$

para un r cualquiera, entonces existe un número real A único, determinado por la sucesión fundamental de los números a_i lim $a_i = A$. Es así como, determinando el límite de una sucesión fundamental (o sucesión que satisface el criterio de convergencia de Cauchy) por medio de los números existentes, llegaron a demostrar que esos números reales forman un sistema completo. Bastaba entonces poner de manifiesto que los números irracionales se forman a partir de sucesiones fundamentales que no son racionales y demostrar que todas las sucesiones fundamentales no son necesariamente racionales.

DEDEKIND

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nació el 6 de octubre de 1831 en Brunswick, Alemania. Se orientó desde muy pronto hacia las ciencias físicas. Fue probablemente el último alumno conocido de Gauss, quien fue su director de tesis hasta 1852, año en que Dedekind obtuvo su doctorado. Fue luego profesor en el Politécnico de Zurich, y después en la Escuela Técnica Superior de Brunswick. Amigo personal de Cantor, de personalidad muy original, profesó una gran simpatía hacia las ideas, muy discutibles en aquella época, de este último. Toda su carrera científica se desarrolló prácticamente en la sombra, y no le fue ofrecido ningún puesto importante de profesor. Murió el 12 de febrero de 1916, casi dos años antes que Cantor, sin conocer nunca la gloria.

El nombre de Dedekind se ha hecho célebre por sus numerosas contribuciones originales en matemáticas. Subrayemos, entre otras, su teoría de los números algebraicos, que es una generalización de los enteros complejos de Gauss y de los números algebraicos de Kummer; su formulación abstracta de la noción de carácter de un grupo aplicada a los grupos abelianos y probablemente la primera definición abstracta de un grupo finito; su enfoque aritmético en el tratamiento de las curvas algebraicas, cuya idea central proviene de

sus trabajos sobre los números algebraicos; su libro sobre la naturaleza y la representatividad de los números, donde se trata de conjuntos infinitos, etc.; su introducción de clases de números algebraicos llamados «ideales» en honor de Kummer. Sin embargo, su celebridad se basa sobre todo en sus *Ensayos sobre la teoría de números,* publicados en 1872, que se ocupan del concepto de continuidad y los números irracionales.

Teoría de los números irracionales de Dedekind

Encargado de curso de cálculo diferencial e integral en el Politécnico de Zurich en 1858, Dedekind se dio cuenta muy pronto de que la aritmética de los números reales no poseía un fundamento lógico adecuado. Más específicamente, se negaba a recurrir a la evidencia geométrica para demostrar el teorema siguiente: toda magnitud que crece de una manera continua pero no sin límite, debe ciertamente aproximarse a un valor límite. Desde un punto de vista didáctico, encontraba útil el recurrir a la intuición geométrica con el fin de no perder demasiado tiempo, pero en ningún caso este recurso, según Dedekind, podía considerarse científico. Por eso se dedicó a meditar sobre la cuestión durante mucho tiempo pero no encontró un fundamento puramente aritmético y perfectamente riguroso de los principios del análisis matemático. Dedekind estaba convencido, además, de que el concepto de continuidad no había sido bien definido todavía, y que el teorema enunciado más arriba constituía una base suficiente sobre la que fundamentar el análisis. Se dedicó, pues, a encontrar el origen de este teorema en la aritmética y, al mismo tiempo, a dar una definición real de la esencia de la continuidad. Encontró lo que buscaba el 24 de noviembre de 1858. En varias ocasiones había querido escribir un libro sobre la continuidad y los números irracionales, pero su obra no será realizada hasta 1872. La memoria de Heine titulada *Los elementos de la teoría de funciones,* que Dedekind recibió en el mes de marzo de 1872, le reafirmó en la resolución de escribir su libro.

Antes de abordar el estudio de los números irracionales, Dedekind presupone el desarrollo de la aritmética de los números racionales, pero llama la atención sobre un cierto número de puntos que él juzga importantes, estableciendo una comparación entre los

números racionales y los puntos de la recta numérica. A continuación, presenta su estudio de la continuidad de la línea recta, haciendo notar, desde el comienzo, el hecho de que en una línea recta *L* existe una infinidad de puntos que no corresponden a ningún número racional. Por consiguiente, la recta *L* es infinitamente más rica en puntos individuales que el dominio *R* de los números racionales en números individuales. Esto nos conduce, según dice, a completar *R* creando nuevos números de manera que el campo de los números adquiera la misma compleción o, como puede decirse, la misma *continuidad* que la línea recta. Insatisfecho con los métodos habituales para introducir los números irracionales, los cuales se basan directamente en la concepción de longitudes prolongadas, propone en su lugar «que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma» y el problema se reduce entonces a la determinación aritmética de la continuidad.

Como intenta definir completamente los números irracionales sólo mediante los números racionales, y dado que la comparación del dominio *R* de los números racionales con la recta le lleva al reconocimiento de «agujeros», de una cierta discontinuidad de los números, Dedekind plantea así la cuestión: «¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta cuestión y, sólo mediante ella obtendremos una base científica para la búsqueda de *todos* los dominios continuos». El problema consiste, pues, según Dedekind, en indicar una característica precisa de la continuidad que pueda servir de base para deducciones válidas. En la sección precedente (la consagrada al dominio *R*) se ha puesto de manifiesto, prosigue, que cada punto *p* de una línea recta produce una separación en dos porciones tal que cada punto de una porción está situado a la izquierda de cada punto de la otra porción. Tomando la recíproca de esta proposición, Dedekind encuentra la esencia de la continuidad, y formula así su principio:

Si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta separación de la línea recta en dos porciones.

Dedekind añade también que esta proposición no puede ser

demostrada y que, por consiguiente, no es nada más que un axioma por el que se atribuye a la línea recta su continuidad. En la sección IV, titulada *Creación de los números irracionales,* Dedekind introduce su célebre «cortadura» al considerar la división de los números racionales en dos clases tales que todo número de la primera clase es inferior a todo número de la segunda. Esta división de los números racionales se llama una «cortadura». Si las clases se designan mediante A_1 y A_2, entonces la cortadura se designa mediante (A_1, A_2). Puede decirse, según Dedekind, que cada número racional a produce una cortadura que posee la propiedad de que, entre los números de la primera clase, existe un número que es el mayor o que, entre los números de la segunda clase, existe un número que es el menor. Inversamente, toda cortadura en los números racionales para los que existe el mayor de los números en la primera clase o el menor de ellos en la segunda, está determinada por un número racional.

Pero Dedekind añade que es fácil mostrar que existen infinidad de cortaduras que no están determinadas por números racionales. Si situamos en la primera clase todos los números racionales negativos y todos los números positivos cuyo cuadrado es inferior a 2, y en la segunda clase todos los demás números racionales, entonces esta cortadura no está determinada por ningún número racional. Para cada una de estas cortaduras, «creamos un nuevo número irracional α que está completamente definido mediante esta cortadura; deberíamos decir que el número α corresponde a esta cortadura o que produce esta cortadura».

Dedekind estudia, a continuación, las relaciones entre las cortaduras, con el fin de obtener una base para la disposición ordenada de todos los números reales. La comparación de dos cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2) nos permite definir la identidad y la desigualdad entre estas dos cortaduras: la identidad se denota mediante $\alpha = \beta$ ó $\beta = \alpha$ donde α y β son los números reales que producen, respectivamente, las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2), mientras que la desigualdad implica $\alpha > \beta$ ó $\beta > \alpha$. En la sección V, presenta las tres propiedades fundamentales de los números reales:

I. Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$ entonces $\alpha > \gamma$ y se dirá que el número β se encuentra entre α y γ.
II. Si α, γ son dos números cualesquiera diferentes, entonces existe

una infinidad de números diferentes β que se encuentran entre α y γ.

III. Si α es un número real cualquiera, entonces todos los números reales se dividen en dos clases A_1 y A_2, de manera que cada una de ellas posee un número infinito de elementos, cada miembro de A_1 es inferior a α y cada miembro de A_2 es superior a α. El número α puede ser asignado a cualquiera de las clases.

Además de estas tres propiedades, Dedekind añade que el dominio de los números reales posee también la propiedad de la *continuidad,* que se expresa de la manera siguiente:

Si el sistema de los números reales está dividido en dos clases A_1 y A_2 de tal manera que cada miembro de A_1 es inferior a todos los miembros de A_2, entonces existe un único número α por el cual se produce esta separación.

Dedekind pasa a continuación a las operaciones con los números reales en la sección VI, y tan sólo define de una manera explícita la operación de adición; las otras operaciones son definibles, según el autor, de una manera análoga. La adición de (A_1, A_2) y de (B_1, B_2) se define así: si c es un número racional cualquiera, lo situamos en la clase C_1, si a_1 está en la clase A_1 y b_1 está en la clase B_1 de manera que $a_1 + b_1 \geq c_1$, y todos los demás números racionales los situamos en la clase C_2. Esta separación forma una cortadura (C_1, C_2), porque cada miembro de C_1 es inferior a cada uno de los de C_2. Dedekind introduce también en esta sección la noción de *intervalo,* y termina sus *Ensayos* volviendo a su teorema de análisis que motivó sus investigaciones, el cual demuestra mediante la noción de cortadura, y subraya que este teorema es equivalente al principio de continuidad.

A pesar de ciertas imprecisiones en su teoría de los números irracionales, como por ejemplo de dónde proviene el número irracional α que produce la cortadura, o por qué ese número α es distinto de la cortadura, Dedekind presentó una teoría satisfactoria lógicamente. Más tarde, se hicieron posibles algunas modificaciones de su teoría, como la de Russell para la construcción de los números reales. Todo este movimiento, emprendido con el fin de realizar la aritmetización del análisis, fue aceptado por la mayoría de los matemáticos. Sin embargo, algunos se opusieron vigorosamente a

estos programas de aritmetización, como Paul du Bois-Reymond (1831-1889), que veía en esta aritmetización una tentativa para destruir la unión necesaria entre el número y la noción de cantidad. Léopold Kronecker (1823-1891), por su parte, basaba sus objeciones no en el proceso mismo de aritmetización sino, por el contrario, en su insuficiencia. Finalmente, Hermann Hankel, creador él mismo de una teoría lógica de los números racionales, se oponía al tratamiento formal de los números irracionales sin la ayuda del concepto geométrico de cantidad, porque conducía, según él, a cosas artificiales y molestas cuyo valor científico no era muy grande. Añadamos que también se dirigieron ciertas críticas contra estos programas de aritmetización, y especialmente los de Cantor y Dedekind.

Quedaba por elaborar una teoría lógica de los números racionales adecuada, lo que sería obra de varios matemáticos, entre los que se puede mencionar a Martin Ohm (1792-1872), hermano del célebre físico, Weierstrass y su idea de la pareja de números, Dedekind y la utilización de las ideas cantorianas sobre conjuntos, y Giuseppe Peano (1858-1932) y los axiomas fundamentales de los números naturales.

Teoría de conjuntos

Hemos visto que la clarificación del concepto de función es el fruto de los trabajos emprendidos con el fin de estudiar más a fondo la representación de las funciones mediante series de Fourier. De la misma manera, a través de teorema de unicidad de la representación de funciones mediante series trigonométricas, algunos matemáticos se decidieron a ocuparse del estudio de los conjuntos infinitos de puntos, en particular Heine, Du Bois-Reymond y, evidentemente, Cantor.

Desde la época de los griegos, la atención de los matemáticos y los filósofos se sintió atraída por las nociones de infinito, de infinitamente grande y de infinitamente pequeño. Algunos de ellos rechazaban categóricamente toda noción actual de una colección infinita de elementos; para otros, la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos conduce a resultados que son incompatibles con la razón. Gauss, el príncipe de los matemáticos, protesta contra la

utilización de una cantidad infinita como una entidad matemática real, porque el infinito no es para él más que una manera de hablar. Cauchy rechaza la correspondencia entre una parte y el todo en un conjunto infinito, porque es una contradicción. En las polémicas inacababLes sobre problemas ligados a los conjuntos intervinieron razonamientos y argumentos de naturaleza metafísica e incluso teológica. La actitud general de los matemáticos con respecto a estos problemas consiste, muy frecuentemente, en ignorar lo que no llega a resolver. Como hecho paradójico, si es que lo es, cabe mencionar que evitan reconocer los conjuntos infinitos reales, pero utilizan ampliamente series infinitas y conjuntos infinitos como el conjunto de los números racionales o reales. La aritmetización del análisis obliga a los matemáticos a considerar la existencia de conjuntos de puntos, lo que conduce a la fundación de la teoría de conjuntos.

Bolzano fue el primero, antes que Cantor, en considerar seriamente la elaboración de una teoría de conjuntos. Recordemos brevemente que defendió la existencia de conjuntos infinitos reales y que llamó la atención sobre la noción de equivalencia de dos conjuntos (correspondencia biunívoca). Observó que esta equivalencia, en el caso de conjuntos infinitos, conducía a que una parte fuera equivalente al todo, e insistió en que este resultado fuera aceptado. Finalmente, Bolzano asignó números a conjuntos infinitos, asignación que implicaba la existencia de números trasfinitos diferentes (el modo de asignación de Bolzano se reveló inexacto según la teoría cantoriana). Pero las investigaciones de Bolzano sobre el infinito se centraron demasiado en el aspecto filosófico de las cosas, y el propio Bolzano decidió abandonar toda tentativa de proseguirlas más a fondo. Los trabajos de Heine sobre las series trigonométricas dieron origen al interés de Cantor por el estudio de estas mismas series. Du Bois-Reymond se interesó también por el estudio de las series trigonométricas y, en particular, por las relaciones entre conjuntos de puntos. Tratadas desde un punto de vista casi enteramente filosófico (empirismo), estas relaciones le llevaron a distinguir entre conjunto denso y conjunto no denso y, por extrapolación a partir de la continuidad que caracteriza a la recta numérica, exigió que sus órdenes de infinitud fueran no sólo densos sino también continuos. Otros matemáticos como Riemann, Lipschitz, Hankel y Weierstrass aislaron conjuntos infinitos en sus investiga-

ciones, pero ninguno de ellos sintió la necesidad de desarrollar una aritmética de los conjuntos infinitos como hizo Cantor.

La teoría de conjuntos de Cantor

El nacimiento de la teoría de conjuntos de Cantor comienza con su decimotercera memoria, publicada en 1874 en la revista de Crelle bajo el título de *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (Sobre una propiedad del conjunto de todos los números reales algebraicos). Sin embargo, en una memoria de 1872 sobre las series trigonométricas, Cantor presenta ya consideraciones sobre los conjuntos de puntos, y escribirá más tarde varias memorias sobre el tema así como cartas personales que precisarán ciertos puntos específicos referentes a su teoría.

Según Cantor, un conjunto es una colección de objetos definidos y separados, que pueden ser concebidos por la inteligencia, y para la que podemos decidir si un objeto dado pertenece o no a la colección. Refutando los argumentos de sus predecesores, Cantor afirma la existencia de conjuntos infinitos actuales, y muestra que un conjunto es infinito si existe una correspondencia biunívoca entre él mismo y una de sus partes. En su décima memoria, publicada en 1872, Cantor introduce, en particular, el límite de un conjunto de puntos, el conjunto derivado y los conjuntos de primera especie. Para un conjunto de puntos P en un intervalo finito, un *punto límite* de P es cualquier punto de la recta tal que en todo intervalo que comprenda ese punto hay una infinidad de puntos de P. Todo punto de P que no es un punto límite de P es llamado por Cantor *punto aislado.* El conjunto de todos los puntos límites de P se llama el *conjunto derivado* del conjunto de puntos P. Si P', el conjunto derivado, no es finito, se puede encontrar un segundo conjunto derivado P'', y así sucesivamente. Si el n-ésimo conjunto derivado de un conjunto de puntos P es finito, entonces se dice que P es un conjunto de orden n o de primera especie. Un conjunto es cerrado si contiene todos sus puntos límites y es abierto si todo punto del conjunto es un punto interior, es decir, si cada punto puede considerarse contenido en un intervalo que comprende solamente puntos del conjunto original. Un conjunto cerrado es perfecto si contiene solamente puntos límites.

La idea fundamental en la teoría de Cantor, la correspondencia biunívoca, le sirve entre otras cosas para definir la equivalencia entre dos conjuntos: si dos conjuntos bien definidos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca, tienen entonces la misma *potencia* o son *equivalentes*. En el caso finito, el concepto de potencia de un conjunto se corresponde con el número de elementos del conjunto, y la equivalencia entre dos conjuntos finitos se establece con el número de elementos de cada conjunto (más adelante el término potencia se convertirá en el de cardinal). Un subconjunto de un conjunto *P* (subconjunto propio) se define como otro conjunto cuyos elementos son también elementos de *P*. Un subconjunto de un conjunto finito *P* tiene siempre una potencia inferior a la del conjunto *P*, lo que no es cierto en el caso de los conjuntos infinitos. Dedekind se sirvió de esta constatación para dar, en 1887, la definición siguiente del infinito, independientemente de Bolzano y Cantor: se dice que un sistema *S* es infinito cuando es similar a una parte propia de sí mismo; si no, se dice que el sistema *S* es finito. Cantor ilustra esta constatación mostrando que el conjunto de los números naturales tiene la misma potencia que el subconjunto formado por los números naturales pares. Por el contrario, puede ocurrir que dos conjuntos tengan potencias desiguales. Por ejemplo, si *M* y *N* tienen potencias desiguales y el conjunto *M* es equivalente a un subconjunto de *N*, solamente se puede concluir que la potencia de *M* es inferior a la de *N*.

Cantor intentó también ilustrar sus conceptos de equivalencia y de potencia mediante conjuntos de números. En esta ocasión introduce el término «numerable» para designar todo conjunto que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales (enteros positivos). Muestra así que es el conjunto infinito más pequeño en términos de potencia, y que todo subconjunto infinito de este conjunto de los números naturales es necesariamente numerable. Por ejemplo, el conjunto de los cuadrados perfectos y el conjunto de los números triangulares son numerables. Aunque esos conjuntos parecen ser más pequeños que el conjunto de los números racionales (fracciones), Cantor demostró en 1847, y después en 1895, que este último conjunto es también numerable. La demostración siguiente es la dada por Cantor en 1895: dispongamos los números de la manera siguiente:

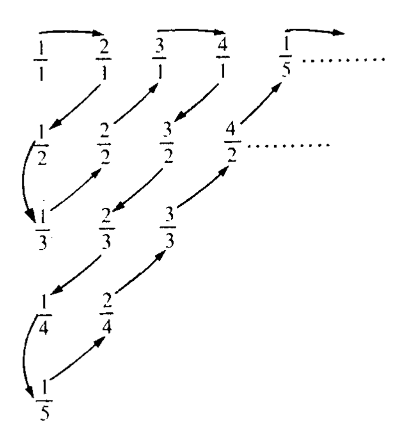


FIGURA 8.3

Puede observarse que todos los números racionales que se encuentran en una misma diagonal tienen la misma suma en el numerador y en el denominador. Partiendo de $\frac{1}{1}$, se siguen las flechas $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$, etc., y así se encontrarán todos los números racionales, y a cada uno se le asigna un número entero positivo dado. Desde ese momento, el conjunto así ilustrado de los números racionales (en el que se encuentran los mismos números más de una vez, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, etc.) estará en correspondencia biunívoca con los números naturales. Por consiguiente, el conjunto ilustrado es numerable y el conjunto de los números racionales, como subconjunto de este conjunto, es también numerable. Cantor demostró también un resultado sorprendente en su memoria de 1874: el conjunto de todos los números algebraicos es numerable. Pero todos los conjuntos infinitos no tienen la misma potencia, y por consiguiente no son todos numerables.

Cantor demostró que el conjunto de los números reales tiene una potencia superior a la del conjunto de los números naturales; para ello utilizó dos demostraciones, una de las cuales es la reducción al absurdo (1892): supongamos que se pueden numerar los números reales entre 0 y 1; expresémoslos en forma de decimales puros (que no se terminan, como 0,33333... para $\frac{1}{3}$, 0,4999... para $\frac{1}{2}$, y así sucesivamente); si esos números reales son numerables, se

puede entonces asignar a cada uno un entero positivo tal que

$$1 \longleftrightarrow 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$

$$2 \longleftrightarrow 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$

$$3 \longleftrightarrow 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$

donde los a_{ij} representan las cifras comprendidas entre 0 y 9 inclusive. Cantor demuestra que el conjunto de los números reales no es numerable escribiendo un número decimal que no se termina y es diferente de todos los de la lista anterior. Basta hacer $b = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ donde $b_k = 9$ si $a_{kk} = 1$ y $b_k = 1$ si $a_{kk} \neq 1$. Este número real está comprendido entre 0 y 1 pero no está incluido en la lista anterior de números reales comprendidos entre 0 y 1. Por tanto, hay una contradicción, y por consiguiente el conjunto de números reales no es numerable. En 1874, Cantor se interesó también en demostrar la independencia de la potencia del continuo del número de sus dimensiones, es decir, en mostrar la equivalencia de los puntos de una recta (potencia del continuo) y los puntos de R^n (espacio de n dimensiones). Consigue demostrar esta equivalencia en 1877 y, a este respecto, escribe a Dedekind: «Lo veo pero no lo creo.» Se puede, pues, demostrar la equivalencia entre el número de puntos contenidos en un segmento unitario [0, 1] y el conjunto de puntos de un cuadrado unitario, de un volumen unitario, de un espacio unitario de n dimensiones.

Después de haber demostrado la existencia de conjuntos de la misma potencia y de potencias diferentes, Cantor prosiguió profundizando en sus investigaciones y llegó así a introducir una teoría de los números cardinales y ordinales, en la que la aritmética se efectúa sobre cardinales y ordinales. Esta aritmética particular fue desarrollada entre 1879 y 1884, y completada en dos memorias publicadas en 1895 y 1897, respectivamente, en los *Mathematische Annalen.*

La teoría de conjuntos y la aritmética de los cardinales y ordinales de Cantor despertó evidentemente el asombro de un buen número de contemporáneos, por la naturaleza misma de sus ideas revolucionarias. Además, ya a finales del siglo XIX, algunos matemáticos, incluyendo a Cantor, plantearon algunas cuestiones que sembraron la duda sobre la validez de esta teoría, y se pusieron de manifiesto ya algunas paradojas y problemas no resueltos. Otros

matemáticos se opusieron; mencionemos a Kronecker, Felix Klein, Henri Poincaré y Hermann Weyl. Otros, por el contrario, se sintieron vivamente impresionados por el uso que ya se había hecho de aquellas teorías, como Adolf Hurwitz, Jacques Hadamard, David Hilbert y Bertrand Russell. Las dificultades con que se encontró la teoría de conjuntos de Cantor serían clarificadas mediante la axiomatización de esta última realizada por Zermelo y Fraenkel, y mediante el estudio de los fundamentos de la matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Bachmacova, Isabella, «Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 13, 1960, pp. 211-22.

Bell, Eric, T., *Men of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1965, pp. 340-61, 406-32, 448-65, 484-509, 555-80.

Birkhoff, Garret, comp., *A source book in classical analysis,* Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), 1973, pp. 15-25, 48-55, 62-78, 80-87, 95-97, 130-46, 164-69, 196-200, 268-81.

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley, 1968, pp. 598-619.

Boyer, Carl B., *The history of the calculus and its conceptual development,* Nueva York, Dover, 1959, pp. 284-98.

Cantor, Georg, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers,* traducción del alemán por P. E. B. Jourdain, Nueva York, Dover, 1955.

Cavailles, Jean, *Philosophie mathématique,* París, Herman, 1962.

Coppel, W. A., «J. B. Fourier — On the occasion of his two hundredth birthday», *The American Mathematical Monthly,* 76, 1969, pp. 468-83.

Dantzing, Tobias, *Number. The language of science,* Nueva York, The MacMillan Company, 1967, pp. 139-63. [*El número, lenguaje de la ciencia,* Buenos Aires, Ed. Sudamericana].

Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 626-30, 633-34, 637-40, 654-55, 678-80, 684-88.

Dedekind, Richard, *Essays on the theory of numbers,* traducción del alemán por W. W. Berman, Nueva York, Dover, 1963.

Dubbey, S. M., «The introduction of the differential notation to Great Britain», *Annals of Science,* 9, 1963, pp. 37-48.

Dugac, Pierre, «Charles Méray et la notion de limite», *Revue d'Histoire des Sciences,* 23, 1970, pp. 333-50.
Dugac, Pierre, «Éléments d'analyse de Karl Weierstrass», *Archive for History of Exact Sciences,* 10, 1971, pp. 41-176.
Dugac, Pierre, «Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique au XX[e] siècle. Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind», *Historia Mathematica,* 3, 1976, pp. 5-19.
Johnson, Philip, E., «The early beginnings of set theory», *The Mathematics Teacher,* 63, 1970, pp. 690-92.
Johnson, Philip, E., *A history of set theory,* Boston (Masachusetts), Prindle, Weber & Schmidt Inc., 1972, pp. 1-63.
Kennedy, Hubert C., «Peano's concept of number», *Historia Mathematica,* 1, 1974, pp. 387-408.
Klein, Felix, *Famous problems of elementary geometry,* Nueva York, Dover, 1956, pp. 49-80.
Klein, Felix, «Riemann and his significance for the development of modern mathematics», *Bulletin of the American Mathematical Society,* 1 (1895), pp. 165-80.
Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 966-1004.
Loria, Gino, «J. Liouville and his work», *Scripta Mathematica,* 4, 1936, pp. 147-54, 257-62, 301-05. En francés en *Archeion,* 18, 1936, pp. 117-39.
Macduffee, C. C., «Algebra's debt to Hamilton», *Scripta Mathematica,* 10, 1944, pp. 25-36.
Manheim, Jerome H., *The genesis of point set topology,* Nueva York, Macmillan Company, 1964, pp. 1-110.
Meschkowski, Herbert, *Ways of thought of great mathematicians,* San Francisco, Holden-Day Inc., 1964, pp. 86-104.
Meschkowski, Herbert, *Evolution of mathematical thought,* San Francisco, Holden-Day Inc., 1965, pp. 27-45.
Mitchell, U. G. y Mary Strain, «The number», *Osiris,* 1, 1936, pp. 476-496.
Paplauskas, A. B., «L'influence de la théorie des séries trigonométriques sur le développement du calcul intégral», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 21, 1968, pp. 249-60.
Picard, Emile, «L'oeuvre scientifique de Charles Hermite», *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,* 18, 1901, pp. 9-34.
Plancherel, Michel M., «Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle», *Enseignement Mathématique,* 24, 1924-25, pp. 19-58.
Poincaré, Henri, «L'oeuvre mathématique de Weierstrass», *Acta Mathematica,* 22, 1898-1899, pp. 1-18.
Ravetz, J. R., «Preliminary note on the study of J. B. Fourier», *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 13, 1960, pp. 247-51.

Smith, David E, *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vols. I y II, 1959, pp.35-45; 99-106.

Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. III, *La science contemporaine. I. Le XIX^{e} siècle,* París, P.U.F., 1961, pp. 63-70. [*Historia general de las ciencias,* vol. III, Barcelona, Destino 1973].

Turnbull, H. W., *The great mathematicians,* Londres, Methuen, University Paperbacks, 1929, pp. 129-33.

Van Dalen, D. y A. F. Monna, *Sets and integration. An outline of the development,* Groninga, Wolters-Noordhoff Publishing, 1972, pp, 1-23.

Van Rootselaar, B., «Bolzano theory of real numbers», *Archive for History of Exact Sciences,* 2, 1964-1965, pp. 168-80.

Van Vleck, Edward B., «The influence of Fourier's series upon the development of mathematics», *Science,* 39, 1914, pp. 113-24.

Waisman, Friedrick, *Introduction to Mathematical thinking,* Nueva York, Frederick Ungar Publishing Co., 1951, pp. 182-208.

EJERCICIOS

1. El estudio de las series de Fourier fue preponderante en la clarificación del concepto de función. Justificar esta afirmación.
2. ¿En qué medida los desarrollos del análisis en el siglo XIX fueron motivados por factores internos o matemáticos más que por las necesidades y preferencias experimentadas por la sociedad? Justificar la respuesta mediante ejemplos.
3. Comparar el nivel del rigor en el análisis en el siglo XIX con el que existía en el siglo XVIII, aportando ejemplos que ilustren la comparación.
4. Explicar la importancia del año 1872 en la aritmetización del análisis.
5. Comparar las definiciones del «límite de una función» propuestas por Cauchy y Weierstrass y poner de manifiesto las ventajas e inconvenientes de una con respecto a otra.
6. Comparar las definiciones de la «integral definida de una función» propuestas por Cauchy y Riemann y poner de manifiesto las ventajas de la de Riemann con respecto a la de Cauchy.
7. Explicar los refinamientos aportados por Dirichlet y Riemann a las condiciones de convergencia de las series trigonométricas esbozadas por Fourier.
8. ¿En qué es más precisa y menos ambigua la definición de la «continuidad de una función» propuesta por Wierstrass que las de Bolzano y Cauchy? Justificar esta afirmación.

9. ¿Cuáles fueron los factores que provocaron el replanteamiento del concepto de número real? Justificar la respuesta con ejemplos.
10. ¿En qué aspectos la demostración de la existencia de los números algebraicos y trascendentes desempeño un papel importante en la creación de los números reales?
11. La teoría de los números irracionales de Dedekind está fundamentada en el concepto de «cortadura». Justificar esta noción de cortadura a partir del enfoque preconizado por este matemático.
12. Algunos matemáticos se opusieron al movimiento en favor de la aritmetización del análisis. Justificar esta afirmación con ejemplos.
13. ¿Cuál fue el papel de Cantor en la elaboración de una teoría de conjuntos apropiada? Precisar la respuesta.

9. EL NACIMIENTO DEL ALGEBRA MODERNA

INTRODUCCIÓN

El álgebra abstracta vio cómo se fijaban definitivamente sus conceptos fundamentales y sus objetivos principales a lo largo del siglo XIX. El álgebra, esta rama de las matemáticas que trata de las colecciones de objetos cuya naturaleza es a veces muy diferente de la de los números reales o complejos, se enriqueció durante ese siglo con creaciones tales como los vectores, los cuaterniones, las matrices, las formas $ax^2 + bxy + cy^2$, los hipernúmeros de todas clases, las transformaciones, las sustituciones o las permutaciones. Mediante operaciones y leyes de composición, los matemáticos del siglo XIX combinaron esos objetos para desarrollar los conceptos algebraicos de base. En particular, las investigaciones sobre los números algebraicos pusieron al descubierto diferentes variedades de álgebras, a causa del restringido número de propiedades aplicables a esas clases, en oposición al campo completo de los números complejos. Estas diferentes álgebras se distinguen según las propiedades que poseen las operaciones definidas en ellas; durante el siglo XIX fueron introducidos los conceptos principales del álgebra, tales como los de grupo, anillo, ideal, cuerpo, así como nociones subordinadas, como las de subgrupo, subgrupo invariante, etc., con el fin de identificar los conjuntos de propiedades.

Por lo que respecta al desarrollo específico de ciertas partes del álgebra, los resultados obtenidos no son menos brillantes. El problema fundamental del álgebra continuó ocupando a buen número de matemáticos durante la primera mitad del siglo. La solución de las ecuaciones polinómicas en términos de operaciones algebraicas fue establecida definitivamente por los notables trabajos de Galois. Sin embargo, las ideas de Galois, con toda su importancia, debieron esperar otros desarrollos como la comprensión clara del principio de la permanencia de la forma, los fundamentos de una lógica de los

números complejos basada en las propiedades de los números reales, los vectores, los cuaterniones,etc., antes de dar sus verdaderos frutos. El álgebra y el análisis vectorial tomaron forma a partir de los trabajos de Hamilton y Grassmann y, a finales de siglo, fueron adoptados prontamente por los físicos. Las nociones de determinante y matriz, consideradas como innovaciones en el lenguaje matemático, se revelaron altamente útiles no sólo en el desarrollo mismo de las matemáticas, sino sobre todo como instrumentos de cálculo que forman parte actualmente de las técnicas del matemático moderno. El estudio de las álgebras de dimensión finita puso de manifiesto importantes nociones que sirvieron para elaborar las bases de las estructuras algebraicas.

Paralelamente al desarrollo del álgebra moderna, intentaremos poner brevemente de manifiesto el origen y las primeras tentativas consagradas a la fundación de la lógica matemática, pues ésta estará llamada a desempeñar un papel preponderante a finales del siglo XIX, época en la que se esbozará la axiomatización y el estudio de los fundamentos de las matemáticas.

Teoría de la resolubilidad de las ecuaciones

A comienzos del siglo XIX, el problema central del álgebra seguía siendo el de la resolución de las ecuaciones de grado superior a cuatro. Recordemos que los trabajos de Lagrange y Vandermonde habían orientado el problema hacia la vía de la teoría de grupos y de cuerpos. En esta perspectiva se insertan la respuesta dada por Gauss al problema de la resolubilidad de la ecuación ciclotómica y también los trabajos de Paolo Ruffini (1765-1822) quien, mediante la elaboración de los primeros principios de la teoría de los grupos de permutaciones y mediante el estudio del comportamiento de las funciones racionales cuyas raíces son permutadas, se esfuerza por demostrar la imposibilidad de la resolución de la ecuación general de quinto grado. De una forma independiente de Ruffini, el joven matemático noruego Abel consigue demostrar por primera vez que la resolución mediante radicales de la ecuación general de quinto grado es imposible. Otro prodigio, francés esta vez, va a distinguirse brillantemente en el problema de la resolubilidad de las ecuaciones,

es decir, el problema de determinar cuáles son las ecuaciones resolubles mediante radicales.

GALOIS

Évariste Galois (1811-1832) nació el 25 de octubre de 1811 en el pequeño pueblo de Bourg-la-Reine. Era el segundo hijo de Nicolas-Gabriel Galois, maestro en un internado, y de Adélaïde-Marie Demante, hija mayor de Thomas Demante, presidente del Tribunal de Louviers. Pasa su infancia en su pueblo natal, aprendiendo latín y leyendo a Plutarco. En 1815 su padre es elegido alcalde de Bourg-la-Reine. En 1823 entra en cuarto en el Colegio Real Louis-le-Grand, en donde obtiene una beca y en donde permanecerá interno hasta 1829. Évariste, alumno distinguido y brillante, aborda en 1826 el estudio de las matemáticas, por las que ya manifiesta un gusto marcado. Es la época en la que estudia seriamente los trabajos de Legendre y Lagrange. En 1828 se prepara para la Escuela Politécnica, pero sufre su primer suspenso. En 1828 y 1829 es alumno de Richard, su profesor de matemáticas, que guardó cuidadosamente todos sus deberes para mostrarlos más tarde con orgullo. Legados a Charles Hermite, esos deberes forman parte actualmente del legajo 2108 de la Biblioteca del Instituto. En la primavera de 1829, Galois publica por primera vez su *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques* (Demostración de un teorema sobre las fracciones continuas periódicas) en los *Annales de Gergonne,* y después presenta a la Academia de Ciencias sus primeras investigaciones sobre las ecuaciones algebraicas de primer grado, por intermedio de Cauchy.

El mes de julio de 1829 es una época de pruebas dolorosas para Évariste. En efecto, el 2 de julio se suicida su padre como consecuencia de una cábala política antiliberal y, algunos días después, sufre su segundo y definitivo suspenso en la Escuela Politécnica. Se ha escrito mucho sobre el tema, y lo menos que se puede decir es que, teniendo en cuenta el estado afectivo en el que se encontraba Évariste y la actitud rígida y cerrada manifestada por el examinador Dinet, el joven Galois tenía pocas posibilidades de obtener una buena calificación. Además, la violencia con la que atacó a sus examinadores después de su suspenso definitivo se explica en parte

por la desesperación que sentía después del suicidio de su padre y de este nuevo suspenso que le cerraba las puertas de esta gran escuela, cuyo renombre matemático le atraía tanto como su fidelidad a las ideas liberales. En octubre de 1829, Galois entra en la Escuela Normal bajo la Restauración, y presenta, en febrero de 1830, una memoria en la Academia de Ciencias sobre las condiciones para que una ecuación sea resoluble mediante radicales, con vistas a concurrir al gran premio de matemáticas, que sería atribuido finalmente a Abel y a Jacobi. A partir de abril de 1830, Galois publica tres memorias sucesivas en el *Bulletin de Férussac,* cuyo principal redactor era Charles Sturm (1803-1855), matemático suizo que se distinguió, junto con Liouville, en el estudio de problemas de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno. Las dos primeras memorias están consagradas a la resolución algebraica de las ecuaciones, mientras que la última trata de la teoría de números. En el mes de junio de 1830, se entera de la pérdida de la memoria presentada a la Academia para el gran premio: «Estaba en casa del Sr. Fourier, quien debía leerla, y a su muerte la memoria se perdió». Las dos memorias que presentó a la Academia se extraviaron, y Galois pensó que esta serie de desgracias era probablemente obra de una voluntad concertada de obstrucción; todos estos hechos dejaron en él una impresión profunda, comparable a la de Abel en su estancia en París.

Durante la Revolución de 1830, que exilió a Carlos X e instaló a Luis Felipe, Galois criticó públicamente al director de la Escuela Normal, M. Guignaut, en una carta a la *Gazette des Écoles,* y este último le expulsó de la Escuela. El asunto fue un escándalo y tuvo eco en la prensa. Mientras tanto, Galois se relaciona con estudiantes republicanos y entra en los artilleros de la Guardia Nacional, pasa sus exámenes de licenciatura, y publica su último trabajo en los *Annales de Gergonne.* En enero de 1831, comienza un curso de matemáticas en la librería Caillot y, por invitación de Poisson, presenta de nuevo una memoria titulada *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (Sobre las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones por radicales), enviada el 17 de ese mes al Instituto. Como el informe parecía tardar, la memoria fue remitida de nuevo a Lacroix y Poisson; Galois se impacientó y dirigió una carta al presidente de la Academia en la que le apremiaba a interceder para que los examinadores «[...] declaren si han

extraviado mi memoria o si tienen la intención de informar sobre ella a la Academia». Poco tiempo después, el 7 de mayo de 1831, Galois fue detenido como consecuencia de un brindis regicida que había hecho, con un puñal en la mano, en el célebre banquete organizado por los republicanos en las vendimias de Borgoña. En *Le Globe* de ese día se encuentra un largo artículo pidiendo la absolución en el que hay ciertos pasajes particularmente esclarecedores tanto sobre la vida de Galois como sobre sus contribuciones matemáticas (citado por Taton):

[...] el Sr. Galois, aun siendo muy joven (no tiene todavía veinte años) ha dado ya pruebas irrefutables de una alta capacidad científica; pero, a pesar de todos sus esfuerzos, no ha encontrado más que frialdad o desdén hacia su talento. Viéndose oprimido por el orden social, se ha agriado, desanimado, exasperado. Sentía que tenía en él los gérmenes de un porvenir brillante y, lanzado al seno de una sociedad egoísta, sin protectores y sin amigos, estos gérmenes han quedado sin cultivar; ha concebido un odio violento contra un régimen en el que el azar del nacimiento condena al olvido tantas facultades, mientras que este mismo azar eleva tantas nulidades [...]
He aquí, por lo demás, algunos detalles que permitirán comprender si el alma enérgica del joven Galois no es excusable en su antipatía contra el estado actual de la sociedad [...] La gran capacidad matemática del Sr. Galois es un hecho constante: ha descubierto las propiedades de las funciones elípticas al mismo tiempo que el Sr. Abel, ese científico del Norte cuyo mérito el Instituto no supo apreciar más que después de que hubiera muerto en el infortunio.

En el pasaje siguiente, se hace alusión, entre otras cosas, a la memoria de enero de 1831 con respecto a la cual Galois esperaba una respuesta de los examinadores:

Hoy, la memoria ha sido reescrita, presentada de nuevo al Instituto. El Sr. Poisson, encargado de examinarla, todavía no lo ha hecho, y desde hace más de cinco meses su desgraciado autor espera una palabra de aliento de la Academia.
El Sr. Galois es, además, autor de diversas notas matemáticas relativas a puntos de detalle, que han sido insertadas en varias recopilaciones científicas.
¿Puede realmente la sociedad mancillar con una condena a un joven cuyos extravíos momentáneos atestiguan en tan alto grado la imprevisión y el egoísmo de la propia sociedad? Qué lección sobre todo para los científicos cuya indiferencia es la causa principal de sus extravíos.

Fue absuelto el 15 de junio, pero el 4 de julio Poisson presentó su informe, que fue para Galois una desilusión completa. Poisson, sin llegar a una conclusión definitiva, ponía en duda su teorema central y declaraba incomprensibles sus razonamientos. La Academia no tenía otra elección que rechazar la aprobación de la memoria. El resentimiento de Galois parecía completamente explicable después de esta incomprensión manifiesta, y como si quisiera dejar este mundo en donde sólo reinaban los académicos, se lanzó en cuerpo y alma a la lucha política, olvidando casi enteramente sus investigaciones matemáticas. Encarcelado dos veces a partir del 14 de julio de 1831, es provocado a duelo después de una ruptura amorosa y en circunstancias muy oscuras; redacta el 29 de mayo de 1832 una carta a su amigo Auguste Chevalier que ha quedado como su testamento matemático, antes de dirigirse el 30 por la mañana al lugar en donde debía desarrollarse el duelo. Herido de muerte, será descubierto y trasladado al hospital Cochin, donde morirá en brazos de su hermano cuando sólo tenía veinte años.

Ante la insistencia afectuosa del hermano de Évariste y de su amigo Auguste Chevalier, sus manuscritos, cuyo texto abarca unas sesenta páginas, serán publicados en 1846 en el *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées* de Liouville. Los matemáticos Liouville y sobre todo E. Betti aclararon ciertos pasajes todavía oscuros en sus escritos. Betti completó incluso varias demostraciones, entre ellas algunas que Galois, según sus declaraciones, no había tenido tiempo de hacer; pero la amplitud de las concepciones de Galois no fue desvelada verdaderamente hasta 1870, cuando apareció el *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas), de Camille Jordan (1838-1922).

Teoría de la resolubilidad de Galois

En la carta dirigida a Chevalier, Galois recoge las principales ideas que no había podido desarrollar, y pide a su amigo que someta estas ideas al juicio de Jacobi o Gauss:

> Pedirás públicamente a Jacobi o a Gauss que den su opinión [concluye] no sobre la verdad, sino sobre la importancia de los teoremas.

Las últimas palabras de Évariste serán:

Después de esto, habrá, espero, gente para la que será provechoso descifrar todo este embrollo. Te abrazo con efusión.

El problema esencial tratado por Galois es el de la resolubilidad de las ecuaciones, que desarrolló de una manera más general que sus predecesores. Aunque no se pueda presentar el detalle de su teoría, que no entra en el marco de nuestra obra, podemos al menos esbozar sus esquemas principales. El conjunto de todas las permutaciones de las raíces x_1, x_2, x_3, x_4 satisface la definición de grupo. En efecto, si estas cuatro raíces son las de una ecuación de cuarto grado, la permutación de x_1 con x_2 en toda expresión de las x_i es una sustitución. Por ejemplo, esta sustitución particular se indica como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Si se permuta x_1 con x_3 y x_2 con x_4, se obtiene una nueva sustitución

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Efectuar la primera sustitución seguida de la segunda proporciona un resultado equivalente a efectuar la sustitución siguiente

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

porque, por la primera, x_1 se reemplaza por x_2 y por la segunda x_2 se reemplaza por x_4, y por la tercera x_1 se reemplaza directamente por x_4. Se dice, entonces, que «el producto de las dos primeras sustituciones tomadas en ese orden proporciona la tercera sustitución». En total, hay 4! sustituciones posibles, y el conjunto de las sustituciones o permutaciones de las raíces forma un grupo porque el producto de todo par de sustituciones es una sustitución del conjunto. Ahora bien, si las raíces x_1, x_2, x_3, x_4, son las raíces de una ecuación de cuarto grado, el conjunto de las permutaciones de estas raíces forma

un grupo simétrico y las propiedades de este grupo proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación de cuarto grado sea resoluble mediante radicales. Lo que Galois pudo demostrar fue que la ecuación algebraica es resoluble mediante radicales sólo si el grupo simétrico de sus raíces (el conjunto de las permutaciones de las raíces) es resoluble.

¿Qué se entiende en realidad por resolubilidad del grupo simétrico? En una primera etapa, Galois define el campo R formado por las expresiones racionales en términos de los coeficientes de la ecuación donde estos últimos sean elementos del campo de los números racionales. Por ejemplo, partiendo de la ecuación dada por Verriest

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

R será, según Galois, el campo obtenido añadiendo las letras o las indeterminadas p y q a los números racionales. Este campo R es el dominio de racionalidad de los coeficientes de la ecuación dada, y se dice que la ecuación pertenece a ese campo. A continuación Galois muestra cómo obtener el grupo G de esta ecuación (general o la ilustrada en particular) en el campo de los coeficientes, es decir, cómo determinar el grupo de las sustituciones de las raíces que deja invariante toda relación entre las raíces y los coeficientes en el campo de los coeficientes. El orden del grupo G (el número de elementos) es, evidentemente 24 para la cuártica y $n!$ para la ecuación de grado n. A continuación es necesario buscar el mayor subgrupo H en G, que es el orden 4, y habiendo encontrado H se debe encontrar una función f de las raíces, mediante procedimientos que recurran exclusivamente a operaciones racionales cuyos coeficientes sean elementos de R y para los que la función no cambie de valor como consecuencia de sustituciones de raíces de H, pero cambie de valor para todas las demás sustituciones de G. En nuestro caso, la función es $x_1^2 - x_3^2$. Se trata, a continuación, de construir, según un método conocido, una ecuación en R una de cuyas raíces sea esta función f. El grado de esta ecuación es el índice de H en G (orden de G/orden de H). Esta ecuación

$$t^2 - (p^2 - 4q) = 0$$

de grado 2, se llama una resolvente parcial. Se debe resolver esta resolvente parcial con el fin de determinar f en términos de p y q,

de donde se encuentra que $f = \sqrt{p^2 - 4q}$. Se añade f a R para obtener un nuevo campo $R_{(H)}$ y el grupo de la ecuación original con respecto al nuevo campo $R_{(H)}$ es precisamente H. Se repite, a continuación, este procedimiento, partiendo de H, de orden 4, y del campo $R_{(H)}$ para formar sucesivamente grupos K, L, ..., E, asociados respectivamente a campos $R_{(K)}$, $R_{(L)}$, ..., $R_{(E)}$ donde E es el grupo de sustitución identidad. Es entonces cuando Galois muestra que si el grupo de una ecuación con respecto a un campo dado es precisamente E, entonces las raíces de la ecuación original son los miembros de $R_{(E)}$. La obtención de las raíces se efectúa directamente mediante un procedimiento basado en operaciones racionales.

Galois aplicó también su teoría al problema de la resolución de ecuaciones polinómicas mediante operaciones racionales y mediante radicales, y en este caso introdujo la noción de subgrupo normal de un grupo dado. Mostró también que cuando la resolvente parcial que sirve para reducir el grupo de una ecuación G a H, por ejemplo, es una ecuación binómica $x^p = A$ donde p es primo, entonces H es un subgrupo normal de G de índice p. Además, si los índices de la serie de subgrupos normales G, H, K, L, ..., son primos, entonces la ecuación original es resoluble por radicales y si no, no es resoluble. Por ejemplo, la ecuación general de grado $n > 4$ no es resoluble por radicales, porque el grupo G de la ecuación está compuesto de $n!$ sustituciones (de orden n), el subgrupo normal máximo o grupo alternativo es de orden $n!/2$, y el único subgrupo normal de un grupo alternativo es el elemento identidad, puesto que los índices son 2 y $n!/2$, pero el número $n!/2$ para $n > 4$ no es nunca primo, por lo que esta ecuación no es resoluble para $n > 4$.

Galois desarrolló también una teoría similar para el estudio de ecuaciones con coeficientes numéricos, además de haber demostrado cierto número de teoremas sobre la teoría de ecuaciones. Hará falta esperar a los trabajos de Jordan para ver prolongarse de manera significativa los trabajos de Galois. Mientras tanto, varios matemáticos explicitarán ciertos razonamientos de su teoría o considerarán aplicaciones a diversos campos de las matemáticas.

El álgebra y la Analytical Society de Cambridge

La universidad de Cambridge, en los primeros años del siglo XIX, no era seguramente el lugar donde se podían encontrar nuevos desarro-

llos en matemáticas. Es cierto, sin embargo, que fue el *alma mater* de Isaac Newton, pero por chovinismo y a causa de la célebre y tenaz controversia sobre la prioridad de la invención del cálculo diferencial e integral, los matemáticos ingleses se aislaron del resto del mundo durante cerca de un siglo. Sin embargo, fue precisamente en Gran Bretaña donde comenzó un movimiento, en el primer tercio del siglo XIX, para reformar la enseñanza y modificar las notaciones, ya arcaicas, de Newton. Hablamos de la formación, en 1815, en el Trinity College de Cambridge, de la *Analytical Society* por tres jóvenes diplomados de Cambridge: el algebrista G. Peacock, el astrónomo J. Herschel y el pionero inglés de las máquinas de calcular, C. Babbage. Si añadimos a esta lista a De Morgan, Hamilton, Cayley y Boole, tendremos a los principales reformadores del álgebra en Gran Bretaña.

Esta reforma del álgebra fue emprendida para intentar justificar las operaciones algebraicas efectuadas en expresiones simbólicas o literales. Como no había sido desarrollada todavía ninguna lógica para los diferentes sistemas de números, se efectuaban las operaciones con letras o expresiones literales sin saber muy bien a qué se referían esas operaciones. ¿Era el álgebra en sí misma una simple generalización de la aritmética o había que pensar más bien que el álgebra de las expresiones literales poseía una lógica interna que garantizaría su eficacia y su exactitud? Fue a partir de estas consideraciones como nació una reforma del álgebra emprendida por los matemáticos ingleses con el fin de dilucidar y elaborar una especie de lógica capaz de asegurar la validez de las operaciones algebraicas, una fundación del álgebra sobre «la permanencia de forma». El pionero de este movimiento fue Woodhouse.

WOODHOUSE

Robert Woodhouse (1773-1827), nació en Norwich el 28 de abril de 1773. Fue educado en el Caius College de Cambridge, del que más adelante fue consejero. Profesor en la universidad, vivió en Cambridge hasta su muerte, acaecida el 23 de diciembre de 1827.

Su primer tratado, titulado *Principles of analytical calculation* (Principios de cálculo analítico) fue publicado en Cambridge en 1803. En esta obra Woodhouse explica detalladamente la notación

diferencial (en el sentido de Leibniz) y sugiere insistentemente su utilización. Por el contrario, critica severamente los métodos utilizados por los discípulos de Leibniz y subraya sus frecuentes suposiciones con respecto a principios no evidentes. En particular, considera el signo de igualdad en la serie

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \dots$$

y afirma que tiene «una mayor extensión» en el caso de una igualdad numérica. De hecho, la ecuación sólo es válida si la serie no diverge. Es la primera vez que un matemático inglés hace uso del «principio de la permanencia de forma».

Fue igualmente el autor de una obra sobre trigonometría plana y esférica, así como de un tratado histórico sobre el cálculo de variaciones y los problemas isoperimétricos. Aunque fue el primer matemático inglés en desvelar las carencias lógicas de los métodos habituales en el análisis continental, ejerció poca influencia en sus contemporáneos. Este movimiento de reforma iniciado por Woodhouse será recogido y desarrollado por los fundadores de la *Analytical Society.*

PEACOCK

George Peacock (1791-1858), fue el miembro más influyente de esta nueva escuela. Nació en Denton el 7 de abril de 1791. Educado en el Trinity College de Cambridge, fue más tarde consejero y tutor de ese College. Gracias a sus múltiples esfuerzos, erigió el observatorio de la universidad y en 1836 llegó a ser profesor de astronomía y geometría en Cambridge. Administrador animado de un celo incomparable, Peacock tomó parte activa en la modificación de los estatutos de la universidad y en la fundación de sociedades científicas. Deán de la catedral de Ely durante los veinte últimos años de su vida, murió el 8 de noviembre de 1858.

Peacock no inventó cosas extraordinarias en matemáticas, pero su papel no fue por ello menos importante para la reforma del álgebra en Gran Bretaña. En Cambridge, como en muchos centros de matemáticas, se mantenía un punto de vista conservador tanto en álgebra como en geometría o en análisis. Por otra parte, mientras

que en el continente los matemáticos Wessel, Argand, Gauss, etc., desarrollaban la representación gráfica de los números complejos, en Inglaterra ciertos matemáticos exponían sus dudas incluso sobre la validez de los números negativos. Con el fin de justificar una concepción más amplia del álgebra, Peacock publicó en 1830 una obra de álgebra titulada *Treatise of algebra* (Tratado de álgebra), en la que intentaba dar al álgebra una estructura lógica comparable a la de los *Elementos* de Euclides.

Al principio, Peacock estableció una distinción entre el álgebra aritmética y el álgebra simbólica, lo que le permitió elaborar un conjunto de reglas aplicables a los números y otro conjunto de reglas aplicables esta vez a las magnitudes en general. El álgebra aritmética se refería exclusivamente al estudio de los enteros positivos o de los números naturales. Así, los símbolos + y − debían ser tomados en el sentido habitual y la expresión $a - b$ tenía un sentido sólo si $a > b$. De la misma manera, $a^m a^n = a^{m+n}$ era válido en este álgebra siempre que m y n fueran números naturales. En el álgebra simbólica, las reglas de las operaciones se refieren esencialmente a los números negativos, racionales, irracionales y complejos, y las reglas válidas para el álgebra aritmética se extienden y son aplicables sin restricción al conjunto de los números. Así, según Peacock, «todos los resultados obtenidos en el álgebra aritmética, cuyas expresiones son generales desde el punto de vista de la forma, pero particulares, específicas, al nivel de los valores, son resultados igualmente en el álgebra simbólica, en donde son entonces generales tanto en la forma como en el valor». En el álgebra simbólica, la expresión general $a - b$ es válida cualquiera que sea el valor de a y de b, y lo mismo ocurre para $(a + b)^n$ y $a^m a^n = a^{m+n}$

La argumentación de Peacock es conocida con la expresión de «principio de la permanencia de forma», cuya formulación explícita aparece en su *Report on recent progress and present state of certain branches of analysis* (Informe sobre los progresos recientes y el estado actual de ciertas ramas del análisis) de 1833, que marca el comienzo de los resúmenes de los progresos científicos en curso que aparecerán a partir de entonces en las *Transactions of the British Association.* En el tema del álgebra simbólica, Peacock afirma en ese informe que el símbolo en sí es ilimitado, tanto en el plano del valor como en el de su representación, y que las operaciones que se efectúan con esos símbolos, cualesquiera que sean, son posibles en

todos los casos. Añade que las leyes de combinación de los símbolos son tales que conciden universalmente con las del álgebra aritmética cuando los símbolos son cantidades aritméticas, y las operaciones que se efectúan con esos símbolos llevan el mismo nombre que en álgebra aritmética. Es de estos principios de los que Peacock creía poder deducir el principio de la permanencia de forma:

Las formas algebraicas son equivalentes, cualesquiera que sean, cuando los símbolos son generales por la forma pero específicos por el valor (números naturales); serán equivalentes igualmente cuando los símbolos sean generales tanto en valor como en forma.

La aceptación de este principio sugiere, en particular, que las leyes del álgebra son las mismas cualquiera que sea la naturaleza de los objetos o los números a los que se refieran las operaciones. Sin embargo, el consentimiento explícito a la validez empírica de este principio es evidentemente correcto, pero la lógica de base falla. En efecto, podrían enunciarse propiedades específicas de los números pares en forma simbólica y pretender a continuación que esos enunciados simbólicos fueran generales. La argumentación de Peacock es desarrollada todavía más en una segunda edición de su tratado (1842-1845), además de introducir en ella una ciencia formal del álgebra que comprende, entre otras cosas, la formulación de las leyes fundamentales: la asociatividad y la conmutatividad para la adición y la multiplicación, y la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición. El conjunto de las leyes algebraicas, según Peacock, dicta las operaciones a efectuar, y estas últimas tienen un sentido en la medida en que se ajustan a esas leyes. Peacock deduce aquí el principio de la permanencia de forma a partir de la adopción de un cierto número de axiomas. Aunque su intento no resultara muy eficaz, tuvo el mérito de preparar el camino a desarrollos más abstractos del álgebra. Parece ser que Charles Babbage (1791-1871) había expuesto lo esencial de las ideas de Peacock en una obra relativa a la reforma del álgebra escrita en 1821, pero que permaneció inédita, con el título de *The philosophy of analysis* (La filosofía del análisis). Subrayemos que Babbage se interesó sobre todo por el cálculo automático efectuado con la ayuda de máquinas. Llegó, después de numerosos esfuerzos, a construir algunos prototipos.

Peacock aplicó también el principio de la permanencia de forma

a las operaciones con las series divergentes en su tratado de 1842-1845. En efecto, según Peacock, puesto que $r < 1$, la serie

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \dots$$

es válida, mientras que para $r = 1$, se obtiene

$$\infty = 1 + 1 + 1 + \dots$$

Además, para $r > 1$, se tiene un número negativo en el primer miembro, y como los términos en el segundo miembro aumentan continuamente, se tiene una cantidad mayor que ∞ a la derecha. Todo esto lo acepta Peacock, pero lo que quiere hacer notar es que la serie representa $1/(1 - r)$ para todo r porque, según dice, si las operaciones algebraicas son generales y los símbolos sobre los que se aplican esas operaciones no tienen límite en su valor, será imposible evitar la formación de series convergentes o divergentes. Pero si tales series, prosigue, son consideradas como resultados de operaciones que son definibles aparte de las mismas series, entonces no será importante entrar en el estudio de la relación de los valores aritméticos de los términos sucesivos con el fin de asegurar la convergencia o la divergencia. Porque en esas condiciones, añade, deben ser consideradas como formas equivalentes que representan su función generatriz y que poseen, con respecto a tales operaciones, propiedades equivalentes. En suma, Peacock intenta no excluir la utilización de las series divergentes al nivel de las operaciones simbólicas, porque ello implicaría necesariamente una limitación de la universalidad de las fórmulas y de las operaciones algebraicas, lo que sería contrario al espíritu de la ciencia.

Se puede subrayar aquí, de pasada, los trabajos de Duncan F. Gregory (1813-1844), descendiente en tercera generación del matemático James Gregory, ligados a la naturaleza real del álgebra simbólica. Según Duncan, el álgebra simbólica es la ciencia por la cual las leyes de combinación rigen ellas solas las operaciones, lo que conduce a demostrar ciertas relaciones entre las diferentes clases de operaciones que, cuando se expresan entre los símbolos, se llaman «teoremas algebraicos». El autor llamó la atención también sobre las leyes de conmutatividad y distributividad, términos que fueron introducidos por primera vez por François-Joseph Servois (1767-1847) hacia 1814. De Morgan, matemático inglés, proseguirá este movimiento de reforma del álgebra.

DE MORGAN

Augustus De Morgan (1806-1871), nació en Madura, India, en junio de 1806, y fue educado también en el Trinity College de Cambridge. En 1828 fue nombrado profesor en la nueva University College de Londres; por su enseñanza e investigaciones, ejercerá una influencia considerable sobre los matemáticos ingleses. Tuerto de nacimiento, su inofensiva excentricidad se traducía en comportamientos no ortodoxos, como negarse a votar en una elección, detestar la vida rural u olvidar inscribirse como miembro de la Royal Society. Su *Budget of paradoxes* (Colección de paradojas), sátira ligera sobre las modas de la cuadratura del círculo, comprende una colección de enigmas y juegos de inteligencia que ilustra bien su marcada atracción por esas cosas. Célebre por sus trabajos en lógica matemática, de lo que hablaremos más adelante, se distinguió también por sus investigaciones algebraicas, su tratado sobre el cálculo diferencial e integral y su tratamiento de las series infinitas.

Las concepciones algebraicas de De Morgan

De Morgan fue uno de los que puso en duda la validez de los números negativos, y en su libro *On the study and difficulties of mathematics* (Sobre el estudio y las dificultades de las matemáticas) dice que las expresiones $\sqrt{-a}$ y $\sqrt{-b}$ se parecen en que cualquiera de ellas que aparezca como solución de un problema implica una inconsistencia o un absurdo. En el plano del significado verdadero, las dos son igualmente imaginarias, según De Morgan, porque $0 - a$ es tan inconcebible como $\sqrt{-a}$. Después ilustra su punto de vista con un problema práctico e insiste en que es absurdo considerar los números inferiores a cero.

El célebre lógico inglés escribió varias memorias sobre la ciencia de los símbolos y las leyes de sus combinaciones (álgebra) y, en particular, escribió un tratado titulado *Trigonometry and double algebra* (Trigonometría y álgebra doble) (1849), que contiene sus puntos de vista sobre el tema. En el álgebra de Peacock, los símbolos eran generalmente entendidos como números (naturales) o magnitudes (todos los demás números), pero De Morgan va mucho más lejos, porque considera los símbolos por sí mismos, sin

significación de ninguna especie. Según De Morgan, «[...] con una sola excepción, ninguna palabra o signo de la aritmética o del álgebra tiene una parcela de significación a través de todo este capítulo, cuyo objeto son precisamente los símbolos y sus leyes de combinación, proporcionando un álgebra simbólica que puede convertirse en lo sucesivo en la gramática de un centenar de álgebras distintas». La excepción a la que se refiere es el símbolo de la igualdad, porque pensaba que en $a = b$ los símbolos a y b debían tener la misma significación resultante, cualesquiera que fueran las etapas por las que se hubieran pasado. En resumen, De Morgan sostenía que el álgebra estaba constituida por una colección de símbolos vacíos de sentido y por unas operaciones definidas entre los símbolos: los símbolos eran 0, 1, +, −, ×, ÷, ( ) y las letras del alfabeto. Las leyes del álgebra son, por ejemplo, las leyes de conmutatividad, de distributividad, de los exponentes, de los signos, $b - b = 0$, $b \div b = 1$, etc.

Peacock, Gregory y De Morgan intentaron hacer del álgebra una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos, proponiendo como postulado de base que las mismas propiedades fundamentales son válidas para cualquier clase de número. No parecieron darse cuenta de la naturaleza enteramente arbitraria de las reglas y de las definiciones del álgebra y, en particular, no vieron que una fórmula que es válida para una interpretación de los símbolos (la conmutatividad en los reales) no tiene por qué ser cierta para otra interpretación (la conmutatividad de la multiplicación de matrices). De Morgan clasificaba las álgebras de la manera siguiente: 1.°) la aritmética universal que abarca el álgebra de los números naturales (el álgebra aritmética de Peacock); 2.°) el álgebra simple, cuyo objeto es el estudio de los números negativos, y 3.°) el álgebra doble, la de los números complejos. Hamilton demostrará que es posible construir otras clases de álgebras, en particular el álgebra de los números complejos fundamentada en las propiedades de los números reales.

El álgebra de las parejas de Hamilton

En 1831, al menos cinco matemáticos habían descubierto o publicado, independientemente unos de otros, la representación

geométrica de los números complejos. Estos autores eran Wessel, Gauss, Argand, Warren y Mourey. Fue gracias al prestigio y a la autoridad de un Gauss por lo que esta representación fue ampliamente difundida y cada vez más aceptada. Sin embargo, ninguno de ellos había llegado a extender esta representación al espacio de tres dimensiones, y entre los que intentarán, después de 1831, encontrar una representación adecuada para ello figura sir William Rowan Hamilton. Sin embargo, si la historia de la representación geométrica de los números complejos constituye una línea de desarrollo que desemboca en los cuaterniones, existe otra que fue establecida por el mismo Hamilton en su largo e importante ensayo publicado en 1837 con el título *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time* (Teoría de las funciones conjugadas o parejas algebraicas, con un ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro). Recordemos que la segunda sección de este ensayo trata de la teoría de los números irracionales que hemos presentado en el capítulo 8. En la tercera sección de esta obra, consagrada a las parejas algebraicas, Hamilton desarrolla los números complejos en términos de parejas ordenadas de números reales de una manera casi idéntica a la que se utiliza en las matemáticas modernas. Como Hamilton creía en la representación geométrica era útil para la intuición pero no satisfactoria para la justificación lógica de esos números, buscó otro medio de representarlos. Así, introdujo el par ordenado de números reales (a, b) y definió operaciones sobre ese par. Todas esas operaciones se efectúan teniendo en cuenta reglas que son válidas para los números reales

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2)$$

$$(b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2) = (b_1a_1 - b_2a_1, b_2a_1 - b_1a_2)$$

$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \left(\frac{b_1a_1 + b_2a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{b_2a_1 - b_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$$

Hamilton se cuida de añadir, inmediatamente después de esas reglas, lo siguiente:

Estas definiciones, aunque arbitrarias, no son contradictorias una con respecto a otra, ni con respecto a los primeros principios del álgebra, y es posible extraer conclusiones legítimas, mediante un razonamiento matemático riguroso, a partir de las premisas aceptadas arbitrariamente de este modo: pero las personas que han leído con atención las observaciones precedentes de esta teoría, y las han comparado con el ensayo preliminar [sección I del libro], verán que esas definiciones no están escogidas arbitrariamente, en realidad, y a pesar de que otras podrían haber sido propuestas, ninguna otra sería igualmente apropiada.

Al final de esta sección, afirma con determinación que el par así considerado es equivalente al número complejo $(a + bi)$ de la manera siguiente:

En la teoría de los números simples (reales), el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo, y designa una raíz imposible, o un número imaginario simple; pero en la teoría de las parejas, el mismo símbolo $\sqrt{-1}$ es significativo, y designa una raíz posible, o una pareja real, la raíz cuadrada principal de la pareja $(-1, 0)$. Además, en esta última teoría, no en la primera, el signo $\sqrt{-1}$ puede ser propiamente utilizado; y podemos escribir, si escogemos para toda pareja (a_1, a_2), cualquiera que sea,

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1} \; [\ldots].$$

Con esta teoría de las parejas, Hamilton estaba bien preparado para descubrir y aceptar como legítimos los números complejos de «cuatro dimensiones», incluso aunque no se dispusiera de ninguna justificación geométrica. Por otro lado, al final de su ensayo de 1837, Hamilton dice que está investigando tripletes de números reales.

Los cuaterniones de Hamilton

Hamilton, después de su teoría de las parejas, se fijó la tarea de extender la teoría de los números complejos al espacio de tres dimensiones. En una primera etapa, intentó probablemente elaborar un álgebra de tres unidades para establecer una correspondencia con las tres dimensiones espaciales, pero sabemos actualmente que tal álgebra no puede existir[1]. Pero Hamilton no lo sabía, y debió de

---

[1] Véase el artículo de Kenneth O. May citado en la bibliografía.

tardar mucho tiempo en convencerse de que no llegaría nunca a alcanzar su objetivo. ¿Cómo llegó más tarde a buscar un álgebra con cuatro unidades que respondiera a sus expectativas? Por lo que sabemos, la respuesta a esta cuestión no ha sido establecida todavía, pero suponiendo que se hubiera convencido de la pertinencia de esta investigación, Hamilton debía, por otra parte, trasgredir la ley de la conmutatividad de la multiplicación para alcanzar su objetivo, los cuaterniones. Como había hecho Cardano con la existencia de las raíces complejas, Hamilton decide aceptar lo que era comúnmente inaceptable en aquella época, que la multiplicación de los «cuádruplos» no es conmutativa. El 16 de octubre de 1843, Hamilton se paseaba a la orilla del canal real cuando de pronto, después de largos meses, e incluso de largos años de espera, a partir de un flujo continuo de ideas, emerge el resultado que había esperado tanto tiempo: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Hamilton no pudo evitar el grabar esta relación fundamental en la madera del puente de Brougham.

Hamilton presentó la forma definitiva de su teoría de los cuaterniones en sus *Lectures on quaternions* (Lecciones sobre los cuaterniones) (1853), y en una obra en dos volúmenes publicada después de su muerte bajo el título de *Elements of quaternions* (1886) (Elementos de los cuaterniones). En 1843, Hamiltón presentó sus cuaterniones sirviéndose, como en el caso de su teoría de los irracionales, del concepto de tiempo de la manera siguiente: llama «cuaternión momental» a un conjunto (A_1, A_2, A_3, A_4) de cuatro momentos de tiempo. Dos cuaterniones son iguales sólo si los momentos correspondientes son iguales. Escribe el cuaternión en la forma $q = (a, b, c, d)$. El operador i tiene la propiedad de cambiar la pareja (a_1, a_2) por la pareja $(-a_2, a_1)$ en su teoría de las parejas. De la misma manera, en la teoría de los cuaterniones, los operadores i, j, k son tales que

$$iq = (-b, a, -d, c)$$

$$\mathrm{j}\mathrm{q} = (-c, d, a, -b)$$

$$kq = (-d, -c, b, a)$$

A continuación, Hamilton define $(ij)q$ de manera que obtenga $i(jq)$ y llega a su célebre relación fundamental

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \; ijk = -1.$$

En lugar de proseguir paso a paso la exposición de su teoría tal como él la presentó, preferimos recordar brevemente, sirviéndonos de la notación moderna, los principales resultados a los que llegó, y que es encuentran en sus publicaciones de 1853 y 1866. Recordemos brevemente que un cuaternión es un número «hipercomplejo» de la forma

$$w + xi + yj + zk$$

donde w, x, y, z, son números reales, i, j y k son vectores unitarios, dirigidos según los ejes x, y, y z respectivamente. La parte real del cuaternión es w, la cual se llama también la parte «escalar» del cuaternión, y el resto constituye la parte «vectorial». Los vectores unitarios obedecen a las leyes siguientes:

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$
$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$
$$ii = jj = kk = -1.$$

La igualdad de dos cuaterniones q y p consiste en la igualdad de su parte real y la de los coeficientes respectivos de i, j y k. Si

$$p = 3 + i + 3j + 2k,$$
$$q = 5 + 2i + 3j + k,$$
$$p + q = (3 + 5) + (1 + 2)i + (3 + 3)j + (2 + 1)k = \\ = 8 + 3i + 6j + 3k.$$

El producto de p y q se efectúa teniendo en cuenta las leyes definidas para los vectores unitarios:

$$qp = (5 + 2i + 3j + k)(3 + i + 3j + 2k) \\ = 2 + 14i + 21j + 16k$$

$$pq = (3 + i + 3j + 2k)(5 + 2i + 3j + k) \\ = 2 + 8i + 27j + 10k$$

Se observa fácilmente que $qp \neq pq$, de manera que la ley de commutatividad no se verifica en la multiplicación de cuaterniones. Hamilton demostró que la multiplicación es asociativa, y ésta sería la primera vez en que fue utilizado este término. Se puede también

dividir dos cuaterniones, pero como la multiplicación no es conmutativa, el resultado de la división puede ser diferente si se busca r de modo que $p = rq$ ó $p = qr$. Los cuaterniones pueden servir para efectuar una rotación, una dilatación o una contracción de un vector dado para obtener de ello otro, también dado; basta hacer

$$\underset{\text{cuaternión}}{(a + bi + cj + dk)} \quad \underset{\text{primer vector}}{(xi + yj + zk)} \quad = \underset{\text{segundo vector}}{(x'i + y'j + z'k)}$$

y resolver en a, b, c, y d a partir de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Hamilton introdujo también un operador diferencial importante, el símbolo «∇» (él escribe $\lhd$), definido de la manera siguiente:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

donde $\frac{\partial}{\partial x}$ significa la derivada parcial con respecto a x, y cuando se aplica a una función escalar $v(x, y, z)$, se obtiene el vector

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x}i + \frac{\partial v}{\partial y}j + \frac{\partial v}{\partial z}k$$

llamado el «gradiente de v». Además, si se aplica ahora el operador ∇ a una función vectorial continua $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$, donde las v_i son funciones de x, y, y z, Hamilton puede introducir el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla v &= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_1 i + v_2 j + v_3 k) = \\ &= -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)i + \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)k \end{aligned}$$

el cual representa un cuaternión cuya parte real se llama la «divergencia de v» y la parte vectorial el «rotacional de v». Hamilton estaba entusiasmado con sus cuaterniones, lo mismo que su amigo y discípulo Peter Guthrie Tait (1831-1901), quien fundó una sociedad para la difusión de los cuaterniones y llegó incluso a mantener una lucha feroz y estéril, por añadidura, contra los otros métodos vectoriales que se elaboraron paralelamente. Hamilton creía firmemente que esta creación sería tan importante como el cálculo diferencial e integral para la física matemática. Sin embargo, aunque él mismo hizo aplicaciones a la geometría, a la óptica, a la mecánica, además de consagrar los veinte últimos años de su vida a

su álgebra favorita, la reacción general de los físicos fue la de ignorar prácticamente este descubrimiento. No obstante, los trabajos de Hamilton conducirán indirectamente hacia un álgebra y un análisis de los vectores que los físicos adoptarán de lleno a finales del siglo XIX.

En el tema del álgebra, es importante hacer observar que es la primera vez en la historia de las matemáticas que un sistema de «números hipercomplejos» estructurado lógicamente no verifica la ley de conmutatividad, cierta, por otra parte, para los números reales y complejos. Era un primer paso adelante en la liberación del álgebra de la sujeción tradicional, y ello permitía abrir totalmente la vía hacia la creación libre de nuestras álgebras, como las álgebras vectoriales, en particular la de Grassmann, y las álgebras de dimensión finita.

GRASSMANN

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) nació y vivió en Stettin (o Szczecin), pequeña ciudad de Pomerania, a poca distancia del Báltico. Tercero de una familia de doce hijos, Hermann no fue un prodigio como Hamilton, y su padre, profesor en una escuela secundaria, decía a menudo que se consideraría afortunado si Hermann llegaba a ser jardinero u obrero. Después de haber pasado dos años en la universidad de Berlín, en donde estudió sobre todo filología y teología, Grassmann volvió a su ciudad natal y cursó estudios de matemáticas, física, historia natural, etc., para convertirse en profesor. En 1834, estuvo durante un año en la escuela técnica sustituyendo a Steiner, que acababa de obtener un puesto en la universidad, y después regresó definitivamente a Stettin, para enseñar allí en diferentes escuelas secundarias. Con motivo de un trabajo que realizó sobre las mareas, redactado en 1839, Grassmann presenta por primera vez su sistema de análisis espacial, fundado en los vectores, cuyas ideas principales se remontan a 1832. En 1844, un año después del descubrimiento de los cuaterniones por Hamilton, publica su célebre tratado titulado *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik...* (La teoría de la extensión lineal, una nueva rama de la matemática), obra clásica, de muy difícil lectura que contiene gran parte del análisis vectorial moderno

presentado en el seno de un sistema geométrico más amplio, que se refiere a la geometría en n dimensiones. Esta obra será editada en una nueva versión en 1862, pero aunque fue apreciada por Gauss y Möbius, sólo influyó en el progreso de las matemáticas cuando los matemáticos Hankel y Schlegel le hubieron dado una forma más susceptible de ser asimilada por los investigadores.

Al comienzo, en 1832, Grassmann[2] considera las distancias AB y BA y constata que son opuestas a causa de su dirección. Deduce de ello entonces la necesidad de introducir el concepto de «suma geométrica», que le permite generalizar la relación $AB + BC = AC$ para A, B, y C puntos cualesquiera del plano. A continuación aplica una idea tomada de su padre de que un paralelogramo puede ser medido mediante el producto de dos lados adyacentes, con tal de que esos lados sean considerados como magnitudes dirigidas, lo que conduce, evidentemente, al *producto geométrico*. Deduce de ello inmediatamente una relación entre el producto y la suma,

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Observa ya que la multiplicación «geométrica» no es conmutativa, y que esta nueva rama del análisis a la que está dando forma parece muy prometedora, y decide consagrar todo su tiempo libre a presentarla, desarrollarla y aplicarla.

En su *Theorie der Ebbe und Flut* (Teoría de las mareas) de 1839 se encuentran otros resultados de su nuevo análisis. En particular, partiendo de la ley de inercia, muestra que la velocidad (S) debida a fuerzas combinadas es una suma geométrica de las velocidades (P, Q) debidas a las fuerzas individuales, y que $S = P + Q$. A continuación, Grassmann indica que se pueden sumar varias fuerzas (velocidades) de la misma manera, y se interesa más particularmente por las «leyes de adición y sustracción geométricas». Demuestra que estas leyes verifican las propiedades de conmutatividad y asociatividad para los vectores. Después, Grassmann esboza el desarrollo del cálculo diferencial para los vectores y afirma lo siguiente:

---

[2] El texto que sigue se inspira ampliamente en la obra de Crowe. Véase la bibliografía al final del capítulo.

Todas las leyes de la diferenciación algebraica y, consecuentemente, también de la integración, son igualmente válidas en el análisis geométrico, con tal de que sean obtenidas, de hecho, de una otra operación que no sea las de adición y sustracción.

Grassmann vuelve a su definición del producto geométrico de dos vectores y afirma que este producto significa la superficie contenida en el paralelogramo determinado por esos vectores. Dos áreas de superficie serán iguales, sólo si son iguales en contenido y están situadas en planos paralelos. De la misma manera, según Grassmann, el producto geométrico de tres vectores significa el sólido (paralelepípedo) formado por ellos, y demuestra que el producto de tres vectores situados en planos paralelos es igual a cero. Grassmann demuestra también la ley de distributividad, y reemplaza la conmutatividad de la multiplicación por la anticonmutatividad. Puede encontrarse también el equivalente de

$$u \times v = |u|\,|v| \text{ sen } \theta$$

Subrayemos inmediatamente que el «producto geométrico» de Grassmann es similar a nuestro producto vectorial moderno, y la única diferencia reside en el resultado obtenido. El producto vectorial es un vector como los factores del producto, mientras que el «producto geométrico» de Grassmann es un «área dirigida» que está constituida por un conjunto de áreas geométricas iguales, el cual determina un vector o un conjunto de vectores perpendiculares a esta área; ese vector (o esos vectores) es precisamente el del producto vectorial moderno.

Grassmann pasa a continuación a lo que llama «producto lineal», de la manera siguiente:

> Por producto lineal de dos vectores entendemos el producto algebraico de un vector multiplicado por la proyección del segundo vector sobre el primero. Escogemos el signo $\frown$ para representar ese producto y, por definición, $a \frown b = ab \cos (ab)$. De esta definición, y como $\cos (ab) = \cos (ba)$ se ve que $a \frown b = b \frown a$.

Se demuestra a continuación la ley de distributividad para ese producto, y además,

$$(a_1, b_1, c_1) \frown (a_2, b_2, c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

además de subrayar que todas las leyes algebraicas se aplican a ese producto. Es evidente que su «producto lineal» es idéntico a nuestro producto escalar.

En su tratado de 1844, Grassmann extiende su nuevo análisis al espacio de n dimensiones. Esta obra, precedida de una introducción de naturaleza esencialmente filosófica, donde se encuentran las bases filosóficas que le permitirán erigir su sistema, consagra una sección preliminar esencial, la más difícil de toda su obra, a la *Teoría general de las formas*. La base de esta teoría la constituye la aceptación hipotética de ciertas formas «vacías de contenido» o magnitudes que están unidas por ciertas «conexiones». Sean a y b dos formas. Grassmann introduce la conexión denotada mediante $\frown$ que engendra una nueva forma $a \frown b$. Precisa que esta conexión verifica las dos propiedades siguientes:

$$a \frown b = b \frown a$$

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c$$

Esta conexión se llama, según Grassmann, «conexión sintética», y le permite introducir otra conexión, llamada ahora «conexión analítica». Una conexión es analítica si conecta dos formas de una manera tal que la forma resultante está sintéticamente conectada con una de las formas originales. Así, si se utiliza $\smile$ para este tipo de conexión, $a \smile b$ conectada sintéticamente a b proporciona a de modo que

$$(a \smile b) \frown b = a.$$

Además, se verifican las ecuaciones siguientes, y el resultado de una conexión analítica es único:

$$a \smile b \smile c = a \smile c \smile b \quad = a \smile (b \frown c)$$

$$a \smile (b \smile c) = a \smile b \frown c$$

Grassmann demostró también que esos resultados podían extenderse a un número ilimitado de formas. Asimismo, introdujo dos nuevas formas, la forma «indiferente» y la forma «analítica»: $a \smile a$ (forma conectada con ella misma) donde a puede tener cualquier valor (es indiferente); $\backsim$ b proporciona $(\smile b)$. Admitirá a continuación que la forma indiferente puede ser llamada «nula», mientras que la forma analítica puede ser identificada con la forma

negativa. Paralelamente, añade dos nuevas conexiones, una denotada mediante $\overset{\frown}{\frown}$ que se define de la manera siguiente:

$$(a \frown b) \overset{\frown}{\frown} c = a \overset{\frown}{\frown} c \frown b \overset{\frown}{\frown} c$$

llamada «multiplicación», y la otra llamada división, que se expresa mediante

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

En el caso de la división, el resultado obtenido no está determinado de manera única (por ejemplo, si $a/b = c$ y $a = 0$, entonces b no es única). Según Grassmann, formas similares (del mismo orden) como dos puntos, dos vectores, etc., cuando están conectadas por una u otra de las conexiones analíticas o sintéticas, proporcionan formas generales del mismo orden, mientras que las conexiones multiplicativas de formas del mismo orden o de órdenes diferentes producen en general formas de orden superior. El producto geométrico ilustra bien las conexiones multiplicativas. A pesar del carácter abstracto y profundamente original de las ideas de Grassmann, que repelía a sus contemporáneos, éstas revelan su inteligencia brillante y su genio original. Grassmann llegó de esa manera, según Crowe a una comprensión de las leyes de asociatividad, conmutatividad y distributividad que ningún otro matemático había alcanzado antes que él. Añadamos que las formas originales a, b, c, ..., etc., vacías de contenido, podían tener diversos valores, como números, puntos, vectores, áreas orientadas, y así sucesivamente, y llegó incluso a desarrollar *dieciséis* especies de conexiones multiplicativas. La obra propiamente dicha comienza con el primer capítulo consagrado a la producción de sus sistemas variados.

En ese primer capítulo, introduce los vectores de n dimensiones, la adición y sustracción vectorial y demuestra diferentes propiedades algebraicas de sus sistema. El segundo capítulo trata de la «multiplicación exterior» (multiplicación geométrica de 1840) definida para vectores de n componentes. Precisemos una vez más que nuestro producto vectorial es un vector, y por tanto una entidad de primer orden, como los factores del producto, mientras que para Grassmann su producto exterior constituye una entidad de segundo orden, lo que le permite, entre otras cosas, generar todo tipo de nuevas entidades, lo que considera precisamente. En el tema del

producto exterior, Grassmann explica que el producto *a.b.c.* ... significa que el vector *a* se desplaza en primer lugar a lo largo del *b*, y la resultante, el área orientada, se desplazará a lo largo de *c*, y así se continúa, para órdenes sucesivamente superiores a tres. Desarrolló también un análisis de puntos (magnitudes elementales en el lenguaje de Grassmann), presentado de forma diferente al de Möbius en su cálculo baricéntrico y desarrollado de una manera mucho más profunda, así como el concepto de «producto regresivo» para paliar la dificultad encontrada cuando el producto geométrico de dos factores es cero (de los vectores dependientes), y así definir el producto geométrico y el producto regresivo como dos formas de un producto. La obra termina con aplicaciones y observaciones sobre el «producto abierto».

Se puede señalar que el producto interior (producto lineal) de dos formas de tres dimensiones (hipernúmeros) es equivalente a la parte escalar del producto de dos cuaterniones de Hamilton, y también que en el espacio de tres dimensiones el producto exterior de Grassmann, si se reemplaza el producto exterior de e_2 y de e_3 por e_1, y así sucesivamente, es precisamente el producto de dos cuaterniones de Hamilton. Puede constatarse otra distinción interesante: mientras que en Hamilton el concepto de vector es una parte subsidiaria del cuaternión, el vector representa para Grassmann, entre diversas formas primarias, una cantidad fundamental, aunque no la única importante.

Grassmann nos ha dejado también una teoría de los números racionales que parece haber sido apreciada por Cantor, y que se encuentra en un libro titulado *Lehrbuch der Arithmetik* (Tratado de Aritmética), publicado en 1861. Propuso, además, que su nuevo análisis sirviera de fundamento a la geometría euclídea porque, según él, construye el fundamento abstracto de la teoría del espacio, no se refiere a ninguna intuición espacial y constituye una ciencia matemática pura. Desde este punto de vista, el análisis de Grassmann es representativo del desarrollo que reivindica que el pensamiento puro puede elaborar una estructura arbitraria que puede ser o no físicamente aplicable.

Hacia 1860, al menos cinco matemáticos diferentes apreciaron los trabajos de Grassmann, a saber Hamilton, Möbius, Saint-Venant, Luigi Cremona y Giusta Bellavista. Pero habrá que esperar a los trabajos de clarificación emprendidos por Hermann Hankel

(1839-1873) y Victor Sclegel (1843-1905) para que los trabajos de este matemático alemán aislado puedan ser mejor conocidos y, sobre todo, mejor apreciados de acuerdo con su valor. Mientras tanto, aunque discípulos ardientes de Hamilton como Tait y Benjamin Peirce intentaran difundir profusamente los méritos de los cuaterniones, fue Maxwell, crítico de los cuaterniones, quien contribuyó a estructurar todavía más el álgebra y el análisis vectorial.

MAXWELL

James Clerk Maxwell (1831-1879) nació el 13 de noviembre de 1831 en Edimburgo, Escocia, el mismo año que Michael Faraday (1791-1879) anunciaba su descubrimiento de la inducción electromágnética. Muy pronto, «Jamesie», como se complacían en llamarle, mostró signos evidentes de una inteligencia curiosa atraída por las matemáticas y por el «porqué de las cosas». Sus primeros años en la Academia de Edimburgo fueron penosos a causa de la rígida pedagogía medieval que se preconizaba allí, pero era un niño testarudo que se ganó el respeto de sus compañeros. A los catorce años mereció la medalla de la Academia de Matemáticas y redactó una memoria sobre un método para construir curvas ovales perfectas con alfileres e hilo. A los dieciséis años entra en la Universidad de Edimburgo y consagra mucho más tiempo a leer y a meditar sobre las matemáticas, haciendo al mismo tiempo experiencias de química y de óptica. En 1850, entra en Cambridge y se convierte en el alumno particular de William Hopkins, considerado como uno de los mejores tutores en matemáticas de la época, y supera con mucho éxito sus exámenes. Diplomado en 1845, decidió permanecer todavía dos años en el Trinity College para realizar estudios posdoctorales, y después, en 1856, aceptó un puesto de profesor en Aberdeen. Casado en 1858, ocupó diversos puestos de profesor en el Royal College, en Glenlair, y luego en Cambridge, en el famoso laboratorio Cavendish. Fundador de la teoría electromagnética, y habiendo sido uno de los más grandes fisicomatemáticos, Maxwell murió el 5 de noviembre de 1879, a consecuencia de un cáncer que se le había declarado dos años antes.

El concepto de campo, así como las necesidades crecientes del análisis vectorial emergieron en parte a partir de los desarrollos de

la mecánica, en parte a partir de la creación y de la elaboración de la teoría del potencial y, por encima de todo, de los éxitos importantes obtenidos en la teoría eléctrica. No nos debe sorprender pues que el desarrollo del análisis vectorial esté íntimamente asociado a la obra de eminentes fisicomatemáticos como Maxwell.

Maxwell mostró al parecer cierto interés por el método de los cuaterniones de Hamilton después de 1870, posiblemente porque creía útil servirse de ellos para la clasificación matemática de las cantidades físicas. Según Maxwell, la invención del cálculo de los cuaterniones constituye un paso hacia el conocimiento de las cantidades ligadas al espacio, y las ideas de ese cálculo, si se deslindan de las operaciones y de los símbolos, están en condiciones de ser de una gran utilidad para todas las partes de la ciencia. Su primer ejemplo de esta clasificación es precisamente el utilizado por Hamilton, las entidades físicas clasificadas en escalares y en vectores. Separa, pues, en el cuaternión la parte escalar de la parte vectorial, acentúa la separación entre estos dos conceptos y los asocia con frecuencia a ejemplos extraídos de la física. En su célebre *Treatise on electricity and magnetism* (Tratado sobre la electricidád y el magnetismo), publicado en 1873, presenta su concepción completa sobre los cuaterniones. Después de una discusión matemática preliminar donde subraya la importancia del descubrimiento de Hamilton, Maxwell presenta un estudio de la división de las magnitudes en escalares y vectoriales. Después precisa que existen magnitudes físicas que no pueden ser representadas por vectores, en particular las que están ligadas a las direcciones en el espacio como las tensiones en los cuerpos sólidos. Si se quiere expresarlas en el lenguaje de los cuaterniones, hace falta, según el autor, recurrir a funciones lineales y vectoriales de un vector. Recordemos que Hamilton había introducido una función vectorial continua v cuyas componentes v_1, v_2 y v_3 eran funciones de x, y y z, y aplicaba su operador ∇ a v para obtener ∇v, un cuaternión. Maxwell separa, pues, en ∇v la parte escalar de la parte vectorial y llama a la parte escalar, representada mediante $S\nabla v$ (donde S significa parte escalar) la «convergencia de v» y la parte vectorial $V\nabla v$ (donde V significa parte vectorial) el *curl* o «rotacional» de la función vectorial original. Los términos *convergencia* y *curl* (o *rotacional*) fueron escogidos después de algunas dudas a partir de la observación de fenómenos físicos, especialmente en dinámica de fluidos.

En 1871 Maxwell acepta definitivamente que la repetición del operador ∇ proporciona

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = - \nabla^2$$

en lugar de $+\nabla^2$, ya que algunos otros autores e incluso él mismo habían dudado entre el signo + y el − en trabajos anteriores. Maxwell llama al símbolo ∇^2 «el operador de Laplace». Observa también, el mismo año, que el rotacional del gradiente de una función escalar ($\nabla \times (\nabla f)$ en notación moderna) y que la divergencia del rotacional de una función vectorial ($\nabla \cdot \nabla \times v$) son siempre cero.

Maxwell se sirvió de los cuaterniones de Hamilton debido a su utilidad para representar las entidades físicas y a las abreviaturas que se podían emplear mediante su uso. Por encima de todo, era partidario de esas cantidades «porque colocaban las entidades físicas a la vista del matemático». Le impresionó particularmente el uso del operador nabla ∇ (el gradiente) y de la función vectorial lineal. Particularmente interesado por las ideas de Hamilton sobre los cuaterniones, Maxwell no era, sin embargo, muy amigo de sus métodos, y el gran mérito de este último fue revelar la importancia de la parte vectorial del cuaternión en el desarrollo de un instrumento apropiado para el tratamiento de los fenómenos físicos.

El análisis vectorial

El establecimiento del análisis vectorial como disciplina autónoma, independiente de los cuaterniones y del análisis de Grassmann, fue la obra independiente de Josiah Willard Gibbs (1839-1903) y de Oliver Heaviside (1850-1925). Hemos visto que en los trabajos de Maxwell aparecen abundantemente los cuaterniones, aunque las partes escalares y vectoriales se tratan de manera prácticamente independiente. La transición entre los trabajos de Maxwell y los de Gibbs y Heaviside fue realizada por William Kingdom Clifford (1845-1879), profesor de matemáticas y de mecánica en la University College de Londres, que fue uno de los raros matemáticos de aquella época que conocía los cuaterniones de Hamilton y el análisis de Grassmann.

Clifford mostró especial interés por los trabajos de Grassmann, aunque conociera perfectamente bien el cálculo de Hamilton y de sus discípulos. En un artículo publicado en 1878 en *The American Journal of Mathematics Pure and Applied,* titulado *Applications of Grassmann's extensive algebra* (Aplicaciones del álgebra extensiva de Grassmann), Clifford expresa su profunda admiración por el análisis de Grassmann y su convicción de que los principios de este análisis ejercerán una influencia preponderante en el futuro de la ciencia matemática.

En sus *Elements of dynamics* (Elementos de dinámica), Clifford introduce los vectores, así como las operaciones usuales de adición y multiplicación de vectores y sus propiedades. Parece haber sido el primero en dar la formulación moderna del producto escalar y del producto vectorial, aunque utiliza el producto escalar en el sentido de los cuaterniones como la suma negativa del producto de sus componentes a lo largo de los ejes. Clifford utiliza también en sus *Elementos* el equivalente del símbolo nabla ∇, introduce el término «divergencia» como opuesto a la *convergencia* de Maxwell, y emplea la operación lineal vectorial como instrumento matemático para tratar las tensiones. Es en Clifford en quien recae el mérito de haber introducido la práctica de definir por separado el producto vectorial y el producto escalar, para considerar $u \times v$ y $u \cdot v$ como dos entidades definidas por sí mismas en lugar de considerarlas, en el sentido de los discípulos de Hamilton, como las dos partes del producto de dos cuaterniones. Además, escoge y altera algunas partes del sistema de los cuaterniones, y erige los rudimentos de un nuevo sistema de análisis vectorial, que sería definitivamente ampliado y estructurado por Gibbs y Heaviside. Añadamos que Clifford se interesó más que nada por las matemáticas puras y en particular por la geometría, así como por las álgebras de dimensión finita, como veremos pronto.

La obra del químico-físico Gibbs, consagrada al análisis vectorial en tres dimensiones, que se encuentra inicialmente contenida en sus apuntes destinados a sus estudiantes, será publicada más tarde bajo el título *Vector analysis* (Análisis vectorial) (1901), con un texto escrito por un estudiante de Gibbs, E. B. Wilson, a partir de los cursos de Gibbs. La del ingeniero Heaviside está contenida en una obra de tres volúmenes titulada *Electromagnetic theory* (Teoría electromagnética) (1893, 1899, 1912), cuyo primer volumen com-

prende un largo capítulo sobre los métodos vectoriales. A principios del siglo XX, los ingenieros aceptaron de buena gana el análisis vectorial de Gibbs y Heaviside y lo incorporaron en numerosos tratados publicados en todo el mundo. Por el contrario, la acogida de los matemáticos fue más bien fría, y sólo mucho más tarde introdujeron los métodos del análisis vectorial en la geometría analítica y diferencial.

La teoría de determinantes

El estudio de los determinantes, esbozado en el siglo XVIII por Maclaurin, Cramer, Bezout, Vandermonde, Lagrange y Laplace, sin que los algoritmos fueran claramente explicitados, conoció un amplio desarrollo a lo largo del siglo XIX. Hemos expuesto brevemente las contribuciones de Euler, Gauss, Cauchy, Jacobi y algunos otros al desarrollo de esta teoría y nos proponemos ahora esbozar rápidamente los trabajos de algunos otros matemáticos de ese siglo.

SYLVESTER

James Joseph Sylvester (1814-1897) nació el 3 de septiembre de 1814 en Londres. Fue educado en el Saint-John's College de Cambridge, y se hizo amigo de Arthur Cayley en 1850. De origen judío, Sylvester no fue diplomado por Cambridge. Colega de su antiguo profesor De Morgan en la University College de Londres, Sylvester aceptó expatriarse a los Estados Unidos de América para enseñar allí en la Universidad de Virginia. Problemas de disciplina conmovieron su temperamento impaciente de tal manera que dejó precipitadamente Virginia con destino a Inglaterra tan sólo tres meses después de su llegada a América. Trabajó entonces en Londres como actuario para una compañía de seguros, y después se hizo abogado. En 1854, es profesor en la escuela militar de Woulwich, y después vuelve de nuevo a los Estados Unidos, en 1876, esta vez a la nueva Universidad John Hopkins en Baltimore. Durante su estancia en John Hopkins, fundó el *American Journal of Mathematics,* más precisamente en 1878. Aceptó un puesto de profesor en Oxford en 1883, en donde permaneció ya hasta su muerte, acaecida el 15 de

marzo de 1897. Se cuentan numerosas anécdotas sobre su persona, de las cuales muchas pertenecen al género del profesor distraído.

Sylvester se interesó sobre todo por el álgebra superior, y muy en particular por la teoría de los divisores elementales y la ley de inercia de las formas cuadráticas. Sus trabajos en este campo, junto con los de Cayley, contribuyeron a crear el vocabulario y los principios básicos de la teoría de las formas y de la de los invariantes. En ese vocabulario se encuentran los términos de invariante, covariante, contravariante, que son suyos, pero Sylvester contribuyó sobre todo al estudio de los determinantes, de una manera continua durante más de cincuenta años.

Una de sus contribuciones principales a la teoría de los determinantes consiste en un método más eficaz para eliminar x de dos ecuaciones polinómicas de grados n y m. Sylvester llamó a este método el «método dialítico»; consiste en multiplicar una o las dos ecuaciones por la cantidad desconocida x que debe ser eliminada, y en repetir el proceso hasta que el número de ecuaciones obtenido sea superior en uno al número de potencias de la incógnita. De este conjunto de $n + 1$ ecuaciones se pueden entonces eliminar todas las potencias n-ésimas, considerando cada una de esas potencias como una cantidad incógnita. Por ejemplo, la eliminación de x en el sistema

$$\begin{aligned} a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 &= 0 \\ b_0x^2 + b_1x + b_2 &= 0 \end{aligned}$$

se efectúa multiplicando la segunda ecuación por x, y la resultante por x, así como la primera ecuación por x, de donde se obtiene

$$\begin{aligned} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x &= 0 \\ a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x &= 0 \\ b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 &= 0 \\ b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x &= 0 \\ b_0x^2 + b_1x + b &= 0 \end{aligned}$$

A continuación, se escribe el determinante del sistema de estas cinco ecuaciones

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

e igualándolo a cero se obtiene la condición necesaria y suficiente para que las dos ecuaciones polinómicas originales posean una raíz común.

Por lo que respecta a las normas cuadráticas, se sabía ya que

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

podía siempre ser reducido a una suma de r cuadrados mediante una transformación lineal

$$x_i = \sum_j b_{ij}y_j$$

con $i = 1, 2, 3, \ldots, n,$ donde el determinante es no nulo. Sylvester demostró, gracias a su ley de inercia, que el número s de términos positivos y el número $r - s$ de términos negativos son siempre los mismos, cualquiera que sea la transformación utilizada. En 1851, Sylvester se decidió a proponer un método de clasificación de los haces de cónicas y de superficies cuádricas, y en este método introduce la noción de divisores elementales.

Otras contribuciones a la teoría de determinantes

En 1825, Heinrich F. Scherk (1798-1885) formuló las reglas para la adición de dos determinantes que tienen en común una fila o una columna, y para la multiplicación de un determinante por una

constante. Enunció también que el determinante de una matriz[3] en la que una línea es una combinación lineal de dos o más líneas es nulo, y que el valor de un determinante diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. En 1858, Weierstrass formuló un método general para reducir simultáneamente dos formas cuadráticas a sumas de cuadrados. Además completó la teoría de formas cuadráticas y la extensión a la teoría de las formas bilineales en la que una forma bilineal puede representarse mediante

$$b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + \ldots + b_{nn}x_ny_n$$

Weierstrass contribuyó también a enriquecer la teoría de los divisores elementales de Sylvester.

Las nociones de matriz de los coeficientes y de matriz ampliada fueron introducidas por Henry J. S. Smith (1826-1883) con ocasión de la resolución de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Cayley, fundador de la teoría de matrices, aportará también resultados nuevos a la teoría de determinantes, y durante el último cuarto del siglo XIX Charles L. Dodgson (1832-1898), más conocido por el seudónimo de Lewis Carroll, y algunos otros, enriquecerán esta teoría con numerosos resultados nuevos y complementarios.

La teoría de matrices

El estudio de los determinantes emprendido desde mediados del siglo XVIII proporcionó una multitud de resultados interesantes gracias a las necesidades experimentadas por los matemáticos que buscaban medios de expresar de una manera más compacta cosas como, por ejemplo, transformaciones de coordenadas y cambios de variables en las integrales múltiples, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales o diferenciales, etc. Tarde o temprano, debían interesarse más específicamente por la disposición rectangular de los números que aparecen en el determinante con vistas a acotar un dominio de estudio específico. Sin embargo, mucho antes de que se

[3] El término de matriz no se utiliza en el vocabulario habitual de la época, porque no sería introducido por Sylvester hasta 1850.

desarrollara la teoría de matrices, los matemáticos habían descubierto ya un buen número de propiedades relativas a esta teoría. Una vez más, la historia de las matemáticas revela que el desarrollo de las teorías y los conceptos no se hace necesariamente de una manera lógica, y aunque la noción de matriz precede lógicamente a la de determinante, fue esta última la que se desarrolló primero. Como Cayley fue el primero en extraer la idea de matriz del determinante y en publicar una serie de artículos sobre esta nueva noción, es considerado generalmente como el fundador de la teoría de matrices.

CAYLEY

Arthur Cayley (1821-1895), nació el 16 de agosto de 1821, en Richmond (Surrey), en una vieja familia inglesa de talento. Frecuentó una escuela privada en Blackheat, antes de entrar en el King's College de Londres a los catorce años. Dotado para las matemáticas, su talento fue reconocido inmediatamente por sus profesores; gracias a presiones externas, su padre, que anteriormente se había negado a que su hijo se hiciera matemático, decidió, sin embargo, que ingresara en el Trinity College de Cambridge en 1838. Diplomado con grandes honores en 1842, fue nombrado asistente tutor durante un período de tres años. No queriendo tomar las órdenes sagradas, Cayley dejó la enseñanza y se consagró a sus investigaciones y, en 1849, fue elegido para el foro. Al tiempo que practicaba su profesión de abogado durante varios años, se las arregló para que su trabajo remunerado no entrara en conflicto con sus investigaciones en matemáticas. Durante este período, publicó cerca de 200 memorias de matemáticas. En 1863, acepta un puesto de matemáticas puras en Cambridge, y permaneció en él hasta 1895, excepto un semestre en que fue invitado por Sylvester para que diera un curso sobre las funciones abelianas y la función zeta en John Hopkins. Murió el 26 de enero de 1895 en Cambridge, y legó a la posteridad una obra tan extensa como las de Euler y Cauchy.

A diferencia de Sylvester, Cayley poseía un temperamento dulce y un juicio sobrio, y estaba animado de una serenidad proverbial. Escritor muy prolífico, contribuyó de una manera original a numerosos temas matemáticos, en particular la geometría analítica en *n*

dimensiones, las transformaciones lineales que son el origen de su teoría de matrices, la teoría de superficies y la de determinantes, por no mencionar su colaboración con Sylvester en la fundación de la teoría de los invariantes y sus trabajos sobre las álgebras de dimensión finita.

La teoría de matrices de Cayley

Cayley se interesó por el concepto de matriz a partir de sus trabajos comenzados en 1841 sobre la teoría de los invariantes, trabajos que fueron motivados en sus orígenes por las investigaciones originales de Boole sobre los invariantes algebraicos. Hemos visto anteriormente que una forma binaria cuadrática

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

puede trasformarse, si se aplica a x y a y una transformación lineal T_1 definida mediante

$$x = ax' + by', \ y = cx' + dy'$$

donde

$$ad - bc = r.$$

La aplicación de T_1 a f produce una nueva forma

$$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

La aplicación de otra transformación T_2 a f' produce una nueva forma de f, por ejemplo f'', y se pueden entonces estudiar las composiciones de transformaciones T_1T_2 ó T_2T_1 y mostrar que esta composición no es conmutativa. A continuación se introduce el concepto de invariante considerando toda función I de los coeficientes de f que satisface la relación

$$I(a', b', c') = r^w I(a, b, c)$$

entonces I se llama invariante de f. Al utilizar la representación rectangular para representar las transformaciones en sus estudios de los invariantes algebraicos, Cayley introdujo el concepto de matriz:

No he obtenido ciertamente la noción de matriz de ninguna manera de los cuaterniones; fue más bien a partir de un determinante o como una manera cómoda de expresar las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy. \end{aligned}$$

La primera memoria en la que introdujo las nociones básicas de las matrices fue redactada en francés y publicada, con el título de *Remarques sur la notation des fonctions algébriques* (Observaciones sobre la notación de las funciones algebraicas) en la revista de Crelle en 1855. Aunque su presentación matricial fuera expuesta para matrices de orden $n \times m$ o matrices rectangulares $n \times m$, utilizaremos más bien matrices 2×2 ó 3×3 para facilitar la comprensión y para mayor brevedad.

En esa memoria, introduce las matrices para simplificar la notación en la representación de las ecuaciones lineales simultáneas. El conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned}$$

se escribe como

$$(\xi, \eta, \zeta) = \begin{array}{l} (\alpha, \beta, \gamma) \\ \left| \begin{array}{l} \alpha', \beta', \gamma' \\ \alpha'', \beta'', \gamma'' \end{array} \right| \end{array} (x, y, z)$$

donde $\left(\ \ \right)$ representa evidentemente $\left|\ \ \right|$ $\left(\ \ \right)$

Esboza rápidamente en esa misma memoria la idea de la matriz inversa y de la multiplicación de matrices o «composición de matrices». Pero su primera memoria importante sobre el tema, titulada *Memoir on the theory of matrices* (Memoria sobre la teoría de matrices), fue publicada en las *Philosophical Transactions of the*

Royal Society of London en 1858. Introduce la matriz nula y la matriz unitaria, respectivamente, mediante

$$\begin{matrix}(0, 0, 0) \\ \left|0, 0, 0\right| \\ \left|0, 0, 0\right|\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(1, 0\ 0) \\ \left|0, 1, 0\right| \\ \left|0, 0, 1\right|\end{matrix}$$

Cayley define la adición de dos matrices de la manera siguiente

$$\begin{matrix}(a, & b, & c\,) \\ \left|a', \right. & b', & \left. c'\right| \\ \left|a'', \right. & b'', & \left. c''\right|\end{matrix} + \begin{matrix}(\alpha, & \beta, & \gamma\,) \\ \left|\alpha', \right. & \beta', & \left. \gamma'\right| \\ \left|\alpha'', \right. & \beta'', & \left. \gamma''\right|\end{matrix} = \begin{matrix}(a + \alpha, & b + \beta, & c + \gamma\,) \\ \left|a' + \alpha', \right. & b' + \beta', & \left. c' + \gamma'\right| \\ \left|a'' + \alpha'', \right. & b'' + \beta'', & \left. c'' + \gamma'\right|\end{matrix}$$

y enuncia, sin demostrarlo, que las matrices son conmutativas o «convertibles» y asociativas. Cayley presenta dos tipos de multiplicación: la primera es la «multiplicación por un escalar»; la segunda designa la multiplicación habitual o «composición». Si m es un escalar y A una matriz, entonces mA está definida, según Cayley, como la matriz cuyos elementos son, cada uno, m veces el elemento correspondiente de A. En cuanto a la multiplicación habitual de dos matrices, Cayley se sirve directamente de la composición de dos transformaciones. Así, ilustremos para dos matrices de orden 2 ese producto:

$$T_1 \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

seguida de

$$T_2 \begin{cases} x'' = b_{11}x' + b_{12}y' \\ y'' = b_{21}x' + b_{22}y' \end{cases}$$

entonces las relaciones entre x'' e y'', y x e y, vienen dadas por

$$x'' = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y$$
$$y'' = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{12}a_{12} + b_{22}a_{22})y$$

El producto de dos matrices es definido por Cayley de la manera siguiente (en notación moderna)

$$\begin{pmatrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

El elemento c_{ij} en la matriz «producto» es igual a la suma de los productos de los elementos de la i-ésima fila de la primera matriz ($b_{11}b_{12}$, por ejemplo, con $i = 1$) y los elementos correspondientes de la j-ésima columna de la segunda matriz ($\binom{a_{12}}{a_{22}}$, por ejemplo, con $j = 2$). Según Cayley, esta forma de multiplicación es asociativa pero, en general, no es conmutativa. Introduce también la potencia n -ésima de una matriz M y subraya que

$$M^n \cdot M^p = M^{n+p}.$$

A continuación, en la sección 17 de este mismo artículo, Cayley enuncia la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

en la forma

$$\frac{1}{\nabla}\begin{pmatrix} \partial a\nabla, & \partial a'\nabla, & \partial a''\nabla \\ \partial b\nabla, & \partial b'\nabla, & \partial b''\nabla \\ \partial c\nabla, & \partial c'\nabla, & \partial c''\nabla \end{pmatrix}$$

donde ∇ es el determinante de la matriz y $\partial_x\nabla$ es el determinante obtenido de ∇ reemplazando el elemento x en ∇ por 1 y todos los demás elementos de la fila y la columna que contiene a x por cero, lo que equivale a decir que $\partial_x\nabla$ es el cofactor de x. Cuando ∇ es cero, la matriz se dice «indeterminada» (singular) y no posee inversa. Además, Cayley añade:

Se puede añadir que la matriz cero es indeterminada y que el producto de dos matrices puede ser cero sin que ninguno de los factores sea nulo, si sólo una o las dos matrices son indeterminadas.

La última parte de la frase es errónea, porque es preciso que las dos matrices sean indeterminadas, ya que si $AB = 0$, con A indeterminada y B no, entonces $ABB^{-1} = 0$, y habría de ser $A = 0$. La traspuesta de una matriz es definida de la manera siguiente

$$tr\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & c \\ b; & d \end{pmatrix}$$

y Cayley prosigue la discusión sobre la traspuesta y enuncia que

$$tr(L\ M\ N) = (tr\ N)\ (tr\ M)\ (tr\ L)$$

Si $tr\ M = M$, entonces M es llamada por Cayley «simétrica» y si $tr\ M = -M$, entonces M es «alternada».

Cayley presenta a continuación el teorema de Cayley-Hamilton y métodos para encontrar las raíces y las potencias de una matriz. Termina esa memoria enunciando algunas reglas con respecto a las matrices rectangulares, en particular la de que una matriz de orden $n \times m$ puede sumarse a una matriz del mismo orden, y la de que el producto de una matriz $n \times m$ por otra matriz es válido si el orden de esta última es $m \times p$. Termina, finalmente, con la observación de que la traspuesta de una matriz $n \times m$ es una matriz $m \times n$.

Después de la publicación de las memorias de Cayley sobre la teoría de matrices, numerosos matemáticos intentaron extender y desarrollar las ideas de Cayley. Entre los que más contribuyeron a desarrollar esta teoría, no podemos más que citar algunos nombres: F. Georg Frobenius, H. J. S. Smith, Clebsch, Arthur Buchheim, Kurt Hensel, Camille Jordan, William H. Metzler y Henry Taber.

Las álgebras de dimensión finita

Desde un punto de vista puramente algebraico, los cuaterniones representaban un ejemplo de un álgebra que posee las propiedades de los números reales y complejos, salvo por la conmutatividad de la multiplicación. A lo largo de la segunda mitad del siglo XIX fueron desarrollados diversos sistemas de hipernúmeros, gracias a la imaginación creadora de diversos matemáticos.

En las *Lectures on quaternions* de Hamilton, éste introduce los bicuaterniones que son de hecho cuaterniones con coeficientes complejos. Hamilton observó que el producto de dos bicuaterniones diferentes de cero puede ser igual a cero, resultado similar al obtenido por Cayley con el producto de dos matrices. Este último generalizó los cuaterniones de Hamilton componiendo un hipercuaternión con ocho unidades: $1, e_1, e_2, ..., e_7$, con las reglas siguientes:

$$e_1^2 = 1,\ e_ie_j = -e_je_i$$

para $i, j = 1, 2, \ldots, 7$ y con $i \neq j$

$$e_1e_2 = e_3,\ e_1e_4 = e_5,\ e_1e_6 = e_7,\ e_2e_5 = e_7,$$

$$e_2e_4 = -e_6,\ e_3e_4 = e_7,\ e_3e_5 = e_6$$

y se obtienen catorce ecuaciones a partir de las siete antes citadas permutando cada conjunto de tres índices de una manera cíclica, por ejemplo, $e_2e_3 = e_1; e_3e_1 = e_2$. Cayley estaba en condiciones de definir a continuación un hipernúmero x llamado «octonión» de la manera siguiente

$$x = x_0 + x_1e_1 + x_1e_2 + \ldots + x_7e_7$$

donde las x_i son números reales, y la norma de x, denotada $N(x)$ es, por definición,

$$N(x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_7^2.$$

El álgebra de los octoniones posee las propiedades siguientes: la norma de un producto es igual al producto de las normas, la división de la izquierda y la división a la derecha, salvo por cero, es única (este resultado fue demostrado por L. Eugene Dikson en 1912). La asociatividad y la conmutatividad no se verifican en esta álgebra.

Clifford creó también otro tipo de hipernúmero que llamó bicuaternión. Si p y q son cuaterniones reales y si w verifica la relación $w^2 = 1$ y puede ser permutado con cualquier cuaternión real, entonces $p + wq$ es un bicuaternión. La ley de multiplicación es válida, pero en ella no se verifica la asociatividad. Clifford también dio su nombre a una clase de álgebras: las unidades son 1, $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, tales que $e_1^2 = -1$ y $e_ie_j = -e_je_i$ para $i \neq j$; cada producto de dos o varias unidades es una nueva unidad, por lo que hay 2^n unidades diferentes; todos los productos son asociativos y una forma es un escalar multiplicado por una unidad y un álgebra está generada por la suma y el producto de formas.

En 1870, Benjamin Peirce publicó una obra titulada *Linear associative algebra* (Algebra lineal asociativa), en la cual se encuentran definidas las diferentes álgebras de dimensión finita conocidas hasta esa época, así como nuevas nociones fundamentales, como el elemento nilpotente ($A^n = 0$ para n entero positivo), el elemento idempotente ($A^n = 1$ para n cualquiera), etc. Los trabajos de Peirce fueron continuados por F. Georg Frobenius, C. Sanders Peirce

(1839-1914), Adolf Hurwitz (1859-1919), etc., y esas investigaciones revelaron la enorme variedad de estructuras algebraicas posibles; permitieron igualmente comenzar una teoría general y edificar progresivamente una clasificación a partir de la cual los algebristas del siglo XX se lanzaron a investigaciones fecundas y originales.

Los primeros trabajos de lógica matemática

Una de las contribuciones importantes y originales del siglo XIX fue la de haber emprendido un esfuerzo de sistematización de la lógica, etapa evidentemente indispensable hacia la axiomatización y la formalización de las matemáticas. Ya vimos la tentativa infructuosa de Leibniz de fundar una ciencia universal del razonamiento. Otros matemáticos intentaron, más tarde y sin más éxito, abordar el estudio de conjunto de las operaciones lógicas de la inteligencia mediante el análisis de las formas del lenguaje y del pensamiento científico. Pero fue en Gran Bretaña donde ese movimiento se manifestó con mayor nitidez y éxito durante el siglo XIX. Los trabajos de Woodhouse, Peacock y Gregory acentuaron el carácter abstracto de las operaciones lógicas, lo que marcó el nacimiento verdadero de la liberación de la lógica de sus ataduras filosóficas y el comienzo del desarrollo de una lógica de las operaciones simbólicas y de las relaciones.

Los trabajos en lógica de De Morgan

Hemos visto anteriormente que De Morgan concebía el álgebra como una colección de símbolos vacíos de sentido sobre los cuales se definían leyes de composición que verificaban ciertas propiedades. De Morgan era, pues, consciente del carácter operacional del simbolismo algebraico y estaba profundamente convencido de la posibilidad de elaborar un álgebra nueva, muy diferente de la utilizada en su época. Además, intentó analizar bajo el ángulo lógico el conjunto de los símbolos, de las operaciones y de las leyes matemáticas. Sus trabajos de lógica están repartidos en varias obras: *First notions of logic* (Primeras nociones de lógica) (1839) en la que la lógica es definida no como la ciencia de los conceptos o de las

proposiciones sino más bien como una teoría de los nombres de los objetos; *Formal logic or the calculus of inference* (Lógica formal o el cálculo de inferencia) (1847) en la que funda el cálculo de las relaciones; y finalmente *On the structure of the syllogism and its application* (Sobre la estructura del silogismo y su aplicación), publicada en las *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* en 1849, y *Syllabus of a proposed system of logic* (Resumen de un sistema de lógica propuesto) (1860).

En una primera etapa, De Morgan intenta mejorar la lógica aristotélica tradicional. Para ello, aumenta el número de proposiciones tipo considerando todas las combinaciones de dos términos *X* e *Y* y sus negativos. Estas combinaciones de dos términos producen diferentes formas de proposiciones, pero De Morgan está interesado en obtener a continuación esas proposiciones a partir de dos formas tipo: la universal «Todo... es....» y la particular «Algunos... son...». Observa ciertos defectos en la lógica aristotélica, como que «Algunos *X* son *Y*» y «Algunos *X* son *Z*» no implican ninguna conclusión, mientras que de hecho, según la lógica, el término medio *X* debe ser utilizado universalmente, es decir, debe aparecer «Todos los *X*». Además, De Morgan pone de manifiesto que de «La mayor parte de los *X* son *Y*» y de «La mayor parte de los *X* son *Z*», se deduce la necesidad de la proposición «Algunos *X* son *Z*». De Morgan introduce, pues, la idea de la «cuantificación de los términos», lo que le permite además introducir varias otras formas válidas de silogismos. Subrayemos a este respecto que Gottfried Ploucquet (1716-1790) había ya introducido la forma proposicional universal (cuantificador), y que George Berthane (1800-1884) y W. Hamilton (1788-1856) trataron del problema de la cuantificación de los predicados.

En esta teoría de la generalización de las formas de enunciados (proposiciones), De Morgan utilizó el signo de la negación lógica que opera no sólo sobre el predicado del enunciado sino también sobre el sujeto. Así, trata la negación de un concepto como su complemento en el universo de las proposiciones (análogo al conjunto universal). Sugerido por De Morgan, el concepto de conjunto universal le permite definir el complemento de un agregado dado como el agregado de los objetos no contenidos en el agregado dado. A la vez, el agregado y su complemento están contenidos en el interior de los límites de un cierto «agregado universal de objetos» que puede ser definido mediante criterios

tomados fuera de la lógica. Su nombre ha quedado unido a dos leyes que están precisamente ligadas a sus trabajos sobre la lógica simbólica:

El contrario de un agregado es la composición de los contrarios de los agregados; el contrario de una composición es el agregado de los contrarios de los componentes.

En la notación lógica habitual de la época, esas leyes pueden escribirse en la forma

$$1 - (x + y) = (1 - x)(1 - y)$$

$$1 - xy = (1 - x) + (1 - y)$$

donde 1 denota el agregado universal y $(1 - x)$ representa el complementario de x en 1.

De Morgan fue también el que introdujo el estudio de la lógica de las relaciones no considerando como tipos elementales de enunciado los que se reducen a la representación aristotélica «*X* es *Y*» o «*X* no es *Y*». En efecto, subraya que esta lógica no puede asegurar la validez de ciertos enunciados como, por ejemplo, «Si un caballo es un animal, entonces una cola de caballo es una cola de animal», y de la misma manera «*X* ama a *Y*» es un enunciado que no puede ser tratado con la lógica de Aristóteles. De Morgan parte más bien de un enunciado elemental cuya estructura «*X*... *L Y*» denota que «*X* es uno de los objetos del pensamiento que está ligado a *Y* por la relación *L*» y elabora las operaciones fundamentales de la lógica de las relaciones. Entre estas operaciones definidas, se pueden citar la suma lógica y el producto lógico de las relaciones *M* y *N*, la negación de *M* y la recíproca de *M*, etc. A continuación, formula un cierto número de teoremas en esta álgebra: las contrarias de recíprocas son recíprocas; las recíprocas de contrarias son contrarias; la contraria de una recíproca es la recíproca de la contraria, etc. Finalmente, De Morgan introduce dos grandes clases de relaciones: las que son transitivas y las que son no transitivas.

Poco comprendido por sus contemporáneos, sus trabajos de lógica adolecían de una notación ambigua y, además, no siempre uniforme, pero tuvieron el mérito principal de estimular el desarrollo del álgebra de las relaciones de C. S. Peirce y proporcionaron un

impulso a George Boole en su intento de generalizar los silogismos aristotélicos mediante el cálculo de las clases, desarrollado parcialmente por De Morgan.

BOOLE

George Boole (1815-1864) nació el 2 de noviembre de 1815 en el condado de Lincoln, en Inglaterra. Era hijo de un tendero modesto llamado John, cuyo interés verdadero estaba centrado en las matemáticas. Tras haber recibido una educación muy escasa, pasó por la escuela elemental y después frecuentó una escuela comercial durante un corto período de tiempo. Poco atraído por el comercio, tomó la firme decisión de hacerse un hombre instruido de forma autodidacta. Boole aprendió el griego, el alemán y después el francés. A los dieciséis años era profesor ayudante en una escuela privada de Ducaster, acumulando a las cargas correspondientes a ese puesto las de ayudante en un laboratorio y portero. Comenzó un estudio sistemático de las matemáticas desde los diecisiete años, y fue ayudado en esta tarea por su padre y un tal D. S. Dixon, bachiller en matemáticas por Oxford. En 1833, enseña en otra escuela elemental y, finalmente, a fuerza de economizar, pudo fundar en 1840 su propia escuela en Lincoln. Aproximadamente en la misma época, comienza una correspondencia con los matemáticos de Cambridge, y éstos le estimulan a publicar sus primeros trabajos de matemáticas. En 1844 recibe una medalla como reconocimiento a sus investigaciones en análisis matemático y, gracias a la influencia de sus amigos de Cambridge, se convierte en profesor de matemáticas en el Queen's College de Cork, en Irlanda, en 1849, aunque no tenía ningún título académico a nivel universitario.

A partir de esta época, Boole pudo emprender verdaderamente sus investigaciones sobre el razonamiento simbólico, que le condujeron a publicar en 1854 *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (Una investigación de las leyes del pensamiento, sobre las que están fundadas las teorías matemáticas de la lógica y las probabilidades), que fue precedida de unas memorias de lógica publicadas en revistas científicas inglesas e irlandesas. En 1855, se casó con Mary Everest, y de su unión nacieron cinco hijas, de las que una, Lucy,

llegó a ser la primera mujer en Inglaterra que recibió el título de profesora de química. Hombre de principios y lleno de humor, Boole poseía una actitud muy democrática y no parecía tener ningún prejuicio social. Murió el 8 de diciembre de 1864, en Bellintemple, cerca de su ciudad natal, diez años después de haber publicado su fundamental tratado *Investigation of the laws of thought.*

Las contribuciones de Boole en el campo de las matemáticas comprenden investigaciones sobre los invariantes algebraicos que constituyen el origen de los trabajos de Cayley sobre el tema, tratados sobre el cálculo diferencial e integral y sobre las ecuaciones diferenciales en donde introduce por primera vez la utilización del operador diferencial *D,* así como sobre el cálculo de diferencias finitas. Pero lo que le hizo célebre fueron, sobre todo y casi exclusivamente, sus trabajos originales en lógica simbólica; Bertrand Russell valoró las investigaciones de Boole en estos términos: «Las matemáticas puras fueron descubiertas por Boole en una obra que él llama "The laws of thought"».

El objeto de *Las leyes del pensamiento* es el estudio, según Boole, de las leyes fundamentales de esas operaciones de la inteligencia por medio de las cuales se efectúa el razonamiento... con el fin de expresar esas leyes en el lenguaje simbólico del cálculo lógico, y sobre esta base edificar la ciencia de la lógica y elaborar su método. Además, Boole intentó hacer de su método la base de un método aún más general con el fin de aplicarlo a la teoría matemática de las probabilidades; y finalmente esperaba extraer de sus diversos elementos, recogidos en el curso de sus investigaciones, algunas informaciones probables sobre la naturaleza y la constitución de la inteligencia humana. Según Boole, los estudios generales de lógica deberían iluminarnos sobre la naturaleza de las habilidades intelectuales, y estaba profundamente convencido de que estudiando las leyes de los signos o de los símbolos, se podía en realidad aprender a conocer las leyes fundamentales de la razón.

De entrada define sus términos y sus operaciones fundamentales esencialmente como sigue:

x, y, z, ... representan clases de objetos.
1 se utiliza para representar la clase universal.
0 representa la clase nula o el conjunto vacío.
$+$ denota la adición (la unión de dos conjuntos disjuntos).

$-$ denota la sustracción (diferencia conjuntista).
 representa la multiplicación (intersección de dos conjuntos).
$1 - x$ indica el complementario de una clase x.
$=$ significa la relación de identidad.

Por ejemplo, $x \cdot y$ ó $x\,y$ sin punto entre las dos clases es la intersección de las clases x e y, $x + y$ es la reunión de las clases disjuntas x e y, $1 - x$ es el complementario de x en el universal 1, $x - y$ es la clase de los objetos de x que no están en la clase y (Boole escribe $x \cdot (1 - y)$). A partir de esas operaciones fundamentales, Boole elabora definiciones sobre las relaciones entre las clases. Partiendo de la igualdad, formula diversas definiciones de la inclusión, como la siguiente

$$x \cdot y = x$$

que significa que x contenido en y implica que la intersección de x con y es idéntica a x.

Boole formula luego las propiedades de las operaciones fundamentales bajo la forma de leyes:

La ley conmutativa para la multiplicación: $xy = yx$
La ley asociativa para la multiplicación: $x(yz) = (xy)z$
La distributividad de $\cdot$ con respecto a $+$: $z(x + y) = zx + zy$
La distributividad de $\cdot$ con respecto a $-$: $z(x - y) = zx - zy$
Si $x = y$, entonces $zx = zy$, y si $x = y$, entonces $z + x = z + y$.

Considera también un cierto número de leyes como axiomas que la inteligencia aceptaría sin demostración. He aquí los principales axiomas: la ley de contradicción

$$x(1 - x) = 0$$

porque x no puede ser a la vez x y $1 - x$.

De la misma manera, la ley $xx = x$ es un axioma que no se verifica, sin embargo, en el álgebra habitual, mientras que la ley del tercero excluido se expresa de la manera siguiente:

$$x + (1 - x) = 1$$

lo que le permite traducir los enunciados siguientes de esta manera: «Todo objeto de x es un objeto de y» se convierte en $x(1 - y) = 0$, «Ningún objeto de x es objeto de y» se formula $xy = 0$, «Algunos

objetos de x son también objetos de y» resulta $xy \neq 0$ y, finalmente, «Algunos objetos de x no son objetos de y» toma la forma $x(1 - y) \neq 0$. Boole deduce también las leyes del razonamiento aplicando los axiomas y propiedades de las operaciones fundamentales. A título de ejemplo, obtiene

$$1 \cdot x = x \quad \text{y} \quad 0 \cdot x = 0.$$

El sistema lógico elaborado por Boole a partir de clases puede interpretarse también, según el autor, como un cálculo de proposiciones, en el que las operaciones unión, intersección y complementario se traducen, respectivamente, por disyunción exclusiva, conjunción y negación. Por ejemplo, si x e y son proposiciones

$x\ y$ es la conjunción de x e y
$x + y$ es la disyunción exclusiva de x e y
$x = 1$ significa que la proposición es verdadera
$x = 0$ significa que la proposición es falsa
$1 - x$ significa la negación de x.

Esta traducción del sistema lógico de Boole a un cálculo de proposiciones permitió el nacimiento del «álgebra de Boole», que fue desarrollada más profundamente por sus sucesores.

Boole desarrolló también otros temas como la función lógica, las ecuaciones lógicas y un método de eliminación, además de haber aplicado su sistema lógico a la química y de haber propuesto interpretaciones del cálculo de las clases para satisfacer las necesidades de la teoría de probabilidades.

Los trabajos de lógica después de Boole

Bajo la influencia de Boole se constituyó una escuela de lógica simbólica que preparó la unificación progresiva de la lógica matemática.

William Stanley Jevons (1835-1882), lógico y economista inglés, aportó distinciones clarificadoras sobre el cálculo de Boole y desarrolló nuevos temas de estudio, además de perfeccionar y popularizar los principios del álgebra de Boole. En particular, amplió la operación $A + B$ de Boole, extendiéndola al caso en que A y B son

cualesquiera, introdujo el concepto de «tipo» de una función booleana y una teoría de inducción, y elaboró una «máquina lógica»[4] cuyos principios de operación están fundamentados en la analogía entre el proceso lógico de exclusión de las combinaciones de clases que son incompatibles con las premisas y la acción mecánica de las palancas.

Charles Sanders Peirce (1839-1914), matemático y lógico americano, hizo avanzar el cálculo de proposiciones, la lógica de las relaciones y llegó a ser el fundador de una nueva ciencia: la semiótica o teoría general de los signos. Distinguió entre una proposición y una función proposicional o forma proposicional, e introdujo las formas proposicionales de dos variables. Sus trabajos en inferencia lógica hicieron avanzar sustancialmente este tema particular de la lógica. Además de introducir las tablas de verdad, formuló la idea de fundar el cálculo de proposiciones sobre una simple operación, anticipándose así a N. H. Sheffer.

Ernst Schröder (1841-1902), matemático alemán, asimiló y puso orden en los resultados obtenidos por Boole y sus sucesores: Jevons, Peirce, John Venn (célebre por sus diagramas lógicos), O. Mitchell, Hugh McColl y algunos otros, y publicó, a partir de 1890, voluminosas obras de síntesis. Unificó los diversos sistemas de notación utilizados por sus antecesores, y con la ayuda de su propio simbolismo perfeccionado, presentó un tratamiento sistemático del álgebra formal de la lógica bajo varios de sus aspectos. En su primer volumen, Schröder desarrolló un sistema abstracto que admite diversas interpretaciones, bien en términos de una teoría formal de la extensión, o bien como un cálculo de clase; luego, en el segundo volumen, dedujo de este sistema abstracto un cálculo de proposiciones. Aunque utilizó los cualificadores introducidos por Peirce y Mitchell, es decir,

$$\sum_x \text{ y } \prod_x$$

---

[4] Babbage, pionero de las calculadores modernas, también elaboró máquinas de calcular (ver la bibliografía al final del capítulo).

no intentó seriamente desarrollar un cálculo completo de los predicados. Fue en su tercer volumen, el más completo de la colección, donde Schröder presentó un tratamiento completo del álgebra de las relaciones, en el cual la relación es definida como una clase de pares ordenados, que puede ser especificada mediante una función característica a_{ij}, igual a 1 cuando $(i: j)$ pertenece a la relación, e igual a cero cuando no pertenece.

Platon Sergeyevich Poretski (1846-1907), profesor en la Universidad de Kazán, emprendió una generalización sustancial y mejoró las contribuciones de Boole, Jevons y Schröder al álgebra lógica. Propuso, entre otras cosas, un método eficaz, más satisfactorio que los de Boole y Schröder, para caracterizar completamente la clase de todas las inferencias que pueden extraerse a partir de una ecuación lógica dada. Poretski sugirió también una axiomatización, una teoría de formas canónicas, una teoría de combinaciones y de descomposiciones de ecuaciones lógicas en sus elementos. Las investigaciones de este matemático ruso estuvieron centradas sobre todo en una teoría de las consecuencias lógicas y en un tratamiento original de las formas canónicas para las expresiones lógicas. Señalemos que algunas de sus memorias y libros fueron publicados en francés a comienzos del siglo XX.

Boole, De Morgan y Jevons están considerados como los iniciadores de la lógica moderna, pero sus trabajos están demasiado ligados a la forma misma de las matemáticas, hasta el punto de que estos lazos son, a menudo, artificiales. Además, las interpretaciones múltiples del álgebra de Boole aumentaron la confusión, por lo que durante algún tiempo constituyó más bien un impedimento para el desarrollo de la lógica simbólica. El año 1879 marca una etapa importante en la historia de la lógica con la aparición del tratado de Frege, *Begriffsschrift* (Escritura de los conceptos), porque ese libro libera, por una parte, a la lógica de los lazos artificiales con las matemáticas, y por otra, presenta por primera vez un cálculo de proposiciones y una teoría de la cuantificación bien estructurada. Los trabajos del célebre matemático Peano son igualmente importantes, no sólo para el desarrollo de la lógica matemática, sino sobre todo para los fundamentos de esta ciencia. Frege y Peano, cada uno a su manera, son el origen de la reconstrucción lógica de las

matemáticas que condujo directamente a los *Principia mathematica* de Russell y Whitehead.

Como consecuencia de los trabajos de Cantor sobre la teoría de conjuntos y de las diferentes investigaciones consagradas a la elaboración de un fundamento lógico de los sistemas de números, a un cierto número de matemáticos les pareció evidente que los fundamentos lógicos debían también ser sometidos a revisión. A finales del siglo XIX, se desarrollaron escuelas de pensamiento con el fin de promover el estudio de los fundamentos de las matemáticas sobre nuevas bases lógicas. Fue así como aparecieron la escuela logística, la escuela intuicionista y la escuela formalista, que intentaron fundamentar las matemáticas según concepciones filosóficas muy diferentes unas de otras. Pero los trabajos de estas escuelas y la actividad científica de los matemáticos asociados a ellas pertenecen a la época contemporánea, el siglo XX.

BIBLIOGRAFÍA

Baumgart, John K., «Axioms in algebra —where did they come from?», *The Mathematics Teacher,* 64, 1961, pp. 155-60.

Bell, Eric, T., *Men of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1965, pp. 340-465, 484-509, 555-79.

Birkhoff, Garret, comp., «Galois and group theory», *Osiris,* 3, 1937, pp. 260-68.

Boe, Barbara L., «Group theory and the solvability of equations», *School Science and Mathematics,* 69, 1969, pp. 159-63.

Boole, George, *The mathematical analysis of logic,* Nueva York, Philosophical Library, 1948; [*Análisis matemático de la lógica,* Madrid, Cátedra, 1979].

Bourgne, R. y J.-P. Azra, *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois,* París, Gauchier-Villars, 1962.

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley, 1968, pp. 620-47.

Burns, Josephine E., «The foundations period in the history of group theory», *The American Mathematical Monthly,* 20, 1913, pp. 141-48.

Crowe, Michael J., *A history of vector analysis,* Notre Dame, University of Notre Dame Press, 1967.

Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N. R. F., 1957, pp. 655-60.

Dubbey, J. M., «Babbage, Peacock and modern algebra», *Historia Mathematica,* 4, 1977, pp. 295-302.

Feldmann, Richard W. Jr., «I. Arthur Cayley —founder of matrix theory», *The Mathematics Teacher,* 55, 1962, pp. 482-84.

Feldmann, Richard W. Jr., «II. Basic properties», *The Mathematics Teacher,* 55, 1962, pp. 589-90.

Feldmann, Richard W. Jr., «III. The characteristic equation: minimal polynomials», *The Mathematics Teacher,* 55, 1962, pp. 657-59.

Feldmann, Richard W. Jr., «IV. The "transposed" or "conjugate" matrix; orthogonal matrices», *The Mathematics Teacher,* 56, 1963, pp. 37-38.

Feldmann, Richard W. Jr., «V. Matric equations», *The Mathematics Teacher,* 56, 1963, pp. 101-02.

Feldmann, Richard W. Jr., «VI. Similar and congruent matrices; nullity, vacuity, and rank», *The Mathematics Teacher,* 56, 1963, pp. 163-64.

Frege, Gottlob, *The basic laws of arithmetic,* Traducción del alemán por Montgomery Furth, Berkeley y Los Angeles, University of California Series Press, 1967; *Fundamentos de la aritmética,* Barcelona, Laia, 1972.

Goldsteine, Herman H., *The computer from Pascal to van Newman,* Princeton, Princeton University Press, 1972.

Van Heijenoort, Jean, comp., *From Frege to Gödel,* Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1967.

Kennedy, Hubert C., «Peano's concept of number», *Historia Mathematica,* 1, 1974, pp. 387-408.

Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 752-64, 772-812, 924-30, 979-98, 1182-92.

Kneebone, G. T., *Mathematical logic and the foundations of mathematics,* Londres, D. Van Nostrand Company Limited, 1963.

Law, Bernadine, «The invention of quaternions», *Pentagon,* 15, 1955, pp. 25-30.

Litvak, Barry, «History of group theory leading to the development of infinite abelian group», *The Mathematics Teacher,* 57, 1964, pp. 30-32.

Losano, Mario, «G. Babbage. La machina analitica», Milán, Etas Kimpas, 1973. Crítica por Umberto Forti en *Historia Mathematica,* 2, 1975, pp. 350-53.

MacDuffee, C. C., «Algebra's debt to Hamilton», *Scripta Mathematica,* 10, 1944, pp. 25-36.

MacFarlane, Alexander, *Lectures on the British mathematicians of the nineteenth century,* Nueva York, Wiley, 1916.

May Kenneth O., «The impossibility of a division algebra of vectors in three

dimensional space», *The American Mathematical Monthly,* 73, 1966, pp. 289-291.
Meschkowski, Herbert, *Ways of thought of great mathematicians,* San Francisco, Holden-Day, Inc., 1964, pp. 72-83, 91-104.
Miller, G. A., «On the history of several fundamental theorems in the history of groups of finite order», *The American Mathematical Monthly,* 8, 1901, pp. 213-16.
Miller, G. H., «The evolution of group theory», *The Mathematics Teacher,* 57, 1964, pp. 26-32.
Pawlikowski, George J., «The men responsible for the development of vectors», *The Mathematics Teacher,* 60, 1967, pp. 393-396.
Pierpont, James, «Early history of Galois theory of equations», *Bulletin of the American Mathematical Society,* 4, 1898, pp. 332-340.
Pierpont, James, «Galois's Collected Papers», *Bulletin of the American Mathematical Society,* 6, 1899, pp. 296-300.
Sarton, George, «Evariste Galois», *Osiris,* 3, 1937, pp. 241-259.
Smith, David E, *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vols. I y II, 1959, pp. 278-85, 670-96.
Styazhkin, N. I., *History of mathematical logic from Leibniz to Peano,* traducido del ruso, Cambridge (Massachusetts), The M.I.T. Press, 1969.
Taton, René, «Les relations d'Evariste Galois avec les mathématiciens de son temps», *Revue d'Histoire des Sciences,* 1, 1948, pp. 114-30.
Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. III, *La science contemporaine. I. Le XIX^e siècle,* París, P.U.F., 1961, pp. 11-23. [*Historia general de las ciencias,* vol. III, Barcelona, Destino, 1973.]
Turnbull, H. W., *The great mathematicians,* Londres, Methuen, University Paperbacks, 1929, pp. 129-35.
Wilkes, M. V. «Babbage as a computer pioneer», *Historia Mathematica,* 4, 1977, pp. 415-440.

EJERCICIOS

1. En el prefacio de «Dos memorias de análisis puro», Galois ataca violentamente a la Academia y a los examinadores de la Escuela Politécnica. ¿Por qué lo hace y hasta qué punto se le puede tener en cuenta? Justificarlo.
2. ¿Cuál fue el papel de la Analytical Society de Cambridge en el

desarrollo del álgebra en Inglaterra? Justificar la respuesta con ejemplos.

3. ¿En dónde entra el principio de la permanencia de forma en la reforma del álgebra emprendida por Woodhouse, Peacock y De Morgan? Justificar la respuesta. Su fundamento lógico es, sin embargo, dudoso. Decir por qué.
4. ¿Cuáles son las conclusiones que pueden extraerse de los trabajos sobre la reforma del álgebra en Inglaterra?
5. Si $p = 3 - 2i + 5j - k$ y $q = -4 + i + 2j + 3k$ son dos cuaterniones, mostrar que $p\,q \neq q\,p$.
6. Comparar las formas de tres dimensiones de Grassmann con los cuaterniones de Hamilton con respecto a la multiplicación; encontrar las semejanzas y las diferencias.
7. ¿Cuál fue el papel de Maxwell en el desarrollo del análisis vectorial? Precisarlo con ejemplos.
8. Utilizar el método dialítico de Sylvester para encontrar una raíz común a las ecuaciones siguientes:

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 9 = 0$$
$$2x^2 + 5x + 8 = 0$$

9. ¿Cómo se vio llevado Cayley a introducir y desarrollar el concepto de matriz?
10. Mostrar que la multiplicación de las dos matrices siguientes no es conmutativa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Mostrar que la multiplicación de los dos bicuaterniones siguientes de Clifford no es conmutativa: $a = p + wq$, $b = r + ws$ donde p y q son cuaterniones reales y $w^2 = 1$.
12. Cayley y Sylvester son llamados a veces «gemelos invariantes». Explicar por qué y mostrar de qué manera estuvieron muy lejos de ser gemelos.

10. LA RENOVACION DE LA GEOMETRIA EN EL SIGLO XIX

INTRODUCCIÓN

La geometría parece haber sido, entre todas las ramas de las matemáticas, aquella cuya importancia ha variado más a través del tiempo. Tuvo su origen en el arte de la medición, y ya en la época griega tuvo el estatuto de una disciplina situada en la cúspide de las actividades matemáticas de esa época. Con Euclides se convirtió en una ciencia definitiva del espacio pero, a la caída del Imperio romano, la actividad del matemático se orientó hacia direcciones tales como el álgebra o la trigonometría, dejando así poco margen a esta ciencia ya abandonada. Durante la Edad Media y en la época del Renacimiento, reapareció tímidamente en las obras de este período, aunque una nueva faceta de la geometría se manifestó en los trabajos de los pintores, quienes tenían una necesidad perentoria de técnicas y reglas convencionales para representar configuraciones espaciales de líneas y de puntos en un plano.

A principios del siglo XVII, ocupa un lugar preponderante en la actividad matemática de la época, sobre todo gracias a los trabajos originales de Fermat y Descartes. Es también en este siglo cuando se elabora un estudio de las perspectivas, y cuando Desargues y Pascal encuentran un cierto número de teoremas fundamentales que permiten entonces establecer las bases de una geometría distintiva, la geometría proyectiva. Sin embargo, los trabajos de estos dos pioneros caerán en el olvido hasta el momento en que Monge y su escuela se dedican a la difícil tarea de revalorizar la geometría mediante aportaciones nuevas y llenas de promesas. Pero a comienzos del siglo XIX se establece la controversia entre los defensores de la utilización exclusiva de los métodos geométricos y los que recurren al álgebra y al análisis para tratar la geometría. De hecho, desde Descartes y Fermat, los métodos analíticos y algebraicos dominaron

casi enteramente el enfoque preconizado para el estudio de la geometría, y sólo algunos raros matemáticos permanecieron ligados a los métodos puramente geométricos, que seguían siendo, a sus ojos, los más elegantes y los más claros intuitivamente. Por el contrario, los métodos analíticos ofrecían, por sus características intrínsecas, técnicas generales y uniformes y enfoques heurísticos que conducían a resultados cuyo grado de generalidad parecía no tener límites, mientras que los de la geometría sintética estaban sobre todo centrados en el caso particular, en el estudio específico original de un problema dado, cuyos resultados difícilmente podían ser generalizados. Esta controversia entre los dos campos dio origen a un concurso establecido en 1813 por la Sociedad de Ciencias, Letras y Artes de Burdeos, la cual ofreció un premio para un ensayo que caracterizara la síntesis y el análisis matemático y determinara la influencia que cada uno de estos dos métodos había ejercido sobre el rigor, el progreso y la enseñanza de las ciencias exactas. El premio fue atribuido a Armand de Maizière, y la calma que siguió fue el preludio de la tormenta que se anunciaba para un futuro próximo.

¿Cuáles eran las razones invocadas por los partidarios de la geometría sintética, tratada por métodos de naturaleza esencialmente geométrica, contra el empleo abusivo, al menos a sus ojos, de esos métodos analíticos? En primer lugar, hay evidentemente una cuestión de gusto y de preferencia personal que está ligada esencialmente al aspecto subjetivo de las cosas. Un primer conjunto de razones se refería a la «liberación de la geometría de los jeroglíficos del análisis» (Carnot). La verdadera cuestión consistía, primordialmente, en saber si la geometría analítica era realmente geométrica, puesto que el álgebra constituía la esencia de esos métodos y de los resultados obtenidos, y su significación geométrica permanecía prácticamente oculta. Otra razón estaba justificada por la naturaleza incompleta de los métodos de análisis y el fundamento lógico inadecuado; también los geómetras ponían en duda la validez de las demostraciones analíticas y les atribuían sólo resultados más o menos orientativos.

Por otro lado, la argumentación de los geómetras reposaba sobre la naturaleza y el papel de la geometría como la verdadera ciencia del espacio. El método geométrico permitía demostraciones y conclusiones simples e intuitivamente evidentes, favorecía una comprensión más clara de las diferentes etapas transcurridas entre la

partida y la conclusión, y podía resolver problemas con una facilidad, una elegancia y una claridad que el método analítico no podía ofrecer. Se adelantaba también que ciertos problemas podían ser plenamente resueltos utilizando sólo métodos geométricos.

La influencia de la geometría descriptiva de Monge sobre su escuela y sus contemporáneos se tradujo esencialmente en una floración de trabajos consagrados en la mayor parte de los casos a la geometría proyectiva. La renovación de esta geometría comienza con los notables trabajos de Poncelet, que marcan la verdadera creación de la geometría proyectiva, estudio de las propiedades geométricas que se conservan por proyección central o perspectiva. La introducción del principio de dualidad y la utilización abundante de las transformaciones geométricas le llevaron al estudio de tipos variados de transformaciones. Los discípulos de Poncelet se esforzaron por crear una doctrina autónoma susceptible de derrotar a Descartes en el campo mismo de la geometría. Los trabajos de Poncelet y sus discípulos fueron difundidos y enriquecidos con resultados originales por Steiner y Chasles. Von Staudt se esforzará por paliar ciertas dificultades encontradas en la utilización de la geometría proyectiva e intentará reconstruir el conjunto de esta geometría, independientemente de toda noción métrica, con ayuda sólo de axiomas relativos a la posición o al orden de los elementos fundamentales.

Paralelamente al desarrollo de la geometría proyectiva, nacen las geometrías no euclídeas con Gauss, Bolyai, Lobachevski y Riemann y, después de su difusión, se emprenden ya interpretaciones de éstas mediante la elaboración de modelos concebidos con el objetivo de hacer válidas estas nuevas geometrías. Se asiste también a la renovación de la geometría analítica gracias a la extensión del concepto de coordenadas y a la obra notable de Plücker sobre el tema. El empleo de la teoría de formas algebraicas y de la de los invariantes hizo progresar el estudio de las curvas y de las superficies algebraicas, emprendido principalmente por Hesse, Cayley y Salmon. La geometría reglada y la geometría en n dimensiones conocen aplicaciones cada vez más numerosas en los diversos campos científicos. Finalmente, la geometría algebraica hace su aparición a partir de la renovación de los métodos de estudio de las curvas y superficies algebraicas, renovación ligada a la vez a la geometría sintética y analítica, al álgebra lineal y general y a la teoría de

funciones. En su célebre tesis, Riemann establece los fundamentos de la geometría diferencial moderna abordando el estudio de las propiedades de las variedades topológicas de un número arbitrario de dimensiones. Los trabajos de Grassmann, Beltrami y otros y la difusión de las geometrías no euclídeas marcarán una renovación de esta parte de la ciencia que evolucionó progresivamente hacia la geometría diferencial moderna. Finalmente, cabe decir que Riemann fundó verdaderamente la topología, y su desarrollo posterior estará influenciado por la teoría cantoriana de conjuntos, por la teoría de los números reales y por la teoría de funciones de variables reales.

RENOVACIÓN DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA

Algunas propiedades proyectivas fueron descubiertas mucho antes de que se identificara el grupo proyectivo. La más antigua de las propiedades invariantes y la más fundamental corresponde al producto en diagonal de cuatro puntos colineales. En la época del Renacimiento, los pintores y los arquitectos estaban interesados en descubrir las leyes que les permitieran un control adecuado de la construcción de proyecciones de objetos espaciales sobre un plano, con vistas a producir imágenes más realistas. De este modo se vieron llevados a buscar elementos de una teoría geométrica subyacente a la perspectiva. Más tarde, Desargues abrió el camino a la geometría proyectiva con un tratado muy original sobre las secciones cónicas cuyo tratamiento recurre a la idea de proyección. El tratado de Desargues no tuvo ninguna influencia sobre sus contemporáneos, y fue Gaspard Monge quien reintrodujo las consideraciones proyectivas en geometría gracias a su geometría descriptiva. Sus discípulos, inspirados en los trabajos y el talento pedagógico indiscutible de Monge, orientaron esta renovación de la geometría pura en una dirección privilegiada, la de la geometría proyectiva, como veremos en las páginas siguientes.

BRIANCHON Y DUPIN

Charles Julien Brianchon (1785-1864) y Charles Dupin (1784-1873) contribuyeron a desarrollar y enriquecer los resultados obtenidos

anteriormente en geometría pura y trataron numerosos problemas referentes a la teoría proyectiva de las cónicas. Dupin, alumno de Monge y diplomado de la Escuela Politécnica, nos dejó dos obras *Développements de géométrie pure* (Desarrollos de geometría pura) (1813) y *Applications de géométrie et de mécanique* (Aplicaciones de geometría y de mecánica) (1822), en las que pueden encontrarse nociones como la de la indicatriz que lleva su nombre, que da una primera aproximación de la forma de una superficie en un punto dado, un teorema sobre la intersección de superficies que forman un sistema triple ortogonal y la determinación de la superficie en la que todas las líneas de curvatura son circunferencias, etc. También enriqueció los resultados de Monge a propósito de las congruencias de líneas. Tanto Dupin como Brianchon hicieron aplicaciones de la geometría pura a problemas de ingeniería militar, al igual que Jean-François Servois, quien se interesó también por el álgebra y la representación geométrica en tres dimensiones de los números complejos. Pero el verdadero resultado importante para la geometría proyectiva que emerge de los trabajos de estos tres discípulos de Monge es el célebre teorema de Brianchon, demostrado por este último mientras era todavía estudiante en la Politécnica. En 1806, Brianchon demostró por polaridad la proposición correlativa del teorema del hexagrama de Pascal: si hay seis tangentes a una cónica que forman así un hexágono circunscrito, las tres rectas que unen vértices opuestos pasan por un único punto. Los teoremas de Pascal y Brianchon son fundamentales en el estudio proyectivo de las cónicas. Forman el primer par verdadero de «teoremas duales» en geometría, es decir, de teoremas que siguen siendo válidos en geometría plana si se intercambian las palabras punto y recta.

PONCELET

Jean-Victor Poncelet (1788-1867), nació en Metz el 1 de julio de 1788. Fue también discípulo de Monge en la Escuela Politécnica, y después en la Academia Militar de Metz, y se inspiró en los trabajos de geometría descriptiva de Monge y de geometría de posición de L. N.-M. Carnot, publicada en 1813. Se dice que la geometría descriptiva nació en Saratoff, y fue efectivamente en la prisión de Saratoff, en donde estuvo prisionero en 1813-1814, como conse-

cuencia de la campaña napoleónica de Rusia, en la que participó como oficial, donde Poncelet ocupó sus ocios meditando y, sin sus libros, llegó a reconstituir el conjunto de sus conocimientos ya adquiridos y a establecer las bases de una profunda reforma de la geometría. Volvió a Francia en el mes de septiembre de 1814 con varios manuscritos, pero sus funciones como ingeniero militar no le dejaron apenas tiempo libre para explorar más a fondo la riqueza de los nuevos métodos de la geometría. Por ello, la primera edición de su clásico *Traité des propriétés projectives des figures* (Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras) no apareció hasta 1822, aunque un esbozo de este tratado había sido presentado en 1820 a la Academia de Ciencias. Fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en 1831 como sucesor de Laplace, pero no aceptó el sillón hasta tres años más tarde debido, según parece, a motivos políticos. Pasó el resto de su vida al servicio del gobierno y murió el 23 de diciembre de 1867, después de haber creado verdaderamente la geometría proyectiva.

Las notas manuscritas de Poncelet traídas de Rusia contenían, entre otras cosas, aplicaciones de análisis y de geometría que constituyeron el fundamento principal del tratamiento de las propiedades proyectivas de las figuras. Se ha pretendido durante mucho tiempo que Poncelet había menospreciado todo lo ligado a la geometría cartesiana pero, por el contrario, estas notas comprenden un buen tratado de geometría analítica, de acuerdo con el espíritu de la época. Se puede incluso suponer que la geometría analítica sirvió de punto de partida para sus investigaciones sobre los principios característicos de la geometría sintética.

Poncelet creía firmemente en la potencia del análisis para generalizar los resultados obtenidos y, sin intentar disminuir esta potencia, concentró más bien sus esfuerzos en descubrir los rasgos característicos del método algebraico mediante el cual se llegaba a generalizar más fácilmente, y en buscar cómo se podrían utilizar métodos geométricos tan potentes como los del análisis. Partiendo del álgebra, Poncelet observó que su potencia se basaba esencialmente en la utilización de expresiones o «entes de razón», y en la reducción concomitante del razonamiento a «una operación puramente mecánica» que apuntala la atención y la memoria. Pero, ¿es el álgebra la única disciplina que utiliza «símbolos indeterminados»? Bien al contrario, afirma Poncelet, toda ciencia que recurre al uso

de tales signos puede reivindicar las mismas ventajas y, por consiguiente, dado que la geometría utiliza también símbolos abstractos, puede reclamar los mismos privilegios con tal de que se la libere de algunas dependencias que ponen trabas a su propia potencia. Se refiere aquí, entre otras cosas, a la dependencia del geómetra con respecto a la utilización de las figuras geométricas, a su dependencia con respecto a los límites que se impone en el momento en que extrae sus conclusiones, las cuales deben ser válidas sólo para los objetos de la demostración, y finalmente a su dependencia con respecto a la preocupación constante que manifiesta por encontrar demostraciones independientes, cuando una sola podría ser válida y aplicable a más de una situación geométrica. Poncelet considera que la fuente de la aparente debilidad de la geometría sintética consiste esencialmente en las dependencias mencionadas anteriormente y busca un remedio a ese problema. ¿Qué se debe hacer con la geometría para hacerla tan eficaz como el álgebra? Poncelet responde a esta cuestión de la manera siguiente: si fuera posible utilizar tan sólo el razonamiento implícito, separado de la figura actual, y si, además, estuviera permitido utilizar las consecuencias de tal razonamiento, esta situación no se produciría. La argumentación de Poncelet le conduce a un famoso «principio o ley de continuidad» que él enuncia así:

Consideremos una figura cualquiera en una posición general y, de alguna manera, indeterminada, entre todas las que puede tomar sin violar las leyes, las condiciones, las ligaduras que subsisten entre las diversas partes del sistema; supongamos que, de acuerdo con estos datos, se han encontrado una o varias relaciones o propiedades, ya sean métricas o descriptivas, que pertenecen a la figura, apoyándose en el razonamiento explícito ordinario, es decir, por este camino que, en ciertos casos, se considera como el único riguroso. ¿No es evidente que si, conservando estos mismos datos, se hace variar la figura primitiva de manera insensible, o se imprime a algunas partes de esta figura un movimiento continuo cualquiera, no es evidente que las relaciones y propiedades encontradas para el primer sistema seguirán siendo aplicables a los estados sucesivos de ese sistema, con tal de que se tengan en cuenta, sin embargo, las modificaciones particulares que hubieran podido aparecer, como cuando ciertas magnitudes desaparecen, cambian de sentido o de signo, etc., modificaciones que serán siempre fáciles de reconocer *a priori* y mediante reglas seguras?

Poncelet considera que esta ley de continuidad le permite percibir toda figura actual de la geometría no como el objeto de estudio de la geometría, sino más bien como un símbolo complejo compuesto de elementos sobre los que se debe actuar de una cierta manera sin que se le exija una interpretación en términos de entes visuales. Poncelet sabía que otros geómetras antes que él, Desargues, Carnot y Monge, habían utilizado este principio de casos específicos; por otra parte, Leibniz había formulado un principio análogo y, mucho antes que este último, Kepler había utilizado un principio de analogía en el estudio de las cónicas que podría ser el antepasado del principio de Poncelet. Además, Poncelet consideraba ese principio como un axioma, cuya evidencia es manifiesta, indiscutible, pero sabía que su utilización poco reflexiva podía conducir a errores, y por consiguiente debía ser aplicado, si no como medio de demostración, al menos como medio de descubrimiento y de invención.

Poncelet demuestra la exactitud de su principio sirviéndose del teorema de la igualdad de los productos de segmentos de cuerdas que se interceptan en un círculo. Señala que si el punto de intersección se encuentra en el exterior del círculo, el teorema sigue siendo válido sobre la igualdad de los productos de la secantes y sus segmentos externos. Además, si una de las secantes se convierte en tangente, ésta y su segmento externo se hacen iguales, y su producto sigue siendo igual al producto de otra secante y de su segmento externo. La aplicación del principio de continuidad no sólo le lleva a descubrir las propiedades de los elementos del infinito sino que además lo extiende a puntos imaginarios, a configuraciones imaginarias que se definen como sigue:

> Se podría definir con el adjetivo imaginario a todo objeto que, por absoluto y real que fuera en una cierta figura, se hubiera convertido en enteramente imposible o no construible en la figura correlativa, la que se obtiene de la primera mediante el movimiento continuo y progresivo de algunas partes, sin violar las primitivas del sistema.

Con respecto a estos elementos imaginarios, Poncelet los compara de alguna manera con las cantidades algebraicas imaginarias, y subraya que sus antecesores habían restringido la aplicación de este principio para no salirse de los límites de las figuras reales, de las figuras actuales. Pero, prosigue, ¿es razonable dejar fuera de la

geometría ideas universalmente admitidas en álgebra?; por otra parte, ¿no hemos admitido ya en geometría lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, aunque su existencia sea puramente hipotética?

En suma, el principio de continuidad le permite erigir un nuevo dominio de entes geométricos, definido implícitamente mediante un nuevo sistema formado por símbolos, constituido a partir de un sistema geométrico ya construido e interpretado. De la misma manera que los números imaginarios en álgebra no constituyen una especie de números homogéneos con respecto a los números habituales del álgebra, los «puntos imaginarios» engendrados mediante el principio de continuidad son símbolos interpretados para algo, cuyo campo de designación está limitado solamente por las reglas de combinación que los especifican.

A pesar de los esfuerzos desplegados por Poncelet para defender su principio, los miembros de la Academia de Ciencias, y en particular Cauchy, lo criticaron, no atribuyéndole más que un valor heurístico. El movimiento de protesta se fue ampliando, y pronto un buen número de matemáticos se manifestaron a favor o en contra de la aplicación del principio. Evidentemente, Poncelet aplicó con audacia su principio para el descubrimiento de un número imponente de teoremas y resultados originales, pero no pudo nunca demostrarlo de forma satisfactoria para sus adversarios. Fue también el campeón indiscutible y el principal defensor de la geometría sintética en Francia.

Poncelet concibió el problema general de buscar todas las propiedades de las figuras geométricas comunes a todas las secciones de cualquier proyección de una figura, es decir, que permanecen invariantes por proyección y seccionamiento. Introdujo la noción más general de proyección central (la proyección a partir de un punto) y consideró las transformaciones proyectivas de una figura espacial a otra en una forma puramente geométrica.

Utilizó su principio de continuidad para descubrir las propiedades de los elementos del infinito (o elementos llamados imaginarios), entre las que se pueden subrayar: las líneas paralelas concurren en un punto único en el infinito; todos los puntos situados en el infinito en un plano pueden considerarse idealmente como distribuidos sobre una línea recta única, situada también en el infinito sobre ese plano; todos los puntos del infinito del espacio puede conside-

rarse que pertenecen a un único y mismo plano, de situación necesariamente indeterminada. Estas tres proposiciones corresponden respectivamente a las definiciones del punto infinito, de la recta y del plano infinito. Poncelet introdujo también, por primera vez, la noción de puntos cíclicos en el infinito, puntos imaginarios en el infinito, comunes a todos los círculos de un plano, además de introducir la de la umbilical, cónica imaginaria en el infinito común a todas las esferas. Se le debe también la demostración de que dos cónicas que no tienen intersección común poseen dos cuerdas imaginarias comunes, y que dos cónicas se interceptan en cuatro puntos, reales o imaginarios. Gracias a las investigaciones de Poncelet sobre los elementos en el infinito, éstos entraron universalmente en la geometría moderna y condujeron a las nociones de punto, recta y plano proyectivos.

Poncelet utilizó también una idea fundamental en geometría proyectiva, la de las figuras homológicas. Dos figuras son homólogas si los puntos, las rectas y los planos se corresponden entre sí, si los puntos correspondientes están alineados con un punto fijo, el centro homológico, y si las rectas correspondientes concurren dos a dos sobre un plano único, el plano de homología. Además de mostrar la analogía entre las figuras homotéticas y las figuras homológicas, en la que las figuras homotéticas se presentan como casos particulares de las figuras homológicas, estudió las propiedades de figuras cada vez más complicadas.

Reconoció toda la potencia del método de las polares recíprocas; las nociones de polo y polar con respecto a una cónica estudiadas por sus antecesores, sobre todo Desargues, Euler, Legendre y Monge, fueron recogidas por Poncelet, quien dio una formulación general de la transformación por polares recíprocas o polaridad, y la generalizó a continuación con el nombre de correlación. La simetría entre punto y recta o plano que aparece entonces tomó una forma más general en el principio de dualidad introducido por Poncelet y reconsiderado y precisado en sus investigaciones posteriores, así como en las de Gergonne, Möbius, Chasles y Plücker.

En el tema de la geometría sintética euclídea, Poncelet mostró en su tratado de 1822 que todas las construcciones permitidas con sólo la regla y el compás (salvo los arcos circulares) son posibles con sólo la regla con tal que sean dados un círculo y su centro. En 1820-1821, Poncelet publicó junto con Brianchon una memoria

titulada *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère* (Investigaciones sobre la determinación de una hipérbola equilátera), en la que se encuentra una demostración elemental del círculo de nueve puntos, que lleva actualmente el nombre del matemático alemán Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834). El círculo de Feuerbach debe su nombre no a la prioridad de publicación (Feuerbach publicó el teorema correspondiente en 1822) sino sobre todo a ciertas propiedades que llegó a extraer del teorema. Feuerbach también sugirió un nuevo sistema de coordenadas llamadas tetraédricas, llamado actualmente sistema de coordenadas homogéneas, sirviéndose de métodos de geometría analítica. Introdujo también las distinciones entre propiedades proyectivas y propiedades métricas de las figuras, y afirmó en su tratado, que se hizo clásico, que las propiedades proyectivas eran las más importantes. Finalmente, se le debe la utilización, por primera vez, de las transformaciones birracionales, para situaciones particulares sólo.

El magnífico esfuerzo realizado por Poncelet para descubrir la primacía de los métodos sintéticos en geometría pura fue proseguido por varios discípulos, en particular por Chasles quien, defendiendo siempre los puntos de vista de Poncelet, hizo progresar verdaderamente la doctrina proyectiva.

CHASLES

Michel Chasles (1793-1880), nació en Epernon en 1793; fue alumno en la Escuela Politécnica y tomó parte, en 1814, en la defensa de París. Abandonó la ingeniería militar para hacerse agente de cambio, pero volvió a la ciencia como consecuencia de una quiebra que le obligó a huir a Bélgica. Cuando volvió a Francia fue nombrado profesor de geodesia y de mecánica aplicada en la Escuela Politécnica en 1841, y más tarde llegó a ser titular de una cátedra de geometría superior, creada en la Sorbona especialmente para él en 1846. Además de numerosas memorias, se le debe su célebre *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Resumen histórico sobre el origen y el desarrollo de los métodos en geometría), cuadro notable de la historia de la geometría, así como estudios sobre los principios de la geometría proyecti-

va. Contribuyó de manera brillante al auge y la difusión de la geometría proyectiva.

En su *Resumen* de 1837, Chasles defendió los puntos de vista de Poncelet sobre la geometría pura, y sus ideas ilustran algunas imprecisiones, confusiones e incertidumbres corrientes en esa época. Chasles consideraba que el principio de continuidad no había sido establecido rigurosamente y podía ser considerado sólo como una regla inductiva muy apropiada. Pensaba también que la justificación de las demostraciones geométricas utilizadas ampliamente por la escuela de Monge mediante este principio no era la única posible, porque, según decía, se pueden elaborar también argumentos basados en un estudio de los procedimientos generales del análisis. Distinguió también entre dos especies de configuraciones geométricas sujetas a condiciones generales: por un lado, algunas partes o posiciones de la figura son reales y palpables, y, por otro, estas partes ya no aparecen y, con respecto a la primera situación, se han hecho imaginarias, incluso si las condiciones generales de construcción de la figura han permanecido inalteradas. Además, los teoremas enunciados se refieren a las partes permanentes de la figura, partes requeridas para la construcción general que son, en los dos casos, reales y palpables. Entonces, los teoremas son independientes de las partes contingentes de la figura. Por ejemplo, una sección de un cono puede ser una hipérbola y posee entonces asíntotas, porque dependen de la naturaleza de la sección específica. De la misma manera, no se deben extrapolar los resultados obtenidos para una parábola al caso de una hipérbola, porque el plano de corte no tiene una posición general (posición permanente) en el caso de la parábola. Por consiguiente, si un teorema que se refiere a partes o posiciones permanentes es establecido para un tipo de configuración, cualquiera que sea, este teorema es válido igualmente para todas las demás configuraciones. Es la base de su principio de «relaciones contingentes» o principio de continuidad.

Chasles no estaba enteramente satisfecho con las razones que justificaban la aplicación de su principio y esperaba poder encontrar un fundamento más metafísico, ligado estrechamente a la noción de homogeneidad. Porque, según Chasles, la idea de los imaginarios está vacía de sentido si no va siempre acompañada de la idea de la existencia real del objeto mismo; se puede llegar incluso a excluirla del razonamiento. En efecto, prosigue, basta añadir a una primera

figura dada, para la cual se debe demostrar una cierta propiedad, una segunda figura que posea las mismas características generales que la primera, pero que esté construida de manera que las partes contingentes o accidentales que son imaginarias en la primera sean reales en la segunda. El principio de continuidad fue aceptado en el siglo XIX como un axioma intuitivamente claro y ampliamente utilizado, pero que no parecía justificar una demostración rigurosa.

Las ideas de Chasles sobre la geometría proyectiva sintética están contenidas en su *Traité de géométrie supérieure* (Tratado de geometría superior), publicado en 1852, y en otra obra aparecida en 1865 con el título de *Traité des sections coniques* (Tratado de las secciones cónicas). Los trabajos de Chasles son en buena parte semejantes a los del suizo Steiner, aunque Chasles no sabía el alemán. A partir de su tentativa por comprender los *Porismas* de Euclides —publicó una obra titulada *Les trois livres de porismes d'Euclide* (Los tres libros de porismas de Euclides) en 1860, obra que se perdió—, Chasles introdujo el principio de los signos, utilizado anteriormente por Pappus, La Hire, Steiner, y Möbius, e hizo un uso sistemático de él, obteniendo resultados de los que uno se hizo célebre: cuatro puntos fijos de una cónica y un quinto punto cualquiera de la cónica determinan cuatro segmentos con la misma razón anarmónica. Su obra está fundada también sobre la noción de homografía, que describe una transformación de un plano en sí mismo o en otro plano en el que los puntos se transforman en puntos, y las líneas en líneas (figuras homólogas). La transformación que transforma puntos en líneas y líneas en puntos se llama una «correlación» y Chasles demostrará que esta transformación encierra como casos particulares los desplazamientos, las semejanzas y las afinidades.

En 1864, Chasles propuso un método llamado «de las características» que permitía tratar los diferentes problemas de determinación de cónicas y de curvas algebraicas y establecer, de una manera puramente geométrica, diversas propiedades de los sistemas de cónicas. Es también el autor de dos nuevos sistemas de coordenadas que aplican el álgebra a la geometría, y que sirven el uno para los puntos del espacio y el otro para los planos.

GERGONNE

Joseph-Diez Gergonne (1771-1859) nació en Nancy en 1771; fue durante mucho tiempo profesor en Nîmes y en Montpellier, y después rector en la Academia de esta ciudad. Después de haber fundado sus *Annales* en 1810, Gergonne aprovechó todas las ocasiones para promover y difundir la geometría analítica y, en particular, insistir en la potencia y facilidad que ofrecía la geometría de coordenadas. Al principio era amigo de Poncelet, pero pronto se convirtieron en adversarios en la controversia entre los analistas, como Gergonne, y los defensores de los métodos sintéticos, como Poncelet y Chasles. A partir de 1818 los dos amigos comenzaron a defender sus puntos de vista respectivos y a publicar textos en los *Annales,* pero la controversia sobre la prioridad del principio de dualidad estalló en 1826, y desde entonces cambió completamente la rivalidad amistosa entre los dos hombres, que se convirtieron en defensores a ultranza de sus respectivas concepciones y en enemigos temibles, cuyos mutuos ataques tuvieron gran repercusión en aquella época. Gergonne acusó incluso a Poncelet de plagio, y esta cuestión no es fácil de clarificar, incluso en la actualidad.

Hemos visto cómo el teorema del hexagrama de Pascal y el teorema de Brianchon forman un par de teoremas duales, en virtud de la transformación que hace corresponder al punto la recta y a la recta el punto. El mismo Brianchon dudaba de este principio, mientras que Poncelet lo explicaba basándose en la relación entre los polos y las polares. Pero hacía falta que interviniera una cónica y Gergonne, por su lado, insistía en la parte general del principio, que podía ser aplicado a todas las proposiciones y teoremas, salvo aquellas o aquellos que hicieran intervenir propiedades métricas. Fue entonces cuando introdujo el concepto de «dualidad» para designar la relación entre el teorema original y el teorema correlativo. Muy convencido de la veracidad de la parte general de este principio, publicó una serie de pares de teoremas duales en los *Annales,* e introdujo innovaciones al utilizar el sistema de las dobles columnas en las que escribía enfrente de cada teorema la proposición correlativa. He aquí, a título de ejemplo, la presentación de Gergonne del teorema del triángulo de Desargues y su dual (el dual de un triángulo es también un triángulo) en el plano:

Teorema de Desargues

Si dos triángulos son tales que las rectas que unen los vértices correspondientes pasan por un punto 0, entonces los puntos de intersección de los lados correspondientes están situados en una línea recta.

Teorema correlativo (dual)

Si dos triángulos son tales que los puntos que son puntos de unión de los lados correspondientes se encuentran sobre una línea recta 0, entonces los vértices correspondientes pueden unirse mediante tres rectas que pasan por un punto.

Gergonne es también el autor de una construcción, que lleva su nombre, del problema de Apolonio (construir una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas), y de varias demostraciones analíticas de problemas clásicos de geometría elemental. En su *Essai sur l'expression analytique des courbes indépendamment de leur situation sur un plan* (Ensayo sobre la expresión analítica de las curvas independientemente de su situación sobre un plano) (1813-1814), establece que el número posible de sistemas de coordenadas es infinito y propone un nuevo sistema que puede ser clasificado como un sistema de coordenadas intrínsecas o naturales.

STEINER

Jacob Steiner (1796-1863) era hijo de un campesino suizo, y no aprendió a leer y a escribir hasta los catorce años. Steiner frecuentó la escuela de Yverdon, y después las universidades de Heidelberg y Berlín. Después de acabar sus estudios, ejerció como profesor en la escuela de Pestalozzi, en la que se preconizaba una especie de individualización de la enseñanza mediante capacidades motrices y lecciones dirigidas que reforzaran la motivación de los niños recurriendo a los instintos e intereses naturales. El niño llegaba así a descubrir las matemáticas con un profesor que le dirigía, según el método socrático. Se dice que a Steiner le impresionó mucho la importancia que se concedía a la formación de la intuición geométrica en este tipo de enseñanza. En 1832, publicó una obra de geometría *Systematische Entwicklung des Abhängigkeit geometrischen* (Desarrollo sistemático de la interdependencia geométrica), que le proporcionó su reputación y le valió, por intermedio de Jacobi y Crelle según parece, una cátedra en Berlín, aunque era un autodidacto. Ocupó

esta cátedra hasta su jubilación, y luego volvió a Suiza. Murió en Berna en 1863, a los sesenta y siete años, dejando una obra que le valió el ser considerado como uno de los más grandes geómetras desde Apolonio.

El desarrollo de la geometría proyectiva sintética fue prolongado y enriquecido por Steiner, que sentía tal preferencia por los métodos sintéticos que llegó a detestar al máximo los métodos del análisis y amenazó con dejar de publicar sus memorias en la revista de Crelle si éste continuaba publicando los trabajos analíticos de Plücker. Como Poncelet y Chasles, mostró la potencia del principio de dualidad y declaró en su obra de geometría «que la controversia sobre el principio de dualidad y sobre la teoría de los polos y de las polares está ahora resuelta sin ambigüedad en la presente obra». Steiner consideraba que las relaciones duales en geometría aparecen simultáneamente con la introducción de los elementos fundamentales, mientras que la teoría de los polos y de las polares hace su aparición sólo de una manera subsiguiente, como una consecuencia de ciertas relaciones entre los elementos fundamentales. El principio de dualidad de Gergonne tiene prioridad sobre el de la teoría de los polos y de las polares.

Elaboró un principio nuevo, que consistía en servirse de los conceptos proyectivos para construir estructuras cada vez más complicadas a partir de estructuras simples tales como punto, línea, haz de líneas, plano y haz de planos. Por ejemplo, construyó las cónicas mediante formas simples, haces de líneas. Como instrumento fundamental se sirvió de la razón anarmónica e ignoró casi enteramente los «imaginarios», a los que llamaba «las sombras de la geometría». Mediante su nuevo método sistematizó los métodos de generación proyectiva de figuras ya empleados por sus antecesores. En su célèbre obra de geometría, Steiner definió en el espacio proyectivo seis formas fundamentales clasificadas en tres especies, y demostró que se puede pasar de una forma a otra de la misma especie siempre que se cumpla la condición de proyectividad. En el tema de las cónicas, aplicó la dualidad y la definición misma de una cónica, y elaboró un importante estudio sobre la dualidad aplicada a las cónicas. En particular, sirviéndose de la noción de dual de una cónica de puntos pueden obtenerse pares de teoremas duales. Así, partiendo del teorema de Pascal se obtiene su dual, el teorema de Brianchon.

Steiner se distinguió también mucho en otros aspectos de la

geometría. Llegó a ofrecer algunas demostraciones, mediante un método sintético, de un problema célebre del cálculo de variaciones, el teorema isoperimétrico: de todas las figuras planas que tienen el mismo perímetro, es el círculo la que encierra la mayor superficie, aunque ello suponía que existía una figura de área máxima, lo cual no demostraba. A principios del siglo XX, Carathéodory y Study hicieron más rigurosas las demostraciones de Steiner con respecto a este problema. Steiner demostró también un teorema que enuncia que, de todos los triángulos que tienen un perímetro dado, es el equilátero el que tiene el área máxima. Steiner demostró de una manera más elegante la proposición de Poncelet sobre las construcciones permitidas con la regla y el compás.

Steiner emprendió igualmente investigaciones sobre la construcción de curvas y superficies de grado superior y sobre las transformaciones birracionales.

Hacia 1850, la geometría proyectiva era claramente una doctrina autónoma con respecto a la geometría euclídea, pero las relaciones lógicas entre las dos geometrías no eran todavía bien conocidas. En particular, se utilizaba ampliamente la geometría proyectiva del concepto de longitud, sobre todo en la razón anarmónica, cuando ese concepto no es invariante frente a una transformación proyectiva. El matemático Von Staudt subsanará estas carencias lógicas observadas en la geometría con sus trabajos sobre los fundamentos mismos de la geometría.

VON STAUDT

Karl Georg Christian Von Staudt (1798-1867), sucesor de Steiner, fue profesor en Erlangen y se interesó por los fundamentos de la geometría. Está considerado de alguna manera como el fundador de la geometría de posición pura, una geometría enteramente libre de las relaciones métricas.

La relación proyectiva entre las formas fundamentales en una dimensión constituía la base de la geometría de Steiner, y Von Staudt intentó desarrollar esta relación de una manera puramente descriptiva, independiente del concepto de distancia. Además, los elementos imaginarios en geometría fueron ampliamente utilizados antes de Von Staudt, pero no se sabía demasiado bien lo que eran, aparte de

ser elementos que no eran reales. Staudt intentó definirlos apropiadamente como elementos esenciales de la geometría proyectiva.

Sus ideas fundamentales sobre la geometría se encuentran en dos grandes obras, *Geometrie der Lage* (Geometría de la posición) (1847), en la que se limita al campo real, y *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Consideraciones sobre la geometría de la posición) (1856-1860).

Staudt introdujo en su teoría de los «jets» lo análogo a la longitud (distancia) sobre una base puramente proyectiva partiendo de tres puntos arbitrarios sobre una línea 0, 1, ∞, y por medio de una construcción geométrica designa como un «jet» un símbolo, un punto cualquiera *M*. Ilustremos este tipo de construcción mediante un ejemplo:

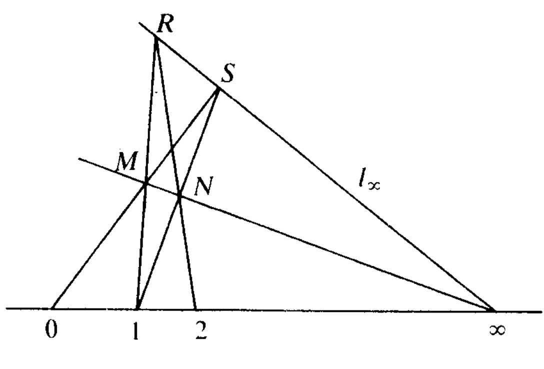


FIGURA 10.1

Partimos de los tres puntos arbitrarios 0, 1 e ∞, y l_∞ indica la línea del infinito que comprende a ∞. Desde *M*, un punto cualquiera, tracemos una «paralela» a la línea 01 que pasa por *M* y que encuentra en el infinito a la recta 01 prolongada: es la línea M_∞. Desde 0, unamos *M* con *S*, situado en l_∞. Por 1, tracemos una «paralela» a 0*M* que encuentra a l_∞ en *S*; la línea 1*S* determina *N*. Tracemos a continuación 1*M* y prolonguémosla hasta l_∞ en *R*. La línea que pasa por *N* «paralela» a 1*M* es *RN* que, prolongada, encuentra a 01 en 2. Así, a cualquier punto de la línea 01∞ se le puede asignar una coordenada racional mediante una construcción geométrica apropiada. Para las

coordenadas irracionales, se debe añadir un axioma de continuidad que no estaba suficientemente bien comprendido en la época de Von Staudt.

Con su teoría, llegaba a eliminar el concepto de longitud de la geometría proyectiva, y las operaciones habituales de la aritmética se traducían en construcciones geométricas que operaban sobre las coordenadas, respetando las leyes de la aritmética. En su primer tratado, Von Staudt aborda el problema de la proyectividad, define la razón anarmónica, las proyectividades y las cónicas, etc. Por ejemplo, define la razón anarmónica de cuatro puntos cuyas coordenadas son *a, b, c, d,* así:

$$\frac{a-c}{a-d} \Big/ \frac{b-c}{b-d}.$$

Constituye conjuntos armónicos de puntos a partir de los cuales puede dar la definición fundamental de que dos haces de puntos están ligados proyectivamente cuando una correspondencia biunívoca establecida entre los elementos conduce a hacer corresponder un conjunto armónico a otro conjunto armónico. Construye así una parte importante de la geometría proyectiva clásica. En su segunda obra, Von Staudt define los elementos imaginarios como elementos dobles de involuciones elípticas y muestra que satisfacen los axiomas fundamentales.

La obra de este geómetra reveló la geometría proyectiva como un tema independiente del concepto de distancia, pero también fue objeto de análisis críticos, principalmente a causa de la ausencia del postulado de las paralelas de Euclides y de las imprecisiones observadas en la formulación del axioma de continuidad. Entre 1870 y 1874, Felix Klein aportará complementos importantes a los trabajos fundamentales, sumamente originales, del gran sucesor de Steiner.

Fuera de algunas ramas especiales, como la geometría enumerativa (determinación del número de soluciones en un problema de construcción geométrica), y la teoría de transformaciones (transformaciones homográficas, circulares, cuadráticas, birracionales de orden cualquiera, etc.), la geometría sintética no conocerá más desarrollos espectaculares a lo largo de la segunda mitad del siglo XIX. Los esfuerzos de los matemáticos se dirigirán esencialmente hacia la revisión de sus principios y de su estructura.

LA RENOVACIÓN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Frente al magnífico auge de la geometría sintética, la geometría analítica, utilizando los progresos del álgebra lineal, edificó una teoría rival de los métodos uniformes que reposaba en principios analíticos sólidos. Mientras que algunos matemáticos intentaron mantener una estrecha colaboración entre los métodos sintéticos y los analíticos, otros intentaron más bien demostrar la preeminencia de este último punto de vista. Hemos visto ya la rivalidad que enfrentó a Gergonne y Poncelet en el estudio de la geometría proyectiva; nos proponemos ahora esbozar el desarrollo de los métodos analíticos que no sólo renovaron el campo de la geometría analítica, sino que sirvieron también para hacer progresar la geometría proyectiva, la geometría reglada, etc.

LOS PREDECESORES DE PLÜCKER

Bajo la influencia de Monge, a comienzos del siglo XIX numerosos matemáticos franceses prosiguieron la renovación de los métodos y del contenido de la geometría analítica. A través de la obra de los discípulos de Monge, la geometría analítica conoce el comienzo de una brillante expansión; y los principales representantes de esta preponderante escuela francesa son Brianchon, Dupin, Gergonne, Livet, Lamé, Bobillier, etc. Numerosas memorias publicadas por Hachette, Cauchy y discípulos de Monge tratan de los cambios de ejes de coordenadas, las propiedades de las curvas y superficies de segundo grado y los métodos generales de la geometría analítica.

LAMÉ Y BOBILLIER

Gabriel Lamé (1795-1870), matemático e ingeniero, se dedicó sobre todo a investigar la propagación del calor y fue el primero en introducir el uso de sistemas de coordenadas curvilíneas para tratar diversos tipos de ecuaciones. Dio su nombre a una ecuación diferencial, obtenida al separar la ecuación de Laplace en coordenadas elipsoidales (Lamé utilizaba el término elípticas) y las soluciones de esta última ecuación se llaman las «funciones de Lamé». Se interesó

también por las investigaciones sobre invariantes diferenciales mediante el estudio de las transformaciones de un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales en tres dimensiones en otros sistemas. Estableció igualmente las bases de la estática gráfica en una memoria publicada en 1826.

En una obra titulada *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* (Examen de los diferentes métodos utilizados para resolver los problemas de geometría) (1818), aporta dos contibuciones importantes a la geometría analítica. La primera consiste en la costumbre de representar enteramente las ecuaciones por letras simples, de tal manera que un lugar geométrico puede, por ejemplo, ser representado por $E = 0$ ó $E' = 0$. Su segunda contribución importante es una observación formulada a propósito de la dificultad encontrada en los problemas de geometría:

> Intentaré eliminar esta dificultad apoyándome en el principio evidente de que si se combinan las ecuaciones de dos lugares geométricos de una forma cualquiera, la ecuación resultante expresa un tercer lugar geométrico en el cual se encuentra la intersección de los dos primeros.

Lamé y los que le siguieron se limitaron a aplicar este principio, que lleva su nombre, en el caso en que la combinación es lineal; es, por otra parte, el caso en el que el principio se revela muy útil. En particular, si $E = 0$ y $E' = 0$ son dos lugares geométricos del mismo grado, si se combinan los dos lugares mediante parámetros o «multiplicadores» de la manera siguiente:

$$mE + m'E' = 0$$

el resultado obtenido es una curva o una superficie del mismo grado que pasa por las intersecciones de los dos lugares E y E'. Era el comienzo del estudio sistemático de las familias de curvas y superficies en la geometría de coordenadas. Se encuentra también en la obra de Lamé, por vez primera, el estudio de las curvas y superficies representadas en coordenadas cartesianas mediante las ecuaciones:

$$\frac{x^\alpha}{a^\alpha} + \frac{y^\alpha}{b^\alpha} = 1, \frac{x^\alpha}{a^\alpha} + \frac{y^\alpha}{b^\alpha} + \frac{z^\alpha}{c^\alpha} = 1$$

donde α es un número racional cualquiera (si $\alpha = 1$, se obtiene, respectivamente, una recta y un plano).

Etienne Bobillier (1797-1832), antiguo alumno de la Escuela Politécnica, reanudó las investigaciones de Lamé donde éste las había dejado y nos legó nuevos e importantes perfeccionamientos de la geometría analítica.

En su memoria titulada *Essai sur un nouveau mode de recherches des propriétés de l'étendue* (Ensayo sobre un nuevo modo de investigación de las propiedades de lo extenso), publicada en los *Annales de Mathématiques* en 1828, puede encontrarse claramente expuesto y aplicado por primera vez el «método de la notación abreviada». La representación en coordenadas de los tres lados de un triángulo situado en el plano viene dada de la manera siguiente por Bobillier:

$$A = 0, \; B = 0, \; C = 0$$

quien muestra cómo se pueden representar analíticamente en función de A, B y C todas las demás rectas del plano considerado. Por ejemplo, las rectas del plano pueden escribirse en la forma

$$aA + bB + cC = 0$$

donde los parámetros a, b y c sirven para determinar cada recta específica. De la misma manera, la forma

$$aBC + bCA + CAB = 0$$

representa la ecuación de la cónica general circunscrita al triángulo ABC, y para valores específicos de las razones a, b, c, obtiene

$$bA + aB = 0$$

que es una recta que pasa por el vértice de $A = B = 0$, tangente en ese punto; y las tres rectas tangentes a la cónica en los vértices del triángulo inscrito considerado

$$bA + aB = 0, \; bC + cB = 0 \text{ y } aC + cA = 0$$

forman un triángulo circunscrito a la cónica general. Además, las rectas linealmente dependientes

$$bA - aB = 0, \; cB - bC = 0, \; aC - cA = 0$$

unen los vértices del triángulo inscrito a los vértices correspondientes del triángulo circunscrito. Provisto de sus fórmulas, Bobillier concluye que, por ejemplo, en el caso de un triángulo inscrito a una cónica, las tangentes a la curva en los vértices del triángulo cortan a

los lados opuestos en tres puntos que se encuentran en una misma recta. En efecto, la ecuación general de una cónica inscrita en el triángulo ABC es

$$a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - 2bcBC - 2caCA - 2abAB = 0$$

las ecuaciones de los lados del triángulo inscrito a esta cónica son

$$bB + cC - aA = 0$$

$$cC + aA - bB = 0$$

$$aA + bB - cC = 0$$

y la intersección de los lados correspondientes de los dos triángulos se encuentran sobre la recta

$$aA + bB + cC = 0$$

De una manera completamente análoga, Bobillier extiende su estudio al espacio y muestra, para cualquier tetraedro $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, que si está inscrito en una superficie de segundo orden, los planos tangentes a la superficie en los vértices cortan las caras opuestas a lo largo de cuatro rectas que son generatrices de un mismo hiperboloide. A partir de sus fórmulas, en otra memoria titulada *Démonstrations nouvelles de quelques propriétés des lignes du second ordre* (Demostraciones nuevas de algunas propiedades de las líneas de segundo orden) (1828) demuestra, utilizando sus métodos, los teoremas de Pascal y Brianchon así como un gran número de proposiciones relativas sobre las propiedades de las cónicas, en particular la de Sturm sobre los haces de cónicas y su correlativa.

Bobillier parece haber sido el primero en hacer un estudio de la recta y de la cónica con referencia a un triángulo. Las cantidades a, b y c pueden considerarse como coordenadas, pero en sus trabajos no forman un verdadero sistema de coordenadas, aunque estén reducidas implícitamente a coordenadas homogéneas, como lo veremos con Möbius.

MÖBIUS

Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), astrónomo y matemático alemán, fue profesor de astronomía y director del observatorio de Leipzig. Su profesión de astrónomo no le impidió consagrar mucho

tiempo a las matemáticas, y sus contribuciones en este campo fueron notables y originales. Se hizo célebre en matemáticas sobre todo por sus investigaciones sobre la naturaleza y las propiedades topológicas de las figuras, y su nombre ha quedado asociado a la célebre cinta que no tiene derecho ni revés sino una sola cara. Partiendo de concepciones extrañas a la geometría pura, contribuyó también, de una forma original, a la geometría analítica y proyectiva con la introducción de las coordenadas homogéneas, aunque no tomó parte activa en la controversia entre los geómetras a propósito de la primacía de los métodos sintéticos sobre los métodos analíticos.

La obra que nos interesa aquí tiene por título *Der barycentrische Calcul* (El cálculo baricéntrico), publicada en Leipzig en 1827, en la que Möbius se sirve de la noción de centro de gravedad para elaborar su sistema de coordenadas homogéneas: a partir de dos puntos cualesquiera, un punto arbitrario de la recta que contiene esos dos puntos puede ser considerado como su centro de gravedad, con tal de que se atribuya a los puntos dados pesos convenientes, cuya razón esté determinada de manera única. Por ejemplo, las coordenadas de un punto P con respecto a un triángulo en el plano que contiene ese punto están constituidas por tres números proporcionales a pesos escogidos de manera conveniente para que, si están situados en los vértices del triángulo, el punto dado P sea entonces el centro de gravedad del sistema. Las coordenadas baricéntricas del centroide del triángulo ABC con los lados a, b, c, son (1, 1, 1) ó, más en general, todo triplete múltiplo de (1, 1, 1). Si el punto P está en el exterior del triángulo, entonces una o dos de las coordenadas será negativa. En el sistema de Möbius, las coordenadas de un punto no son únicas, pues lo son sólo las razones de los pesos o de las coordenadas.

De manera análoga se pueden individualizar los puntos del espacio cuando se tienen cuatro, y por ello las coordenadas de un punto específico son en total cuatro. La representación de las ecuaciones de las curvas y de las superficies en ese sistema de coordenadas se dice que es homogénea, es decir, las ecuaciones son homogéneas porque todos los términos tienen el mismo grado. Por ejemplo, si x, y, z son los «pesos» o coordenadas de un punto en el plano, la ecuación de la recta será de la forma

$$ax + by + cz = 0$$

mientras que la de una cónica será

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0.$$

Las figuras cuyas propiedades están representadas por la misma ecuación no son, simplemente, «semejantes», sino que están ligadas proyectivamente una a la otra. De esa manera Möbius pasó a desarrollar la teoría de la «colineación» o proyectividad mediante el estudio de las transformaciones de un plano o de un espacio a otro, de las cuales la más general es la que transforma líneas en otras líneas (colineación o proyectividad). Demostró, en particular, que toda colineación constituye una transformación proyectiva además de representar analíticamente las transformaciones. También a él se deben las determinaciones precisas sobre los signos de las figuras (línea, área y volumen), la razón anarmónica de cuatro líneas de un haz en términos de los senos de los ángulos en el vértice de un punto dado, etc.

El cálculo baricéntrico de Möbius fue sin duda una obra sumamente original y particularmente significativa, pero la utilización de neologismos y de una simbólica completamente nueva redujo su impacto. Además, aunque Möbius se sirviera de su método para determinar la condición analítica necesaria y suficiente para que cuatro puntos del plano pertenezcan a la misma circunferencia y cinco puntos del espacio a la misma esfera, omitió resaltar el papel de su sistema como sistema general de coordenadas, aplicable al estudio de las curvas. Pero el principal artífice de la renovación de los métodos de geometría analítica es, sin discusión, el alemán Plücker.

PLÜCKER

Julius Plücker (1801-1868), físico y matemático alemán, fue profesor en las universidades de Berlín, Halle y finalmente Bonn a partir de 1837, donde enseñó matemáticas y física. Plücker fue principalmente un físico experimental, lo que le permitió hacer descubrimientos significativos sobre el magnetismo y la espectroscopía, aunque también aportó notables contribuciones a las matemáticas puras. Desgraciadamente, los métodos analíticos de Plücker despertaron la indignación del eminente matemático Steiner y la polémica que

siguió, conjugada con la admiración sin límites que los alemanes manifestaban con respecto a Steiner, desanimó a Plücker, quien se alejó de la geometría en 1847 para no volver a ella hasta después de 1863. Sin embargo, durante más de veinte años, Plücker hizo contribuciones a la geometría que, tanto en cantidad como en calidad, superan a las contribuciones personales de sus predecesores.

Se cuenta que al comienzo de su carrera como geómetra redactó una memoria de geometría sobre las tangentes a las cónicas (1826) cuyo tratamiento era sintético, lo que provocó una reclamación de prioridad por parte de Poncelet, porque Gergonne, el editor de esa memoria, la había modificado arbitrariamente sin hablar de ello al autor. Las modificaciones introducidas por Gergonne podían dar a suponer que Plücker había plagiado a Poncelet, y éste atacó violentamente a Plücker, quien se defendió con ayuda de Gergonne, pero muy pronto abandonó esta discusión dejando a los dos adversarios habituales proseguir el debate. Pero este comienzo tormentoso contrarió profundamente a Plücker, y fue probablemente la aspereza del ataque de Poncelet lo que le empujó a situarse en el campo de los geómetras algebristas para convertirse en el mayor especialista del punto de vista algebraico de la geometría.

El mismo Plücker afirmó en su prefacio al tomo II de su *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (Desarrollos analítico-geométricos) (1828-1831) que el punto de partida de sus investigaciones en geometría analítica había sido la lectura del tratado de Jean-Baptiste Biot (1774-1862) titulado *Essai de géométrie analytique* (Ensayo de geometría analítica) (1802), ensayo que conoció una popularidad tan grande como el de Lacroix. Cuando estudiaba las intersecciones de tres circunferencias y de sus cuerdas comunes, se dio cuenta de que esas cuerdas eran concurrentes. Plücker intentó demostrar ese teorema de una forma analítica, y no queriendo utilizar los métodos de eliminación algebraicos habituales, descubrió de forma independiente el método de la notación abreviada de Lamé. En su *Memoria sobre los contactos y las intersecciones de circunferencias* de 1827, propone las ecuaciones de las circunferencias $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$ y de las cuerdas comunes $C' - C'' = 0$, $C'' - C = 0$, $C - C' = 0$ y muestra que dos de las ecuaciones de las cuerdas implican la tercera ecuación, con lo que el teorema está demostrado.

Plücker se vio llevado así a representar a la familia de curvas que pasan por la intersección de otras dos curvas C_1 y C_2 combinando linealmente las ecuaciones de las curvas del mismo plano y el mismo grado. Pero en lugar de recurrir a dos parámetros m y m' como hacía Bobillier, se sirvió de un solo parámetro λ, utilizado por primera vez por Gergonne, y mostró que toda curva C que pasa por las intersecciones de las curvas C' y C'' puede expresarse como

$$C = C' + \lambda C'' = 0$$

donde C, C' y C'' son del mismo grado. Plücker se sirvió de este método para explicar claramente el problema de la «paradoja de Cramer». Recordemos que Cramer había mostrado que una curva de orden n está definida, en general, por $\frac{n(n + 3)}{2}$ puntos, pero había indicado algunas excepciones: por ejemplo, aunque una cúbica esté determinada de manera única, en general, por $\frac{1}{2}n(n + 3) = 9$ puntos, se tiene sin embargo que dos curvas cúbicas se interceptan en $n^2 = 9$ puntos. En virtud del primer resultado, la curva cúbica está determinada por 9 puntos, pero según el segundo resultado esos 9 puntos no determinan de manera única una cúbica, y ésta es la célebre paradoja de Cramer para $n = 3$. Una paradoja semejante aparece para $n = 4$. La explicación de Cramer consistía en considerar las n^2 ecuaciones que determinan los n^2 puntos de intersección como no independientes. Todas las cúbicas que pasan por 8 puntos determinados sobre una cúbica dada pasan también por el mismo noveno punto, y por tanto este punto depende de los ocho primeros. Euler explicaba esta paradoja con el mismo tipo de razonamiento. La contradicción aparente fue resuelta por Plücker.

Todo par de curvas de grado n se interceptan en n^2 puntos, pero de ellos sólo

$$\frac{n(n + 3)}{2} - 1$$

puntos son independientes; es decir, si dos curvas de grado n pasan por

$$\frac{n(n + 3)}{2} - 1$$

puntos, toda otra curva de grado n que atraviese esos puntos pasará por los

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

puntos restantes de los n^2 puntos. Así, para $n = 3$, son independientes 8 puntos, y para $n = 4$, 13 puntos tan sólo son independientes. Todo par de curvas que pase por 8 puntos (respectivamente 13 puntos), determina 9 puntos (respectivamente 16 puntos), pero toda otra curva que pase por 8 puntos (respectivamente 13 puntos), pasará por los puntos restantes.

Plücker desarrolló también la teoría de las intersecciones de una curva de grado m con una de grado n, mediante su método de la notación abreviada, y descubrió importantes teoremas que llevan su nombre.

En una memoria titulada *Über ein neues Coordinaten system* (Sobre un nuevo sistema de coordenadas) (1829), Plücker abrió una nueva era de la geometría con el concepto de sistema de coordenadas, que presentó en estos términos:

> Todo procedimiento particular para fijar la posición de un punto con respecto a puntos o líneas considerados como de posición conocida, corresponde a un sistema de coordenadas.

Hasta esta publicación, Plücker se había contentado con utilizar abundantemente las coordenadas cartesianas, pero en esa memoria introducía nuevas coordenadas, las coordenadas homogéneas, las cuales habían sido presentadas anteriormente por Feuerbach, Bobillier y Möbius. Pero en lugar de limitar su empleo como sus predecesores, las aplicó sistemáticamente al estudio de curvas en general. Partiendo de un triángulo de referencia y considerando las coordenadas de un punto cualquiera M como las distancias perpendiculares de M a los lados del triángulo, cada distancia puede multiplicarse por la misma constante arbitraria. Con ese sistema de coordenadas trilineales, la ecuación de una recta resulta $ax + by + ct = 0$ donde x, y y t son las coordenadas trilineales de un punto cualquiera, y la relación entre ese tipo de coordenadas y las coordenadas cartesianas (X, Y) de un punto M es tal que $x = Xt$ e $y = Yt$. En particular, el triplete $(x, y, 0)$ representa «un punto del infinito», con tal que $x \neq y \neq 0$ y que todos los puntos del infinito del

plano estén situados en la recta dada por la ecuación $t = 0$, llamada también la «recta del infinito».

La notación abreviada y las coordenadas homogéneas le permitieron llegar analíticamente al principio de dualidad. Los parámetros (a, b, c) de la recta en coordenadas homogéneas

$$ax + by + ct = 0$$

determinan una recta única en el plano, de la misma manera que las coordenadas homogéneas (x, y, t) corresponden a un punto único M del plano. Plücker tuvo la idea de considerar las x, y y t como constantes y de tomar las a, b y c como variables, con lo que la ecuación original determinaba entonces una clase de rectas o un haz de rectas que pasan por el punto fijo (x, y, t), más que un haz de puntos sobre la recta fija (a, b, c). Así, según la interpretación antigua, la ecuación especifica una *recta* como un lugar de *puntos;* según la nueva interpretación, especifica un *punto* como un lugar de *rectas*. En consecuencia, Plücker podía considerar indiferentemente la ecuación

$$pu + qv + rw = 0$$

como el conjunto de puntos (u, v, w). Fue así como Plücker descubrió la contrapartida analítica del principio geométrico de dualidad, discutido ampliamente por Poncelet y Gergonne. La sustitución en geometría pura del *punto* en el lugar de la *recta* y viceversa es el equivalente, en álgebra, a intercambiar los términos *constante* y *variable* con respecto a la ecuación de una recta en coordenadas homogéneas. Una consecuencia lógica importante que se desprende de esta idea revolucionaria de Plücker es precisamente que el punto y la recta son elementos tan fundamentales el uno como la otra para la geometría plana; para el espacio de tres dimensiones los elementos fundamentales son el punto y el plano.

En el segundo tomo de sus *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (1831), Plücker precisa y generaliza los conceptos de ecuación y de coordenadas tangenciales y el de clase de una curva. En particular, considera que una misma curva puede considerarse como una colección de puntos o como una colección de rectas tangenciales a la curva porque, seún Plücker, las tangentes determinan la forma de una curva tan bien como los puntos. La familia de las tangentes es una curva de líneas y posee una ecuación en términos de coordena-

das de líneas. La clase de la curva corresponde al grado de la ecuación, mientras que el grado de la ecuación expresado en términos de coordenadas de puntos se llama el «orden de la curva».

En sus obras siguientes, Plücker desarrolla considerablemente el estudio y la clasificación de las curvas algebraicas utilizando un principio nuevo, la «enumeración de las constantes», el cual se basa en las célebres fórmulas duales a las que va unido su nombre y que relacionan el orden, la clase y los números de los diferentes tipos de singularidades ordinarias de una curva de un género dado:

$$k = n(n - 1) - 2d - 3r$$

$$n = k(k - 1) - 2t - 3w$$

$$w = 3n(n - 2) - 6d - 8r$$

$$r = 3k(k - 2) - 6t - 8w$$

donde n: orden de la curva o grado de su ecuación en coordenadas de puntos;

k: clase de la curva o grado de la ecuación en coordenadas de líneas;

d: número de puntos dobles o puntos singulares que tienen dos tangentes distintas;

r: número de puntos de retroceso;

t: número de tangentes dobles;

w: número de tangentes de inflexión.

En particular, una cúbica no tiene más de un punto de retroceso o de un punto singular y una curva de orden dos no puede tener singularidades; es, pues, de clase dos. En su *System der analytischen Geometrie* (Sistema de geometría analítica) (1835), Plücker utiliza sus fórmulas duales para emprender una nueva clasificación de las cúbicas y de las cuárticas, llegando a formar 135 tipos diferentes de cuárticas de las 146 que son teóricamente posibles. En 1839, introduce en sus investigaciones los elementos en el infinito e imaginarios en una obra titulada *Theorie der algebraischen Curven* (Teoría de las curvas algebraicas) y muestra, en particular, que una cuártica contiene 28 tangentes dobles de las que como mucho 8 son reales. Sólo a partir de 1846, si se exceptúan algunas memorias publicadas anteriormente, las obras de Plücker contienen los resultados de sus

investigaciones con el fin de extender al espacio los instrumentos analíticos desarrollados en geometría plana. Es entonces cuando aplica las ideas y los métodos nuevos al estudio de las superficies y las curvas del espacio, en particular las cuádricas, y escribe al menos dos libros sobre este tema. En 1847 se consagra a la física para no volver a la geometría analítica más que al final de su vida.

Los sucesores inmediatos de Plücker

La nueva orientación que había dado a la geometría analítica fue proseguida por Ludwig Otto Hesse (1811-1874), a través de los determinantes y aplicando igualmente la teoría de las formas algebraicas y la de los invariantes a la ordenación de los razonamientos de geometría analítica. Dejó su nombre a un determinante que proporciona el número exacto de puntos de inflexión de una curva. En Inglaterra, Cayley y George Salmon (1819-1904) continuaron igualmente en la vía abierta por Plücker, pero utilizando ampliamente los recursos del álgebra lineal. Además de realizar trabajos sumamente originales, contribuyeron a difundir los nuevos métodos, que serían enriquecidos y extendidos por el matemático italiano D. Chelini (1802-1878).

La complejidad de los trabajos de los geómetras que prosiguieron el desarrollo de la geometría después de Plücker desborda ampliamente el marco de esta obra. Nos referimos al estudio en profundidad de las curvas y superficies (Hesse, Cayley, Jordan, Klein, Cremona, etc.), al establecimiento de las propiedades métricas de la geometría euclídea mediante conceptos proyectivos (Laguerre, Cayley, Klein), a la geometría reglada o geometría de las rectas, desarrollada por los físico-matemáticos (Malus, Dupin, Quetelet, Hamilton, Miuding, etc.), a los comienzos de la geometría algebraica (Riemann, Clebsch, Poincaré), al nacimiento de la topología (Listing, Möbius, Riemann, Betti, Jordan, Klein, Von Dick), a las geometrías en *n* dimensiones (Cayley, Riemann, Helmholtz, Klein, Newcomb, Lipschitz, etc.) y a la geometría infinitesimal y diferencial (Dupin, Gauss, Riemann, Beltrami, Christoffel, Lipschitz, etc.), para todo lo cual remitimos a obras más especializadas en las que pueden encontrarse desarrollos más profundos y refinados.

Las geometrías no euclídeas

La historia de las geometrías no euclídeas comienza con los trabajos de Gauss, Bolyai y Lobachevski en la primera mitad del siglo XIX. Sin embargo, está precedida cronológicamente por una considerable cantidad de trabajos consagrados al estatuto del postulado de las paralelas de Euclides en el seno de la geometría euclídea. El postulado de las paralelas ¿es dependiente o independiente del sistema de Euclides? He aquí la cuestión que preocupó desde el principio a los comentaristas de Euclides, porque la formulación misma de este postulado no parecía suficientemente evidente como para ser aceptada sin demostración.

Desde Proclo a los coinventores de las geometrías no euclídeas podemos volver a trazar las diversas tentativas hechas para demostrar rigurosamente ese postulado. Sucesivamente, los griegos, los árabes y los filósofos del Renacimiento intentaron sin éxito encontrar una demostración válida. En el siglo XVII, Wallis intentó sustituir este postulado por un axioma que demostrara el postulado, pero el axioma utilizado era, de hecho, equivalente al quinto postulado. De la misma manera, la tentativa de John Playfair (1748-1819), en el siglo XVIII, fracasó por una razón análoga. Sin embargo, los trabajos críticos emprendidos durante ese siglo, especialmente por Saccheri, Georg S. Klügel (1739-1812), Legendre, Lambert, para profundizar en la significación del postulado de las paralelas habían revelado tres vías posibles: una se basaba en el postulado y conducía evidentemente a la geometría euclídea; las otras dos, en formas opuestas, se fundamentaban en el rechazo del postulado de las paralelas, lo que dejaba vislumbrar la posibilidad de elaborar nuevas geometrías. Los trabajos de Saccheri revelaban la existencia de un sistema de axiomas que contenían una alternativa al postulado de las paralelas, y este sistema, llevado hasta sus últimas consecuencias, conduciría a una geometría no euclídea. Por otra parte, los trabajos de Klügel y Lambert permitían vislumbrar geometrías alternativas a la de Euclides.

A principios del siglo XIX, Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) distinguía realmente dos clases de geometrías: la geometría de Euclides y una geometría basada en la hipótesis de que la suma de los ángulos de un triángulo no fuera igual a dos rectos, llamada «geometría astral» (refiriéndose al espacio). A continuación, un

sobrino de Schweikart, Franz Adolf Taurinus (1794-1874), estudió la geometría astral de su tío y demostró que era lógicamente consistente. Además, demostró que las fórmulas válidas sobre una esfera de radio imaginario eran también válidas en la geometría astral.

En suma, los trabajos de Lambert, Schweikart, Klügel y Taurinus revelan que esos matemáticos estaban convencidos de que no se puede demostrar el postulado de las paralelas. Además, Lambert, Schweikart y Taurinus estaban igualmente convencidos de que es posible sustituir ese postulado por otro contradictorio con respecto a él y construir a partir del nuevo una geometría lógicamente consistente. Los tres reconocieron la posibilidad de existencia de una geometría no euclídea, pero no precisaron que la geometría euclídea no es la única que puede describir las propiedades del espacio en los límites de la experiencia física.

Los coinventores de las geometrías no euclídeas

Recordemos que Gauss afirmaba en 1779 que disponía de los principios de una geometría nueva, fundamentada en la hipótesis de la existencia de un número infinito de paralelas que se pudieran trazar a una recta dada por un punto exterior a esa recta. En el mismo momento en que el príncipe de los matemáticos terminaba de poner a punto sus sistema de geometría no euclídea, dos jóvenes matemáticos, uno húngaro y el otro ruso, realizaban este mismo descubrimiento y se esforzaban en vano por difundirlo. Probablemente no se hubiera planteado la cuestión de la prioridad si Gauss hubiera decidido publicar sus resultados porque, según parece, tanto Bolyai como Lobachevski estaban más o menos bien informados de las ideas de Gauss a través del padre de Bolyai y de Bartels, respectivamente.

Janos Bolyai (1802-1860), hijo de Wolfgang Farkas, era oficial del cuerpo de ingenieros militares del ejército húngaro. Su padre estudió en Inglaterra y después en Alemania, en donde se hizo amigo de Gauss. Pasó una gran parte de su vida tratando de demostrar el postulado de las paralelas y, sabiendo que su hijo Janos estaba también preocupado por ese problema, intentó en vano

disuadirle. En 1829, los esfuerzos de Janos se vieron recompensados pues, en lugar de intentar demostrar lo imposible, desarrolló lo que llamó la *Ciencia absoluta del espacio,* partiendo de la hipótesis de que por un punto exterior a una recta se podían trazar una infinidad de rectas en el plano, cada una de ellas paralela a la recta en cuestión. Su padre incorporó las ideas de Janos, en forma de apéndice, a su tratado titulado *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos,* escrito en 1829 pero no publicado hasta 1832. Conocemos ya (véase el capítulo VII) la reacción de Gauss ante los trabajos originales de Janos, y cómo este último, al enterarse de los comentarios de Gauss se sintió dolido y temeroso de perder la prioridad de este descubrimiento. Incapaz de conseguir que se reconociera su descubrimiento, decidió interrumpir toda publicación propia después de conocer la aparición de las investigaciones de Lobatchevski en lengua alemana en 1840.

Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856), alumno de Johann Martin Bertels (1769-1836), fue amigo y correspondiente de Gauss, y llegó a ser profesor en la universidad de Kazán. De 1827 a 1846 fue rector de esa universidad. En 1826 sometió al juicio de sus colegas un primer resumen de su nueva geometría, que él llamaba «geometría imaginaria», cuyo fundamento reposaba en el rechazo del postulado de las paralelas y en la hipótesis de que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos. Lobachevski estableció los principios de esta nueva geometría en dos memorias publicadas en la revista científica de Kazán y en una tercera publicada en el *Journal für Mathematik* entre 1829 y 1837. Deseoso de dar a conocer mejor su geometría y difundirla entre los geómetras occidentales, escribió dos exposiciones elementales, una en francés titulada *Géométrie imaginaire* (Geometría imaginaria), que apareció en la revista de Crelle en 1837, y la otra en alemán, cuyo título es *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelinien* (Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas), publicada en 1840. Gauss comprendió y apreció la nueva geometría de Lobachevski pero, una vez más, no le dio públicamente su aprobación. Lobachevski intentó de nuevo dar a conocer sus investigaciones geométricas publicando una nueva exposición de su geometría con el título *Pangéométrie,* o compendio de geometría fundada en una teoría general de las paralelas (1855), cuando estaba completamente

ciego. Gauss, Bolyai y Lobachevski se dieron cuenta de que el postulado de las paralelas no podía ser demostrado a partir de los otros nueve axiomas de la geometría euclídea, y que era pues lógicamente concebible adoptar una proposición contradictoria y desarrollar una nueva geometría consecuente y coherente naturalmente a partir de esos axiomas. El contenido técnico presentado por los coinventores de esta nueva geometría es prácticamente el mismo, por lo que nos contentaremos con presentar el de Lobachevski, basándonos en su memoria de 1840 (la traducción inglesa está incluida en la obra de Bonola, cuya referencia puede verse en la bibliografía).

Después de haber hecho una breve exposición de sus investigaciones anteriores, Lobachevski establece una lista de 15 teoremas de geometría cuya comprensión juzga esencial antes de abordar la hipótesis que rechaza el postulado de las paralelas de Euclides. A continuación afirma que todas las rectas del plano que salen de un mismo punto pueden dividirse, con respecto a una recta dada BC, del mismo plano, en dos clases: las rectas que cortan a BC y las que no la cortan.

Así, en la figura 10.2, el haz de rectas que pasa por A se divide en dos clases, la clase de las rectas que cortan a BC y la clase de las que no la cortan. En esta segunda clase existen dos rectas AH y AK que constituyen la frontera entre las dos clases, y que se llaman (AH y HK) «rectas paralelas». El ángulo HAD formado por la paralela AH y la perpendicular AD es llamado por Lobachevski el «ángulo de paralelismo» y se designa mediante $\pi(p)$ porque $AD = p$ y π es un símbolo habitual en geometría no euclídea.

Si $\pi(p)$ es un ángulo recto, la prolongación AE' de la perpendicular AE será paralela a la prolongación DB de la recta DC. Además, con respecto a los cuatro ángulos rectos formados en A por las perpendiculares AE y AD y sus prolongaciones AE' y AD', Lobachevski afirma que cada recta que sale de A, bien ella o su prolongación, está situada en uno de los ángulos rectos orientados hacia BC. Además, salvo la paralela EE', todas las demás deben interceptar a la recta BC si se prolongan suficientemente por los dos lados. Según la geometría euclídea, la recta EE' es la única paralela a BC, mientras que la geometría de Lobachevski contiene un número infinito de rectas paralelas que pasan por A. Cuando $\pi(p) = \pi/2$, el que se aplica es el postulado de Euclides.

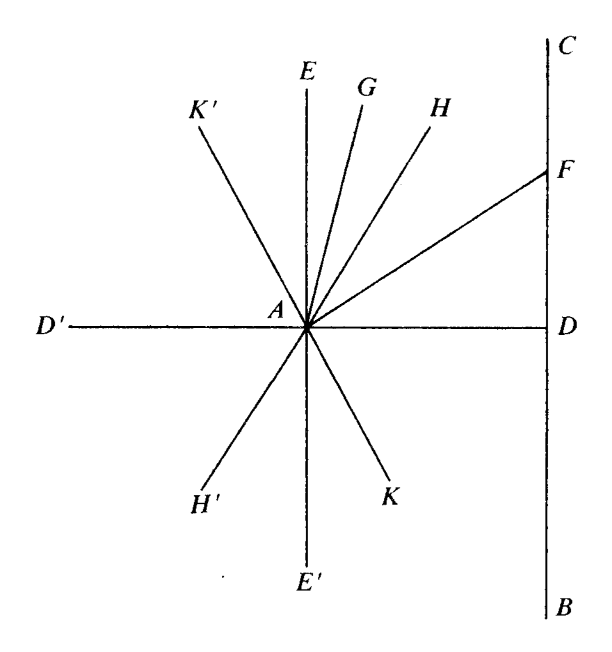


FIGURA 10.2

Según Lobachevski, si $\pi(p) < \pi/2$, el ángulo $DAK = \pi(p)$ y AK es paralela a la prolongación DB de la recta DC. En efecto, todas las rectas que pasan por A y que están situadas en el interior del ángulo $HAK = 2\pi(p)$ están comprendidas entre las paralelas AH y AK, mientras que las que están situadas, como la AG, en el interior de los ángulos

$$EAH = \pi/2 - \pi(p)$$

o

$$E'AK = \pi/2 - \pi(p),$$

están comprendidas entre las paralelas y la recta EE' perpendicular a AD. En resumen, según Lobachevski, si AH es paralela a DC, toda recta AF corta a DC, cualquiera que sea la pequeñez del ángulo HAF.

Así, según las dos hipótesis realizadas sobre $\pi(p)$, Lobachevski afirma que la noción misma de paralelismo se basa en el hecho de que una recta intercepta a la recta BC, por ejemplo, para la más pequeña desviación con respecto a la paralela AH o AK. A continuación, Lobachevski muestra que una línea recta conserva la característica de paralelismo para todos sus puntos y que la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede exceder dos rectos. Después añade otros teoremas, entre los que se puede citar el siguiente: «Para todo ángulo dado α existe una recta p tal que $\pi(p) = \alpha$». De este teorema, extrae las conclusiones siguientes

si p disminuye, $\alpha = \pi(p)$ aumenta

si $p = 0$, tiende hacia $\pi/2$

si p aumenta, $\alpha = \pi(p)$ decrece hacia cero cuando p tiende a infinito (Lobachevski escribe $p = \infty$).

Pueden citarse igualmente otros resultados: dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí; la intersección de dos planos contiene rectas que son paralelas todas ellas entre sí, si se presupone el paralelismo entre los dos planos, etc.

Lobachevski pasa a continuación a la geometría esférica, demuestra diversos teoremas relativos a los triángulos esféricos, a su superficie, e introduce en particular la noción de línea frontera como un círculo de radio infinito. Después, demuestra la relación fundamental siguiente:

Sean $AA' = BB' = x$, dos rectas paralelas que sirven de ejes de los dos arcos frontera

$$AB = s, \ A'B' = s',$$

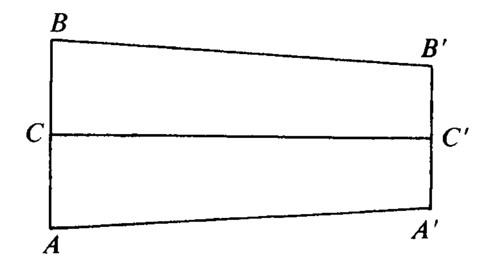


FIGURA 10.3

entonces $s' = se^{-x}$ donde e es independiente de los arcos s, s', de la recta x y de la distancia del arco s'(e es la base neperiana del logaritmo). De este teorema, Lobachevski extrae algunas observaciones: cuando $s' = 0$ para $x = \infty$, entonces no sólo decrece la distancia entre las dos paralelas, sino que si se prolongan estas paralelas, presentan la propiedad de la asíntota.

Esta relación le permite introducir a continuación la parte trigonométrica de su geometría y emprender un estudio importante del ángulo de paralelismo $\pi(x)$. Define así el coseno de x y el seno de x para un x real como la parte real y la parte imaginaria de e^{ix}, respectivamente. Intenta proporcionar una base puramente analítica a su trigonometría y la elabora de forma que sea independiente de la geometría euclídea. Las principales fórmulas trigonométricas de su geometría son:

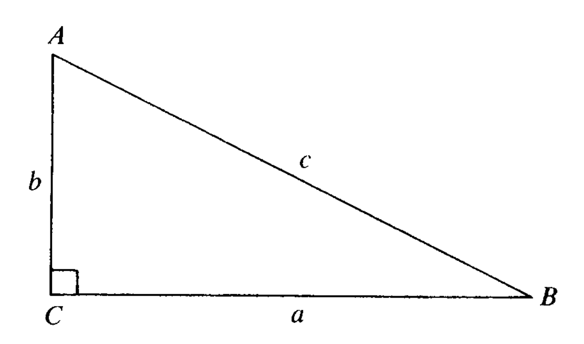


FIGURA 10.4

$$\text{cotg } \pi(a) = \text{cotg } \pi(c) \text{ sen } A$$

$$\text{sen } A = \cos B \text{ sen } \pi\ (b)$$

$$\textit{sen}\ \pi(c) = \text{sen } \pi(a) \text{ sen } \pi(b)$$

Estas fórmulas son válidas en trigonometría esférica ordinaria con tal que los lados *a, b* y *c* tengan longitudes imaginarias, es decir, que si se sustituyen *a, b* y *c* en las fórmulas habituales de la trigonometría esférica por *ia, ib* e *ic,* se obtienen las fórmulas de Lobachevski. De la misma manera, para el área del triángulo en geometría esférica con los ángulos *A, B* y *C,* la fórmula habitual es $r^2(A + B + C - \pi)$,

que se convierte en la geometría no euclídea, en $r^2(\pi - (A + B + C))$, donde r ha sido sustituido por ir. Lobachevski determinó también el valor de $\pi(x)$ y obtuvo la célebre fórmula válida para un ángulo central completo de 2π

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-x/k}$$

donde k es una constante, llamada la «constante espacial», y de esta relación se deduce que

$$\pi(0) = \frac{\pi}{2},\ \pi(-\infty) = \pi,\ \pi(\infty) = 0.$$

Esta fórmula es importante porque asocia a cada longitud x un ángulo definido $\pi(x)$. Por ejemplo, si $x = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi(1)}{2} = e^{-1}$, y entonces $\pi(1) = 40° 24'$. Por tanto, la unidad de longitud es aquella longitud cuyo ángulo de paralelismo es $40° 24'$.

Se encuentran también otros resultados importante obtenidos en su nueva geometría, como la fórmula para el elemento *ds* de un arco de curva, teoremas sobre el área de regiones planas y curvilíneas así como para volúmenes de sólidos.

Es importante señalar que las fórmulas de la geometría euclídea pueden obtenerse de las de la geometría no euclídea cuando las magnitudes son pequeñas. Por ejemplo, puede mostrarse a partir de

$$e^r = 1 + r + \frac{r^2}{2!}\ldots$$

despreciando para valores pequeños de r todos los términos del desarrollo salvo los dos primeros, que la longitud de la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$.

Progresos posteriores de las geometrías no euclídeas

Gracias a la publicación de las notas y de la correspondencia de Gauss sobre la geometría no euclídea en 1855, esta nueva geometría fue difundida gradualmente y atrajo la atención de los matemáticos. Se dio otro paso hacia el reconocimiento de esta geometría cuando Riemann publicó, en 1868, el segundo tipo de geometría no euclídea, que corresponde al caso en que la suma de los ángulos de un triángulo es superior a dos rectos. Esta «geometría elíptica» (el

primer tipo se llama «geometría hiperbólica») fue introducida de manera explícita por Klein en 1871. De 1866 a 1871, las geometrías no euclídeas conocieron una amplia difusión y, al mismo tiempo, diversos matemáticos, entre los que se puede citar a Riemann, Beltrami, Liebmann y Poincaré, propusieron modelos para verificar las interpretaciones y justificaciones. Hacia 1870, la cuestión fundamental que permanecía todavía sin respuesta consistía en saber si esas geometrías podían clasificarse como una rama legítima de las matemáticas, es decir, si eran consistentes. La respuesta a esta cuestión condujo a vivas discusiones entre los matemáticos hasta el momento en que Klein propuso su célebre «programa de Erlangen» en el que presentó una clasificación de las geometrías fundamentada en la geometría proyectiva. Caracterizó así los diferentes teoremas de geometría, las diversas direcciones de investigación, mediante los grupos de transformaciones que les corresponden. En esta clasificación, cada geometría es la teoría de los invariantes de un grupo particular de transformaciones. La estructura de conjunto del edificio geométrico corresponde a la de los grupos de transformaciones: por ejemplo, la geometría euclídea es el estudio de los invariantes del grupo métrico, la geometría proyectiva el de los invariantes del grupo de las colineaciones, etc. La teoría de grupos ofrecía así a la vez una síntesis del conjunto de las investigaciones geométricas y geometricoalgebraicas emprendidas durante el siglo XIX y una clasificación de los resultados obtenidos. Después de 1880 se emprenderá la difícil tarea de instaurar el rigor en los fundamentos de la geometría, y ésta será la preocupación de algunos matemáticos como Klein, Peano, Hilbert, Pieri, Veronese, etc. Pero la amplitud de la obra emprendida era tal que no se podía esperar allanar rápidamente todas las dificultades, y habrá que esperar al siglo XX para que este esfuerzo de axiomatización pueda desarrollarse con provecho.

BIBLIOGRAFÍA

Bell, Eric, T., *Men of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1965, pp. 294-306.

Bonola, Roberta, *Non-Euclidean geometry,* Nueva York, Dover, 1955.
Boyer, Carl B., «Analysis: notes on the evolution of a subject and a name». *The Mathematics Teacher, 47* (1954), pp. 450-62.
Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley, 1968, pp. 572-97.
Boyer, Carl B., «History of analitic geometry», *Scripta Mathematica,* 1956, pp. 192-268.
Bruins, Evert M., *La géométrie non-euclidienne dans l'antiquité,* D-121, París, Palais de la Découverte, 1967.
Cassina, Ugo M., *Sur l'histoire des concepts fondamentaux de la géométrie projective,* D-50, París, Palais de la Découverte, 1957.
Coolidge, Julian L., *A history of geometrical methods,* Nueva York, Dover, 1963, pp. 68-101.
Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N.R.F., 1957, pp. 662-75.
Fano, G. y S. Cardus, «Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géometrie analytique pendant le XIX^e siècle». *Encyclopédie des sciences mathématiques, III,* 3, pp. 185-259.
Fitzpatrick, Sister M. «Saccheri, forerunner of non-Euclidean geometry». *The Mathematics Teacher,* 57, 1964, pp. 323-32.
Guggenbuhl, Laura, «Gergonne, founder of the Annales de Mathématiques». *The Mathematics Teacher,* 52, 1959, pp. 621-29.
Klein, Felix, *Le programme d'Erlangen,* Coll. Discours de la méthode, París, Gauthier-Villars, 1974.
Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 834-946.
Loria, Gino, «Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de "coordonnées", *Osiris,* 8, 1948, pp. 218-88.
Nagel, Ernest, «The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry», *Osiris,* 7, 1939, pp. 142-224.
Pont, Jean-Claude, *La topologie algébrique des origines à Poincaré,* París, Presses Universitaires de France, 1974.
Smith, David E, *A source book in mathematics,* Nueva York, Dover, vols. I y II, 1959, pp. 315-23, 331-45, 351-88, 404-25, 524-45.
Struik, Dirk, J., «Outline of a history of differential geometry», *Isis,* 19, 1933, pp. 92-120; 20, 1933, pp. 161-191.
Taton, René, La géométrie projective en France de Desargues à Poncelet, D-4, París, Palais de la Découverte, 1951.
Taton, René, *L'histoire de la géométrie descriptive,* D-32, París, Palais de la Découverte, 1954.
Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* vol. III, *La science contemporaine. I. Le XIX^e siècle,* París, P.U.F., 1961, pp. 23-48. [*Historia general de las ciencias,* vol. III, Barcelona, Destino, 1973].

Vucinich, Alexander, «Nikilai Ivanovich Lobatchevski: the man behind the first non-Euclidean geometry», *Isis,* 53, 1962, pp. 465-481.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál fue el papel de la Escuela Politécnica en la renovación de la geometría en Francia? Explicarlo.
2. ¿Podría citar varios descubrimientos independientes en geometría durante la primera mitad del siglo XIX? En cada caso, justificar la parte correspondiente a cada matemático.
3. ¿En qué razones se basaba la controversia entre Gergonne y Poncelet? Justificar la respuesta.
4. ¿Cuál era la argumentación de Poncelet en la que se basaba su célebre ley de continuidad? Precisar bien las diferentes etapas de esta argumentación.
5. El principio de continuidad de Poncelet le permite elaborar una nueva geometría. Justificar esta afirmación.
6. Nombrar tres geómetras eminentes franceses y tres alemanes del siglo XIX, y citar algunas de sus principales contribuciones mencionando su pertenencia al movimiento sintético o analítico.
7. El descubrimiento y justificación del principio de dualidad, ¿fue el resultado de los desarrollos de la geometría sintética o de la geometría analítica? Explicarlo.
8. ¿Cuál fue el papel de Plücker en la utilización del método de la notación abreviada? Explicarlo.
9. Plücker descubrió la contrapartida analítica del principio geométrico de dualidad. Justificarlo aportando ejemplos.
10. Los predecesores de Gauss, Bolyai y Lobatchevski no llegaron a inventar una geometría no euclídea. ¿Por qué? Justificarlo aportando razones.
11. ¿Cuál fue el papel de Gauss en la invención de las geometrías no euclídeas? Explicarlo.
12. El desarrollo de las geometrías no euclídeas marca una etapa importante en el desarrollo de las matemáticas. Justificarlo.

11. LOS ALBORES DE LAS MATEMATICAS DEL SIGLO XX

INTRODUCCIÓN

El período que nos interesa particularmente en este capítulo comienza aproximadamente en 1880 y abarca una etapa más o menos larga de la historia de las matemáticas del siglo XX. Decir que este capítulo está consagrado a la historia de las matemáticas del siglo XX sería hacer gala de un espíritu estrecho y poco preocupado por la verdad histórica. Hemos intentado más bien hacer una síntesis de las contribuciones de los grandes matemáticos de fines del siglo XIX. Hemos creído acertado también insistir en el trabajo de tres escuelas que se formaron con el fin de proporcionar una concepción universalmente aceptable de los fundamentos de las matemáticas. En su momento, esbozaremos brevemente algunos desarrollos específicos ligados a tal o a cual tema, con la esperanza de suscitar en el lector el gusto por abordar verdaderamente la historia del siglo XX mediante obras especializadas y mediante la lectura de revistas científicas o memorias originales.

En la primera parte, intentamos presentar una síntesis de las contribuciones de Felix Klein en el campo de la geometría. Después analizamos, demasiado brevemente sin duda, el papel preponderante desempeñado por Peano en el estudio de los fundamentos de las matemáticas y, más específicamente, sus trabajos de lógica matemática. A continuación, consagramos varias páginas a un matemático todavía muy desconocido, Gottlob Frege. La paradoja de Russell hizo tambalearse el sistema elaborado por Frege para hacer que la lógica englobara las matemáticas; sin embargo, sus puntos de vista penetrantes sobre la lógica y sus leyes fundamentales de la aritmética merecían en conjunto que nos detuviéramos en él.

El científico universal que fue Poincaré merecía un lugar excepcional en esta exposición; a pesar del cuidado con el que hemos

intentado delimitar y traducir las partes esenciales y accesibles de su obra matemática, física y filosófica, somos conscientes de que la amplitud de esta tarea nos ha impedido hacerle justicia plenamente.

Finalmente hemos intentado analizar las paradojas de la teoría de conjuntos, sus razones de ser y el papel importante que han desempeñado en el estudio de los fundamentos de las matemáticas. Después de haber esbozado los trabajos de Zermelo, Fraenkel y Skolem en la axiomatización de la teoría de conjuntos, terminamos el capítulo con un estudio de las tres escuelas de pensamiento que se formaron hacia 1900 para intentar profundizar en la naturaleza y los fundamentos de las matemáticas: el logicismo con Russell y Whitehead, el intuicionismo con Brouwer y Weyl, y el formalismo con Hilbert. A lo largo de este estudio trataremos de exponer aspectos del desarrollo de las matemáticas en el siglo XX, pero nuestro trabajo resultará siempre esporádico e incompleto.

KLEIN

Felix Klein (1849-1925), matemático alemán, nació en Dusseldorf en 1849, e hizo sus estudios universitarios primero en Bonn y después en Gotinga. Diplomado en Bonn en 1868 con el grado de doctor, fue nombrado en 1871 *Privat Dozent* en Erlangen, donde enseñó hasta 1875. En su «disertación» inaugural de 1872 mostró cómo el concepto de grupo podía ser aplicado de una manera cómoda para caracterizar las diferentes geometrías elaboradas durante el siglo XIX (el programa de Erlangen). Enseñó sucesivamente en Munich (1875-1880), Leipzig (1880-1886), y Gotinga (1886-1913), donde fundó un instituto de matemáticas aplicadas. Murió en Gotinga en 1925.

Se le deben importantes trabajos en geometría, muy en particular su programa de Erlangen, sus investigaciones para tratar las geometrías no euclídeas como casos particulares de la geometría proyectiva, así como el reconocimiento de dos clases de geometrías elípticas. Klein se distinguió también en el estudio de las funciones automorfas y por sus contribuciones en el campo de la topología.

Ocupados en la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, Klein y Poincaré introdujeron el concepto de funciones automorfas, que desempeñaría en lo sucesivo un papel prepon-

derante en la teoría de esas ecuaciones. Esas funciones particulares son generalizaciones de funciones del análisis como las funciones circulares, hiperbólicas, elípticas, etc. En general, se dice que una función es automorfa si es invariante en una transformación de la variable z' del tipo

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde a, b, c y d pueden ser reales o complejos y verifican la condición $ad\text{-}bc = 1$. Se puede asociar la noción de transformación a la teoría de grupos y mostrar que la transformación homográfica de z' constituye de hecho un grupo de transformaciones. Las primeras funciones automorfas aparecieron en el momento en que Hermite obtuvo la función modular que utilizó para la resolución de la ecuación general de quinto grado mediante funciones elípticas. Klein llevó a cabo investigaciones importantes sobre el concepto de función modular, las cuales llevaron a la obtención de nuevas clases de funciones automorfas más generales, entre las que se encuentra una clase particular que posee propiedades análogas a las funciones fuchsianas, a la cual ha quedado unido su nombre. Las funciones automorfas y, más particularmente, las funciones fuchsianas y kleineanas sirven para resolver la clase entera de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes algebraicos que tienen sólo puntos singulares regulares.

El «programa de Erlangen» de Klein contiene ideas maestras que provienen de diversas fuentes. Se trata en primer lugar de la noción de aplicación de una superficie sobre otra, de correspondencias entre conjuntos geométricos y de la teoría general de invariantes. Klein retoma las ideas de Cayley sobre la formulación de nociones métricas como la de ángulo y distancia entre dos puntos en términos proyectivos a partir de las relaciones entre las geometrías euclídea y proyectiva para generalizarlas de manera que incluyan las geometrías no euclídeas. Finalmente, la utilización por Klein del concepto de grupo de transformaciones le permite elaborar una síntesis notable de estos importantes conceptos cuyo principio unificador es la idea de que una geometría es el estudio de los invariantes de un cierto grupo de transformaciones. Sobre esta base, propuso un programa que sustituía los puntos de vista que se habían quedado aislados y sin relaciones aparentes por una concepción orgánica de

la geometría fundamentada en una jerarquización de los grupos de transformaciones.

Jean Dieudonné y P. François Russo han considerado este programa como uno de los jalones más importantes, como uno de los momentos principales de la historia de las matemáticas. Según Dieudonné, aparece como un resultado de la larga y brillante evolución de la geometría proyectiva desde principios del siglo XIX, que él resume, condensa y explica gracias a la valoración del papel fundamental desempeñado por el concepto de grupo. De este modo, prosigue, Klein inaugura al mismo tiempo la dominación que ejercerá gradualmente la teoría de grupos sobre el conjunto de las matemáticas, así como la fusión cada vez más estrecha de los conceptos provenientes del álgebra, la geometría o el análisis: tendencias que se cuentan entre las más características de las matemáticas contemporáneas.

La génesis del programa de Erlangen

Recordemos brevemente que el desarrollo de la geometría proyectiva durante el siglo XIX comienza con las importantes investigaciones de Poncelet, que intentó constituir una doctrina geométrica general haciendo intervenir principalmente la razón anarmónica que se conserva en una transformación proyectiva, los puntos imaginarios y el principio de continuidad. Con Chasles y Steiner asistimos a la verdadera constitución de la doctrina proyectiva, en la que emergen dos ideas maestras: la distinción entre propiedades métricas y propiedades descriptivas y el papel de las transformaciones. Como Poncelet y sus sucesores, Von Staudt se propone desarrollar la geometría sin recurrir a los métodos analíticos pero, a diferencia de aquéllos, entiende que debe introducir las nociones proyectivas sin hacer intervenir consideraciones métricas, e intenta reconstruir esta geometría con ayuda de los axiomas que se refieren únicamente a la posición o el orden de los elementos fundamentales.

Aunque Poncelet, Chasles, Von Staudt y Steiner tuvieron el mérito de distinguir netamente en la geometría las propiedades proyectivas y las propiedades métricas, no dilucidaron verdaderamente las relaciones entre estos dos tipos de propiedades. En 1853, Edmond Laguerre (1834-1886) inició algunas investigaciones con el

fin de establecer las propiedades métricas de la geometría euclídea sobre la base de conceptos proyectivos, relacionando la medida de un ángulo con la razón anarmónica de sus lados y de las dos rectas del mismo origen que unen su vértice a los puntos cíclicos. Considérense dos rectas que pasan por el origen y cuyas ecuaciones en coordenadas no homogéneas son $y = x \text{ tg } \phi$ e $y = x \text{ tg } \phi'$. Sean $y = ix$ e $y = -ix$ dos rectas imaginarias del origen a los puntos cíclicos de coordenadas $(1, i, 0)$ y $(1, -i, 0)$. Llamemos a estas cuatro rectas u, u', v, v', respectivamente y ϕ al ángulo entre u y u'; Laguerre obtiene que

$$\phi = \theta' - \theta = \tfrac{i}{2} \log(uu', vv')$$

donde (uu', vv') es la razón anarmónica de las cuatro rectas, cuyo valor es imaginario. Este resultado puede servir como definición de la medida de un ángulo en términos del concepto proyectivo de la razón anarmónica.

A Cayley le corresponde el mérito de haber desarrollado las ideas de Laguerre, pero de una manera completamente independiente: sus investigaciones generalizaron las de este último, entonces profesor en el Collège de France. Cayley fue el primero en dar una definición proyectiva explícita y completa de la distancia entre dos puntos y a partir de ella sus propiedades métricas. En sus seis memorias fundamentales sobre las *quantics* (teoría de formas) Cayley mostró que las propiedades métricas de una figura G son las propiedades proyectivas de G', formada con G y los puntos cíclicos. En dos dimensiones, sustituye los puntos cíclicos por una cónica (porque estos puntos se consideran entonces como una cónica degenerada tangencialmente) y en el espacio de tres dimensiones utiliza una cuádrica para sustituir a esos mismos puntos. La medida proyectiva se define entonces claramente, en dos dimensiones, mediante la razón anarmónica de los cuatro puntos de una recta, de los cuales dos son los extremos del segmento medido y los otros dos son los puntos de intersección de la recta con una cónica que se transforma en la transformación. Cayley manifestó a este respecto que «la geometría métrica aparece así como una parte de la geometría proyectiva».

En cuanto a la teoría de grupos, se desarrolla sobre todo, y en primer lugar, bajo el aspecto de la teoría de los grupos finitos de permutaciones (sustituciones), como consecuencia de la publicación

por Hermite de los manuscritos de Galois, y de su difusión mediante las obras de Joseph Alfred Serret (1819-1885), cuyo nombre ha quedado unido a las fórmulas llamadas de Serret-Frenet. Estas fórmulas proporcionan la derivada de los cosenos directores de la tangente, de la binormal y de la normal de las curvas del espacio. Hasta 1868 no se aportaron prolongaciones significativas a la obra de Galois. En efecto, Camille Jordan (1838-1922) publica en 1870 su gran *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas) en el que resume, perfeccionándolos, los trabajos de sus predecesores sobre las propiedades particulares de los grupos de permutaciones y estudia asimismo grupos particulares, los grupos lineales y sus subgrupos. Además, es él quien introduce la noción de representación de un grupo en otro, y quien demuestra una parte del teorema conocido con el nombre de «teorema de Jordan-Hölder». En su *Mémoire sur les groupes de mouvements* (Memoria sobre los grupos de movimientos) (1868-1869) Jordan emprende el primer estudio importante de los grupos infinitos; los movimientos estudiados son las traslaciones y las rotaciones, y ello dará origen a los estudios de las transformaciones geométricas mediante el concepto de grupo. Recordemos que, mientras tanto, la definición de los grupos «abstractos» había sido dada por Cayley ya en 1849, pero hasta 1880 no conoce esta teoría un desarrollo verdaderamente sin precedentes.

Un conjunto de elementos constituye un grupo con respecto a una operación dada si a) el conjunto de elementos es cerrado para la operación; b) el conjunto contiene un elemento neutro para la operación; c) a cada elemento del conjunto corresponde un elemento que es opuesto a él con respecto a la operación; d) la operación es asociativa. Por ejemplo, sea el conjunto R de los números reales dotado de la operación multiplicación;

a) si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b = c$, entonces c es también un número real
b) si $a \in \mathbb{R}$, existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ donde 1 es el elemento neutro para la multiplicación
c) si $a \in \mathbb{R}$ existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

donde a^{-1} es el elemento opuesto (inverso) de a con respecto a la multiplicación

d) si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, es decir, la multiplicación es asociativa.

Hay que comprender aquí que los elementos pueden ser números, puntos, transformaciones o cualquier otro ente matemático. Asimismo, las operaciones definidas en los conjuntos pueden ser de naturaleza aritmética (adición, multiplicación, etc.), geométrica (rotación alrededor de un punto o de un eje), o cualquier otra regla de operación, como transformaciones proyectivas, transformaciones de contacto, transformaciones birracionales, etc. Añadamos que si la operación es conmutativa el grupo se llama *conmutativo* o *abeliano*.

El advenimiento de las geometrías no euclídeas constituye una etapa importante en la génesis del programa de Erlangen, del que conviene recordar los principales momentos. Gauss, Bolyai y Lobachevski fueron los primeros en elaborar una geometría llamada «hiperbólica», que corresponde a la hipótesis en que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos. Mostraron también que tal geometría es lógicamente coherente y que la geometría euclídea no es más que un caso particular de ella. Pero estos coinventores no llegaron a poner en claro las consecuencias de la hipótesis opuesta, en la que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor de dos rectos; es al genio de Riemann al que debemos el haberlo expuesto en toda su riqueza en un pasaje extraído de su disertación de 1854 (citado por Russo):

> La propiedad del espacio de ser ilimitado posee una certeza empírica más grande que cualquier otro dato de la experiencia. Pero la infinitud del espacio no es de ninguna manera la consecuencia de ello; por el contrario, si se suponen los cuerpos independientes del lugar, y se atribuye así al espacio una medida de curvatura constante, el espacio sería necesariamente finito si esta medida de curvatura tuviera un valor positivo, por pequeño que fuera. Prolongando las direcciones iniciales situadas en un elemento superficial, según las líneas de distancia más corta, se obtendría una superficie ilimitada de curvatura constante, es decir una superficie que, en una variedad plana de tres dimensiones, tomaría la forma de una superficie esférica y sería, en consecuencia, finita.

Durante muchos años las dos geometrías no euclídeas permanecerían prácticamente yuxtapuestas y aparecerían como realidades

bastante extrañas, aun cuando su difusión permitiera que fueran conocidas por la comunidad científica de la época. Antes de Klein, Eugenio Beltrami (1835-1900) había sido el primero en poner de manifiesto la naturaleza común de las dos geometrías no euclídeas. En efecto, en 1866 reconoce que las superficies de curvatura constante son espacios no euclídeos. Además, en una memoria titulada *Saggio d'una interpretazione della geometria non euclidea* (Ensayo sobre una interpretación de la geometría no euclídea) (1868), demuestra que se puede considerar que la geometría hiperbólica es, en el caso de dos dimensiones, equivalente a la geometría sobre una porción restringida de una superficie de curvatura negativa, con tal que las geodésicas sobre esta superficie sean consideradas como líneas rectas. Las longitudes y los ángulos sobre la superficie son las longitudes y los ángulos de la geometría euclídea ordinaria sobre la superficie. Esta superficie es conocida con el nombre de «pseudoesfera» y es engendrada por la rotación de la tractriz alrededor de su asíntota. Mostró también que la geometría de Riemann era una geometría sobre una superficie de curvatura positiva.

Parece que fue Klein, y no Cayley, quien primero puso de manifiesto la naturaleza proyectiva de las geometrías no euclídeas aplicándoles, sin embargo, los puntos de vista de este último. Klein estableció claramente que los tres tipos de geometrías, la de Euclides, la hiperbólica y la de Riemann, eran casos particulares correspondientes a los tres tipos posibles de geometrías proyectivas de curvatura constante. Añadamos que Klein fue el primero en demostrar que la geometría proyectiva es independiente de la teoría de las paralelas.

Como la idea fundamental de Klein consiste en codificar las geometrías adoptando el punto de vista de las transformaciones, sería bueno esbozar brevemente el origen histórico de ese concepto. En geometría, el concepto de transformación significa esencialmente una correspondencia. Dada una regla de asociación, ésta liga cada elemento de un cierto conjunto de puntos haciéndole corresponder uno o varios elementos de otro conjunto de puntos, y recíprocamente, cada elemento del segundo conjunto corresponde a uno o varios elementos del primero según otra regla; se establece entonces una transformación de uno en otro. Si las transformaciones son continuas y biunívocas, los dos conjuntos tienen la misma dimensión.

Esta idea de establecer correspondencias entre diferentes figuras

se remonta a los griegos, y pueden encontrarse ejemplos en los trabajos de Menecmo y Pappus. Poncelet fue el primero en comprender claramente el uso de una transformación para determinar las propiedades de una figura central a partir de las propiedades particulares de una figura específica; la transformación fundamental utilizada entonces es la de la proyección central de un plano sobre otro. Más tarde, muchos geómetras consideraron las transformaciones en la forma sensible de las correspondencias entre figuras (transformaciones lineales, circulares, afines, rotaciones, homotecias, etc.). El punto de vista analítico preconizado por algunos de ellos (en particular, Möbius y Plücker) permitió expresar estas transformaciones en forma algebraica y obtener, en particular, la conservación de las propiedades de las figuras en las transformaciones bajo la forma de invariantes. Nacida del álgebra, la teoría general de los invariantes, desarrollada sobre todo por Sylvester y Cayley, proporcionó un procedimiento sistemático para determinar todos los invariantes algebraicos de un sistema de objetos geométricos y todas las relaciones algebraicas (o syzygies) que verifican. Así, entre la geometría y el álgebra tuvo lugar una mutua fecundación. Pero fue sobre todo a partir del momento en que las transformaciones fueron consideradas como grupos cuando se comenzó a reconocer su alcance en geometría. El mérito de este acercamiento recae en Klein.

El contenido del programa de Erlangen

En este programa, publicado con ocasión de su entrada en la Facultad de Filosofía y en el Senado de la Universidad de Erlangen en 1872, con el título de *Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas,* Klein describe la geometría como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes con respecto a un grupo específico de transformaciones. No sólo introduce un orden en la geometría por el reparto de las propiedades de las figuras en clases que corresponden cada una a un grupo de transformaciones, sino que, en adelante, considera la geometría como el estudio no ya de las propiedades ordenadas de las figuras sino de los diversos grupos de transformaciones.

Klein afirma desde el comienzo de su exposición que el desarro-

llo de la geometría proyectiva ocupa el primer lugar entre los trabajos efectuados durante el siglo XIX en el campo de la geometría. En una nota que figura al final de su texto y en sus observaciones finales, preconiza el abandono de las controversias estériles entre la tendencia «sintética» y la tendencia «analítica» y subraya, en particular, que el campo de la intuición del espacio no está cerrado al método analítico y que, según dice, se pueden concebir las fórmulas de la geometría analítica como una expresión clara y precisa de ias relaciones geométricas. A continuación, Klein aborda el problema de la relación entre propiedades proyectivas y propiedades métricas y muestra la importancia de buscar un principio general a partir del cual se puedan edificar los dos métodos, porque existen también otros métodos (dejando aparte el de la geometría elemental y el de la geometría proyectiva) a los cuales es preciso, según dice, concederles el mismo derecho a una existencia propia.

Después de otras consideraciones de orden histórico, Klein comienza su exposición propiamente dicha y aborda la noción importante de «grupo» de transformaciones del espacio, enumera las condiciones para tener tal grupo y proporciona ejemplos, como el conjunto de los desplazamientos, las rotaciones alrededor de un punto, etc. Muestra a continuación que el conjunto de los desplazamientos del espacio, sus transformaciones por semejanza y por simetría, sin olvidar las transformaciones compuestas con las precedentes, no alteran las propiedades de las figuras, lo que le lleva a definir el «grupo principal» de transformaciones del espacio como el conjunto de todas esas transformaciones:

> Las propiedades geométricas no se alteran por las transformaciones del grupo principal. *La recíproca también es cierta:* las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariancia con respecto a las transformaciones del grupo principal.

Considera a continuación el paso del concepto de espacio al concepto de «multiplicidad» y subraya que el espacio es una multiplicidad de tres dimensiones. Klein generaliza su punto de vista y plantea el problema general, que comprende no sólo la geometría ordinaria sino también los otros métodos geométricos modernos, de la manera siguiente:

Se da una multiplicidad y un grupo de transformaciones sobre esa multiplicidad; desarrollar la teoría de los invariantes relativos a ese grupo.

Antes de estudiar las diversas geometrías, Klein enuncia un teorema en el que caracteriza esas geometrías y su relación con la geometría ordinaria:

Si se sustituye el grupo principal por un grupo más extenso, sólo una parte de las propiedades geométricas se conserva. Las demás propiedades no aparecen ya como propiedades intrínsecas de los entes geométricos, sino como propiedades del sistema obtenido añadiéndole un ente especial. Este ente especial, en tanto que, en general, está determinado, está definido por la condición de que, suponiéndole fijo, las únicas transformaciones entre las del grupo dado que se pueden aplicar todavía al espacio son las del grupo principal.

Después establece para cada geometría los grupos de transformaciones que le caracterizan sin formularlos, sin embargo, en forma analítica. Por ejemplo, la geometría proyectiva es la del grupo lineal que deja invariantes, entre otras cosas, la razón anarmónica, las colineaciones, la linealidad, los conjuntos armónicos y la propiedad de ser una sección cónica. Una transformación proyectiva puede escribirse en la forma

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c}{dx + ey + f}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c}{dx + ey + f}$$

Un subgrupo del grupo proyectivo es la colección de las transformaciones afines, es decir, las que pueden representarse mediante

$$x' = a_1x + b_1y + c, \quad y' = a_2x + b_2y + c$$

donde el determinante $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$.

En esta transformación afín, las rectas se transforman en rectas y las rectas paralelas corresponden a otras rectas paralelas. Sin embargo, las longitudes y las medidas de los ángulos no son invariantes en este tipo de transformación. El grupo de las geometrías métricas es el mismo que el grupo afín, salvo que el determinante debe ser igual a $+1$ ó a -1. Por ejemplo, la geometría euclídea es aquella en la que el determinante es igual a $+1$, las transformaciones se llaman, entonces, «rígidas» (rotaciones, traslaciones y reflexiones), y los invariantes son la longitud, la medida de un ángulo, las dimensiones

y la forma de las figuras. Existe, pues, una jerarquización de las geometrías, y en la cima de ellas está la geometría proyectiva; en un segundo nivel se encuentran la geometría afín y las geometrías no euclídeas, y la geometría euclídea ocupa el cuarto y último nivel, separado del segundo por las subdivisiones de la geometría afín y de la geometría métrica parabólica (en la que la medida de los ángulos es invariante).

A propósito de las geometrías no euclídeas hiperbólicas, puede decirse que están representadas por el subgrupo del grupo proyectivo que deja invariante la cónica real, que Klein llama la geometría métrica hiperbólica. En cuanto a la topología, es la geometría de los invariantes del grupo de las transformaciones puntuales continuas. Klein introdujo también en su clasificación algunas geometrías intermedias, como la de las transformaciones de contacto, racionales, etc. Además, consideró geometrías más generales que la proyectiva, entre otras las obtenidas mediante transformaciones de Cremona y homeomorfismos.

Esta notable síntesis tuvo un brillante éxito, y su influencia se manifestó en los diversos campos de la geometría y sus aplicaciones. Sin embargo, esta síntesis brillante deja fuera aspectos principales de la geometría, como la geometría algebraica y la geometría diferencial. Los límites de unificación que aportó a la geometría la noción de grupo de transformaciones fueron superados gracias a los trabajos posteriores de Elie Cartan (1869-1951) sobre la estructura de los grupos de transformaciones finitos y continuos, en los cuales proporciona una clasificación completa de todas las álgebras simples de Lie sobre el cuerpo de los complejos. Mientras tanto, Sophus Lie, colaborador de Klein durante algunos años, propuso una clasificación fundamentada en la teoría de los grupos continuos de transformaciones y especialmente las transformaciones de contacto, como la célebre transformación que lleva su nombre y que transforma las rectas del espacio ordinario en esferas. Además de haber hecho progresar la teoría de los grupos finitos continuos de transformaciones, los grupos de transformaciones de contacto y las transformaciones analíticas, Lie dejó también un álgebra de dimensión finita que lleva su nombre, en la que el producto de dos elementos a y b que se designa con $[a, b]$ verifica, en lugar de la asociatividad, dos condiciones bien determinadas. Hermann von Helmholtz (1821-1894) había desarrollado en 1868 la idea de que se podían caracteri-

zar las propiedades del espacio euclídeo mediante las propiedades de los movimientos considerados como transformaciones puntuales, sin por ello considerar que esas transformaciones constituyeran un grupo. Mostró, además, que si los movimientos de los cuerpos rígidos se hacen posibles en un espacio, entonces la expresión de Riemann para el *ds* en un espacio de curvatura constante es la única posible.

Klein y la topología

La idea de la topología como disciplina matemática independiente aparece en Gauss y Johann Benedikt Listing (1808-1882) y en menor grado en Euler y Vandermonde. Los trabajos de Riemann sobre transformaciones topológicas, orden de conexión, primer esbozo de una clasificación de las superficies a partir de esas transformaciones, variedades de *n* dimensiones, invariantes topológicos de esas variedades, etc., tuvieron gran influencia en la difusión de esta nueva rama y dieron origen a una gran cantidad de investigaciones. Después, sus sucesores sintieron la necesidad de comentar y explicar sus trabajos, y así nacieron las obras de Heinrich Durège y Karl Neumann. Tras haber conocido a Riemann en Italia, en donde este último intentaba recuperar la salud, Enrico Betti (1823-1892) se convirtió en su discípulo y, en su célebre memoria de 1871, trata por primera vez de problemas que provienen de la topología de variedades en *n* dimensiones. A continuación, Möbius define el homeomorfismo, considera y resuelve por primera vez el problema de la clasificación de las líneas y superficies mediante su noción de correlación elemental (transformación), determina un invariante topológico: su orden de conexión, aborda el problema del homeomorfismo entre cuerpos del espacio e introduce rigurosamente, y desde el interior, las superficies uniláteras (la banda de Möbius es un ejemplo de ellas). Finalmente, Camille Jordan publica en 1866 dos importantes memorias que tratan de problemas esenciales para la geometría de situación: deformación de superficies, contornos trazados sobre las superficies, teorema fundamental de la topología de superficies.

La teoría de superficies recientemente introducida por Möbius se desarrolla bajo la influencia de Klein y Ludwig Schläfi (1814-

1895), a quien se debe, en particular, una interesante interpretación intuitiva de las superficies de una cara (superficies dobles) y la caracterización del plano proyectivo como superficie no orientable.

Bajo el impulso de Felix Klein y sus alumnos, la teoría de funciones se desarrolla rápidamente, llevando al *analysis situs* tras sus huellas. Sus investigaciones encierran los principales resultados obtenidos en topología durante el último tercio del siglo XIX. En particular, Klein se interesó por la clasificación de las superficies cerradas a partir del número *p* de Riemann, es decir, el número de secciones cerradas, sin punto de contacto con la frontera y sin punto múltiple. Estudió también las aplicaciones conformes de una superficie cerrada sobre ella misma, y llegó así a escindir el conjunto de las superficies en dos grandes clases, la que contiene las superficies que se separan en dos partes distintas mediante un corte efectuado a lo largo de todas las líneas de corte, y la clase que comprende las superficies para las que esto no se verifica. Klein pudo también tratar las superficies con o sin borde, orientables o no orientables, de la misma manera. Finalmente, describió una superficie que se conoce actualmente con el nombre de «botella de Klein».

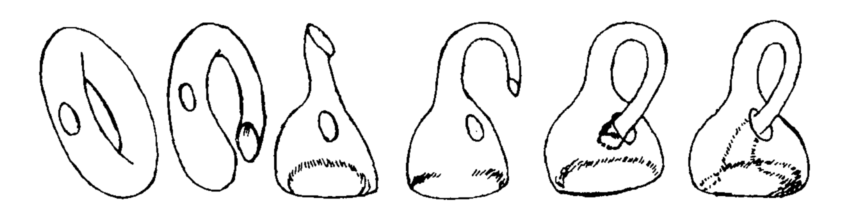


FIGURA 11.1 *Botella de Klein.*

Puede obtenerse una idea de ella retorciendo un trozo de un tubo de caucho y después haciéndole penetrarse a sí mismo de forma que se unan el lado exterior y el lado interior.

Puede construirse esta botella en la imaginación solamente. La figura obtenida, como la banda de Möbius, es una superficie de un solo lado cerrada, la cual debe pues cerrarse sobre sí misma. No conlleva derecho ni revés ni, por consiguiente, interior ni exterior. Notemos, sin embargo, que la botella de Klein perforada a la derecha en la ilustración de la figura 11.1 tiene un agujero y un lado.

PEANO

Giuseppe Peano (1858-1932), lógico y matemático italiano, pasó su infancia en su ciudad natal de Cuneo y después su familia, que constaba de cuatro hijos y una hija, le envió a Turín para terminar sus estudios. A los dieciocho años entró en la Universidad de Turín, en la que obtuvo su diploma, al final de sus estudios, con grandes honores en julio de 1880. A continuación comenzó su carrera en la enseñanza, con un puesto de ayudante en la Universidad de Turín, y en 1886 se hace profesor en la Academia Militar de Turín, que está situada muy cerca de su Alma Mater. En 1890, sucedió a Genocchi en la Universidad de Turín, haciéndose cargo de la cátedra de matemáticas, y permanecerá ya asociado a esta universidad durante muchos años. Como representante oficial de su universidad, de la Academia de Ciencias y de la Academia pro Interlingua, Peano viajó en una ocasión a América para asistir al Congreso Internacional de Matemáticas de Toronto en 1924. Murió en Turín en 1932, a los setenta y cuatro años, después de haberse distinguido sucesivamente en tres campos de actividad: el cálculo diferencial e integral, los fundamentos de las matemáticas y, al final de su vida, las investigaciones lingüísticas.

Los trabajos de análisis de Peano

En 1884 aparece una obra de cálculo diferencial e integral con el nombre de Genocchi, pero en realidad había sido redactada por Peano a partir de los cursos dados por su maestro, por aportaciones importantes de ese último. Genocchi pareció irritado por las añadiduras hechas a sus lecciones y declaró oficialmente que él no era el autor del libro. Peano hizo lo posible por no envenenar el debate. Esta obra contribuyó rápidamente a la celebridad de Peano, e ilustra bien la simplicidad y el rigor que caracterizan sus trabajos. Partiendo de la definición de los números reales de Dedekind, desarrolló el cálculo diferencial e integral de una manera sistemática, formulando cada teorema con la mayor exactitud y precisión y evitando estrictamente recurrir en las demostraciones a las propiedades intuitivas de las curvas. A menudo, cuando la formulación habitual es vaga o las condiciones exigidas no están claramente

enunciadas, Peano se sirve más bien de contraejemplos para mostrar que las afirmaciones que se encuentran en las obras corrientes son incompletas o, simplemente, erróneas. Es así como se encuentran en su libro teoremas y observaciones sobre límites de expresiones indeterminadas en donde resalta errores que se encuentran en las mejores obras de la época. Entre los resultados importantes que aparecen en ese libro pueden citarse una generalización del teorema de la media para las derivadas; un teorema sobre la continuidad uniforme de funciones de varias variables; un teorema sobre la existencia y diferenciación de las funciones implícitas; un ejemplo de una función cuyas derivadas parciales no conmutan; condiciones para expresar una función de varias variables mediante la fórmula de Taylor; un contraejemplo para la teoría habitual de los mínimos; y reglas para integrar funciones racionales cuando las raíces del denominador son desconocidas.

El estudio de los conjuntos de discontinuidad de las funciones es el origen del problema de la determinación de la medida de «lo extenso» o de la longitud de este conjunto, porque «lo extenso» de esas discontinuidades determina las condiciones de integración de una función. La teoría de «lo extenso» y, más tarde, la teoría de la medida, fueron introducidas precisamente para extender la noción de longitud a conjuntos de puntos que no son necesariamente intervalos completos de la recta numérica habitual. Antes de Peano, los matemáticos Du Bois-Reymond, Alex Harnack (1851-1888), Otto Stolz (1842-1905) y Cantor habían propuesto definiciones del concepto de medida y elaborado una teoría más o menos satisfactoria, pero Peano extenderá y perfeccionará esta teoría.

En una obra titulada *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal) (1887), Peano introdujo la medida interior y exterior (extensiones) de la región R como, respectivamente, la menor cota superior de todas las regiones poligonales que contienen en su interior a R y la mayor cota inferior de todas las regiones poligonales contenidas en esta región. Si las extensiones interior y exterior son iguales, este valor común es el área de la región. Por ejemplo, si $f(x)$ es una función positiva o nula en $[a, b]$ entonces, según Peano,

$$\int_{\underline{a}}^{b} fdx = E_i(R) \quad \text{y} \quad \int_{a}^{\bar{b}} fdx = E_j(R)$$

donde la integral de la izquierda es la menor cota superior de las sumas inferiores de Riemann de la función f en $[a, b]$ y la integral de la derecha es la mayor cota inferior de las sumas superiores de Riemann y $E_i(R)$ y $E_j(R)$ son, respectivamente, las extensiones interior y exterior de la región R acotada por la gráfica de f. Así, f es integrable sólo si $E_i(R) = E_j(R)$. Añadamos que esta definición de la extensión se puede aplicar tanto al caso de una dimensión como al caso de n dimensiones. Peano fue el primero que introdujo la noción de «extensión» interior y «extensión» exterior, condición necesaria y suficiente para evaluar una región en términos de extensiones y una interpretación de la integral de Riemann como la medida de un cierto conjunto de puntos del plano cuyas abscisas son todos los valores de x en a, b y las ordenadas son los valores de $f(x)$ correspondientes. La teoría de la «extensión» será desarrollada a continuación por Jordan, después por Emile Borel (1871-1956) y finalmente por Henri Lebesgue (1875-1941), quien generalizará tanto la noción de «extensión» o, más precisamente, el concepto de medida, como la noción de integral, de manera que la integral de Lebesgue será lo suficientemente general como para permitir, por ejemplo, la integración de la función de Dirichlet (1 para x racional y 0 para x irracional en un intervalo $[a, b]$).

En 1888, Peano publicó una memoria titulada *Integración mediante series de las ecuaciones diferenciales...* en los *Mathematische Annalen,* en la cual presenta sus célebres «series de Peano», que permiten expresar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales como la suma de una serie infinita de integrales repetidas. Estas series pueden ser aplicadas a la teoría de las ecuaciones diferenciales de vectores, matrices y sustituciones.

La aritmetización del análisis no sólo llevó consigo la revisión de las definiciones y los conceptos fundamentales, sino que también significó el replanteamiento del concepto de curva. En particular, los ejemplos de funciones continuas pero no derivables encontrados por Bolzano y Weierstrass llevaron a los matemáticos a plantearse la cuestión de qué es una curva. En su curso de análisis de 1887, Jordan propuso una nueva definición de curva: es un conjunto de puntos representado por funciones continuas $x = f(t)$, $y = g(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_1$ con las condiciones de que $f(t) \neq f(t')$ y $g(t) \neq g(t')$ para t, t' en (t_0, t_1) o que para cada par (x, y) exista un valor de t. Esta

curva es llamada comúnmente «curva de Jordan». Añadió también la noción de «curva cerrada», que impone que

$$f(t_0) = f(t_1) \quad \text{y} \quad g(t_0) = g(t_1),$$

además de enunciar el teorema de que una curva cerrada divide al plano en dos partes, una interior y otra exterior.

Aunque la definición de curva de Jordan es satisfactoria para numerosas aplicaciones, se reveló demasiado amplia, como atestigua el ejemplo célebre dado por Peano en 1890 en su corta memoria titulada *Sobre una curva que llena toda una área plana.* La determina así: «Sean dos funciones unívocas continuas x e y de una sola variable t, las cuales, cuando t varía en el intervalo (0, 1), toman todos los pares de valores tales que $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Si, según la costumbre, utilizamos el término "curva continua" para el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas vienen dadas por las funciones continuas de una variable, se obtiene de esta manera un arco curvilíneo que pasa por todos los puntos de un cuadrado». La interpretación geométrica de esta curva fue dada por Arthur M. Schoenflies (1853-1928) y Eliakim H. Moore (1862-1932) en 1900, mientras que la forma analítica de f y g fue dada por Ernesto Cesaro (1859-1906).

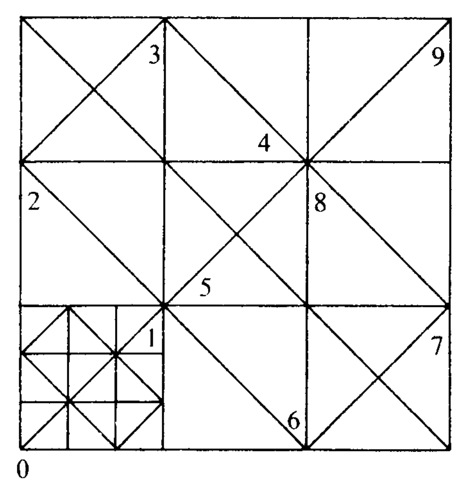


FIGURA 11.2

Se trata de aplicar el intervalo [0, 1] en los nueve segmentos de la figura 11.2 y en cada pequeño cuadrado descompuesto de la misma manera que para el cuadrado total, el segmento 1, por ejemplo, pero asegurándose de que la descomposición de un cuadrado a otro sea continua. Se repite así el procedimiento hasta el infinito, y el conjunto de los puntos cubre el cuadrado original. La expresión analítica de Peano equivale, salvo algunos detalles, a expresar t como una serie de términos de la forma

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n}$$

y las funciones $x(t)$ e $y(t)$ como

$$x(t) = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \ldots \; ; \; y(t) = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots$$

donde

$$\{b_n\} \quad \text{y} \quad \{c_n\}$$

son dos sucesiones definidas, respectivamente, mediante

$$\begin{array}{ll} b_1 = a_1 & c_1 = k^{a_1}a_2 \\ b_2 = k^{a_2}a_3 & c_2 = k^{a_1+a_3}a_4 \\ \quad \ldots & \quad \ldots \\ \quad \ldots & \quad \ldots \\ b_n = k^{a_2+a_4+\ldots}a_{2n-1} & c_n = k^{a_1+a_3+\ldots}a_{2n} \end{array}$$

en donde k es un operador que transforma 0, 1 y 2 en su complemento con respecto a 2 de forma tal que $k0 = 2, k1 = 1, k2 = 0$. En 1879, Eugen E. Netto (1846-1919) demostró que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ no son continuas, o que una correspondencia biunívoca entre t y los pares (x, y) es imposible. En nuestros días, la curva de Peano, así como otros objetos matemáticos «monstruosos» encontrados por Cantor y Hausdorff, encuentran aplicaciones en hidrología, turbulencia, anatomía, botánica y otras disciplinas. (Véase Mandelbrot, en la bibliografía.)

Los fundamentos de las matemáticas en Peano

Las investigaciones de Peano en análisis infinitesimal parecieron convencerle de la necesidad de analizar los fundamentos de las matemáticas sobre la base de un sistema formal edificado mediante un lenguaje adecuado para eliminar las ambigüedades que se encuentran en el lenguaje corriente. En una primera etapa, Peano se consagró a reescribir las matemáticas en términos de un nuevo simbolismo apropiado a la naturaleza misma de las matemáticas, es decir un lenguaje preciso, universal y estructurado de manera que respete la estructura de la demostración matemática. Después, en una segunda etapa, elaboró y utilizó una lógica simbólica con el fin de traducir el paso de las premisas a una conclusión a través de una cadena de inferencias de una expresión simbólica a otra mediante un cálculo casi algebraico. Después de ello, Peano estaba en condiciones de reescribir las teorías matemáticas en una forma completamente nueva: partiendo de un número restringido de ideas primitivas representadas mediante símbolos apropiados, sus ideas son simplemente enumeradas sin ser definidas; después sigue un pequeño número de proposiciones iniciales que comprenden ideas primitivas, y cuya lista es establecida al comienzo de la teoría; el desarrollo de la teoría se hará por inferencia que se apoya en proposiciones formuladas simbólicamente, bien a partir de las proposiciones iniciales o primitivas (axiomas), bien a partir de proposiciones ya demostradas (inferidas) siguiendo los principios enunciados de la lógica simbólica. Se pueden introducir nuevos entes matemáticos todavía en desarrollo, con tal que estén bien definidos.

Los primeros estudios de Peano sobre lógica simbólica estuvieron influenciados por el cálculo geométrico de Möbius y Grassman y *Der Operationskreis der Logikkalkuls* (El campo de operación del cálculo lógico) de Schröder. Por otra parte, en 1888, publicó una excelente presentación del «cálculo baricéntrico» de Möbius y del célebre tratado *Die lineale Ausdehnungslehre...* (La teoría de la extensión lineal) de Grassman, precedida de una exposición de lógica simbólica inspirada en la obra de Boole y Schröder y de los métodos del álgebra y del cálculo geométrico. Al año siguiente publicó un pequeño libro escrito en latín con el título *Arithmetices principia, nova methoda exposita,* que constituye su primera tentativa de presentar una axiomatización de las matemáticas en un

lenguaje simbólico. Después de una presentación de las nociones y fórmulas lógicas, Peano expone la aritmética en notación simbólica. Pero Peano va más lejos, porque trata también de las fracciones, de los números reales e incluso de la noción de límite y de las definiciones de la teoría de conjuntos.

En 1891 fundó la *Rivista di Matematica,* una revista de matemáticas que le permitió reunir un equipo de discípulos de valor, como Burali-Forti, Bettazzi, Vacca, Giudice, Voilati, A. Padoa, quienes le secundaron en la preparación de su *Formulario de matemática.* Este *Formulario* apareció sucesivamente en cinco ediciones, y en 1894 aparecía una introducción titulada *Notaciones de lógica matemática. Introducción al formulario de matemática.* En 1895 se publicó la primera edición completa en nueve secciones, seguida por una segunda editada en tres partes (1897, 1898 y 1899); las tres últimas ediciones aparecieron en 1901, 1902-1903 y 1908, respectivamente. *El formulario de matemática* es un compendio de los principios de la lógica y de los resultados importantes de las diferentes ramas de las matemáticas, y el conjunto está presentado en un lenguaje formalizado gracias a un simbolismo ingenioso y apropiado.

La lógica matemática de Peano

La lógica matemática de Peano es más bien elemental, sobre todo si se la compara con la que presentan Russell y Whitehead en los *Principia mathematica* (1910). Sin embargo, introdujo los símbolos y las nociones esenciales que le permitieron inventar un sistema de signos capaces de enunciar todas las proposiciones de lógica y de matemáticas sin recurrir al lenguaje ordinario.

En el nivel del simbolismo, se le deben, en particular, los símbolos siguientes: $\in$ para la pertenencia de un elemento a un conjunto; $\subset$ designa la inclusión de un conjunto en otro; $\cup$ simboliza la reunión de dos conjuntos, y $\cap$ es la intersección de dos conjuntos. Se sirvió también de letras para designar las proposiciones y las formas proposicionales o funciones de enunciado, e introdujo la notación *i* para cuantificar un predicado. Sin embargo, la notación *i,* como las de la negación ($-$), la implicación ($\supset$), y la no pertenencia ($\ni$), no fueron conservadas por sus sucesores. Aplicó su cuantificación tanto a condicionales como a bicondicionales.

Peano también introdujo innovaciones clasificando de forma sistemática las proposiciones lógico-matemáticas: axiomas, lemas, teoremas, etc., además de introducir la utilización de puntos como abreviaturas para varios paréntesis. En 1897 Peano introdujo una distinción entre una variable «actual» y una variable «aparente», que corresponde actualmente a la distinción entre variable libre y variable ligada.

Su lógica simbólica comprende fórmulas del cálculo de proposiciones, del cálculo de clases y algunas fórmulas de la teoría de la cuantificación. Su notación es netamente superior a la de Boole y Schröder, y marca la transición hacia la lógica moderna (que será desarrollada y mejorada por Russell); en particular, su notación para el cuantificador universal es nueva y muy cómoda. Subrayemos la ausencia de reglas de inferencia, lo que implica que las fórmulas se enumeran simplemente; en particular, la ausencia de la regla del *modus ponens* es muy notable. En su *Formulario,* Peano intentó demostrar las fórmulas lógicas, pero sus demostraciones se resienten de la ausencia de las reglas de inferencia. La contribución de Peano al desarrollo de la lógica propiamente dicha es menor, si se compara con la de Frege.

Peano se sentía seguramente orgulloso de la invención de su sistema de signos, y refiriéndose a Leibniz, escribió las palabras siguientes en su Introducción al volumen II de su *Formulario:*

> Después de dos siglos, este «sueño» del inventor del cálculo infinitesimal se ha convertido en realidad... Por fin hemos llegado a culminar el análisis con ideas de lógica... representándolas todas mediante los signos $\in$, $\supset$, $=$, $\cup$, $\cap$, $-$, Λ, los cuales todavía se pueden reducir [...] Tenemos, pues, la solución del problema planteado por Leibniz. Digo «la solución» y no «una solución», porque es única. La lógica matemática, la nueva ciencia compuesta con sus investigaciones, tiene como objeto las propiedades de las operaciones y las relaciones lógicas. Su objeto es, pues, un conjunto de verdades y no de convenciones.

Peano afirma en el Prefacio a sus *Arithmetices principia* de 1889 que la teoría de los enteros de Dedekind, contenida en su obra titulada *Was sind und was sollen die zahlen* de 1888, le fue muy útil porque, según dice, las cuestiones relativas a los fundamentos de los números se examinan en ella con gran perspicacia. Subrayemos que en este tratado Dedekind utilizó las ideas conjuntistas de Cantor,

pero su enfoque era tan complicado que no se prestó apenas atención a esa obra.

Si bien es cierto que los trabajos de Peano influyeron en el desarrollo futuro de la lógica simbólica y, en particular, en los trabajos de Frege y Russell sobre la edificación de las matemáticas mediante la lógica, se debe también señalar que Peano, contrariamente a éstos, consideraba que la lógica debía servir más bien a las matemáticas como medio de expresar las teorías matemáticas de una manera más apropiada. El fin del método axiomático consistía en clarificar la teoría, precisarla y hacerla más fácil de aprender.

En 1891, dos años después de la publicación de sus *Arithmetices principia,* Peano publicó en la *Rivista di Matematica* una memoria titulada *Sul concetto di numero* (Sobre el concepto de número) en la que simplifica su sistema eliminando el término indefinido de la igualdad (=), y los axiomas relativos a ese término. Peano vuelve a tomar, pues, su sistema y comienza con tres términos no definidos (primitivos) (utilizaremos su notación definitiva de 1901): cero: 0, número: N_0, sucesor de a: $a + 1$. El conjunto de los postulados de base pasa de cinco a seis en 1901 con la adición de: $N_0 \in Cls$, es decir, los números naturales forman una clase. He aquí, pues, esos postulados:

0) $N_0 \in Cls;$
1) $0 \in N_0;$
2) $a \in N_0 \cdot \supset \cdot a^+ \in N_0$, donde a^+ es idéntico a $a + 1$;
3) $S \in Cls \cdot 0 \cdot \in S : x \in S \cdot \supset_x \cdot x^+ \in S : \supset \cdot N_0 \supset S;$
4) $a, b \in N_0 \cdot a + 1 = b + 1 \cdot \supset a = b;$
5) $a \in N_0 \cdot \supset \cdot a + 1 - = 0.$

Estos postulados pueden traducirse como sigue:

0) los números naturales forman una clase;
1) cero es un número;
2) si a es un número, su sucesor es también un número;
3) sea S una clase y 0 un elemento de esa clase tal que si x es un número que pertenece a S, se deduce de ello que para cualquier x su sucesor pertenece también a la clase; entonces, todo número está en S. Este postulado se llama «principio de inducción»;

4) sean a y b dos números; si sus sucesores son iguales, entonces a y b son iguales;
5) el sucesor de un número no es nunca igual a cero.

Señalemos que Peano, y más tarde Hilbert, utilizaron el número cero como primer elemento de los naturales, mientras que Dedekind, por el contrario, parte del número 1, lo que corresponde al uso habitual en nuestros días. Pero entre las dos convenciones, la elección no tiene ninguna importancia en el plano teórico. Peano reescribe la aritmética partiendo de sus tres términos primitivos, de los seis postulados y del concepto de «definición recursiva». Una función aritmética $f(n)$ está definida de una manera recursiva si 1) se ha dado una definición de $f(0)$, y 2) $f(n^+)$ es definida en términos de $f(n)$ mediante funciones que están ya disponibles. Intuitivamente, una definición recursiva de $f(n)$ proporciona un medio de determinar sucesivamente los valores de $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ... de la función. Peano utilizó este método para definir la suma $a + b$ y el producto $a \times b$ de dos números naturales a y b como sigue:

$$a + 0 = a, \qquad a + (b^+) = (a + b)^+$$

$$a \times 0 = 0, \qquad a \times (b^+) = (a \times b) + a$$

Estableció entonces las propiedades habituales de asociatividad, conmutatividad y distributividad de los números naturales. A continuación, pasó a la definición de los enteros y de los números racionales sirviéndose de operaciones más que definiéndolos como pares ordenados de números reales. Así, a la combinación del signo del opuesto (inverso) —y del número positivo b, Peano le da el nombre de «número negativo», porque $-b$ es una operación que, aplicada a un número no inferior a b, produce un número. Un número racional a/b es considerado por Peano como aquél que representa la operación compuesta «multiplicar por a y dividir por b». En cuanto a los números reales, los define como la más pequeña cota de una clase de números racionales, cada uno de ellos inferior a un número dado, excluyendo $+\infty$ y $-\infty$.

Los trabajos de Peano sobre los fundamentos de las matemáticas y la lógica influyeron grandemente en las investigaciones emprendidas por los matemáticos italianos, e inspiraron a inteligencias tan preclaras como las de Russell y Whitehead.

Peano abandonó sus enseñanzas en la Academia Militar en 1901 y, algunos años más tarde, dejó de impartir sus cursos en la Politécnica porque sus estudiantes se rebelaron contra la utilización frecuente de los símbolos en su enseñanza. Decidió incluso aprobarlos a todos esperando que ello les satisfaría, pero no fue una buena idea y se resignó, pues, a abandonar su puesto de profesor en la Universidad de Turín.

Desde hacía ya algunos años, consagraba mucho tiempo y energía a la búsqueda de una lengua internacional tan racional y fácil de aprender como fuera posible. Sus investigaciones condujeron al «latín sin flexiones», llamado por él *interlingua,* es decir que el vocabulario es el que se encuentra en un diccionario latino sin gramática, los nombres no se declinan y los verbos no se conjugan (los nombres toman la forma invariable del ablativo singular latino y los verbos la del imperativo singular) y los tiempos se expresan mediante adverbios y los casos mediante proposiciones. El *Formulario* cambió incluso de título, y en 1908 apareció con la denominación de *Formulario mathematico;* en sus publicaciones posteriores Peano utilizará de manera consistente el «interlingua».

FREGE

Gottlob Frege (1848-1925) nació en Wismar y durante toda su vida enseñó matemáticas en la Universidad de Jena, en Alemania. Se preocupó por clarificar las relaciones más profundas y más fundamentales entre los conceptos más elementales y las proposiciones en matemáticas. Frege escribió una serie de obras sobre los fundamento de la aritmética: *Begriffsschrift* (Escritura de los conceptos e ideografía) (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* (Los fundamentos de la aritmética) (1884) y *Grundgesetze der Arithmetik* (Las leyes fundamentales de la aritmética) (vol. I, 1893; vol. II, 1903). En su «escritura de los conceptos», construye un lenguaje formalizado del pensamiento puro, es decir un sistema de símbolos más regular que el lenguaje ordinario, y mejor adaptado con vistas a asegurar la exactitud en la deducción, porque permite lo esencial solamente, el contenido conceptual, en oposición a la importancia dada a la retórica. Volverá a ocuparse de ese cálculo lógico, enriqueciéndolo, en sus *Leyes fundamentales de la aritmética,* sobre todo para tener

en cuenta su nueva teoría «del sentido y la denotación», desarrollada en 1892, y la adopción de ideas nuevas como el «campo de los valores» de una función de enunciado que exigía la introducción de nuevos símbolos. Las otras partes de su obra se refieren esencialmente a los fundamentos de las matemáticas.

Su Begriffsschrift

Es el primer tratado que Frege escribió en el campo de la lógica, y sus ochenta y ocho páginas constituyen probablemente uno de los textos más importantes consagrados al desarrollo de la lógica en el siglo XIX, junto con el de Boole. En él se encuentran, entre otras cosas, la primera exposición del cálculo de proposiciones y la de la teoría de la cuantificación, una teoría de la identidad, el cálculo de predicados, el análisis de la proposición en términos de función y de argumento, un sistema de lógica en el que las inferencias se efectúan exclusivamente según la forma de las expresiones y los elementos de una teoría general de las sucesiones. Sus investigaciones en lógica matemática estuvieron motivadas, según parece, por sus estudios sobre el concepto de número y, en particular, por su tentativa de emprender un análisis lógico de la noción de sucesión. La imprecisión y las ambigüedades del lenguaje ordinario constituían un obstáculo importante hacia el fin proyectado, y por ello decidió proveerse de un instrumento más apropiado: es lo que llamó su «escritura de los conceptos», un lenguaje que trata del contenido conceptual. En el subtítulo, dice que esta escritura de los conceptos es una lengua del pensamiento puro, concebida a imagen de las fórmulas de la aritmética, es decir construida a partir de símbolos específicos, que se manipulan según reglas bien definidas. Frege formuló claramente su intención en una memoria de 1882, en los siguientes términos:

> Mi intención no es representar una lógica abstracta mediante fórmulas, sino expresar un contenido mediante símbolos escritos de una manera más precisa y más clara de lo que sería posible utilizando palabras. De hecho, lo que he querido crear no es un simple *calculus ratiocinator* sino una *lingua characterica* en el sentido de Leibniz.

En su Prefacio, Frege expone los motivos que le impulsaron a crear su lenguaje simbólico e insiste en la importancia del contenido conceptual para la comprensión de su «escritura de los conceptos». Más adelante, compara su sistema con el lenguaje ordinario y, mediante una analogía entre el ojo y el microscopio, pone de relieve el papel específico reservado a ese lenguaje. A continuación, haciendo alusión a la característica universal de Leibniz, Frege pretende que este último «reconoció las ventajas de un modo de designación adecuado, y quizá incluso las sobreestimó. Su proyecto de una característica universal [...] era demasiado gigantesco para que su tentativa de ejecutarlo hubiera podido ir más allá de simples preliminares». Por el contrario, según Frege, es preferible restringir el uso de este instrumento a ciertos campos del conocimiento. En particular, Frege pensaba que su lenguaje formalizado podía ser utilizado eficazmente en campos como la geometría, el cálculo diferencial e integral, la mecánica, etc., con tal que se hicieran las adaptaciones menores que se requirieran para ello. Frege era muy consciente de que su enfoque podía parecer extraño a los lógicos, y las desviaciones que podían encontrarse en él, con respecto a las presentaciones tradicionales, encontraban su justificación, según Frege, en el hecho de que la lógica había estado siempre estrechamente ligada al lenguaje ordinario y a la gramática. Afirma, entre otras cosas, que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de *argumento* y *función,* respectivamente, resistirá al paso del tiempo. Termina su prefacio diciendo que ha sido a partir de la aritmética como ha llegado a una cadena de ideas que le han conducido a su «escritura de los conceptos» (ideografía) y que por ello tiene la intención de aplicarla, en primer lugar, a la aritmética, con objeto de proporcionar un análisis detallado de los conceptos de esta disciplina y un fundamento más profundo de sus teoremas. Finalmente, anuncia que otras investigaciones serán consagradas a elucidar los conceptos de número, cantidad, etc., y que serán el objeto de publicaciones posteriores.

En el artículo 1, introduce su notación, distinguiendo dos especies de símbolos: los que pueden significar diferentes objetos, las letras habituales, y los que poseen una significación bien determinada, y añade que las letras servirán principalmente para expresar generalidades. Pasa a continuación a su notación para representar el concepto de juicio. Un juicio se expresará siempre mediante el signo

⊢, el cual se colocará a la izquierda del símbolo o del conjunto de símbolos en el que se da el contenido del juicio. Por ejemplo, sea ⊢*A*, que significa que «los polos magnéticos opuestos ejercen una atracción uno sobre otro», mientras que —*A* no expresa un juicio sino que nos proporciona o hace pensar en la idea de la atracción mutua entre dos polos magnéticos opuestos. Por consiguiente, si se omite la barra vertical al principio, la barra horizontal sola se llama la «barra-contenido», y sirve para mostrar que el o los signos de la derecha han sido considerados por el autor, sin afirmación o negación, mientras que la barra vertical se llama la «barra-juicio». Además, Frege pone de relieve el hecho de que «todo lo que sigue a la barra-contenido» debe tener un contenido que pueda convertirse en juicio.

En el artículo 3, aborda el problema de la distinción entre el sujeto y el predicado y, contrariamente a la mayoría de sus predecesores, Frege considera que el «contenido conceptual» de los dos enunciados:

Los griegos derrotaron a los persas

y

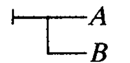
Los persas fueron derrotados por los griegos

es el mismo, porque uno de ellos puede sustituir al otro como premisa sin afectar la validez del juicio, y esto es lo que es importante para el tipo de lenguaje en el que la proposición «Arquímedes pereció en la toma de Siracusa» fuera expresada mediante «la muerte violenta de Arquímedes en la toma de Siracusa es un hecho». Puede distinguirse aquí, si se quiere, entre el sujeto y el predicado, pero es el sujeto el que encierra todo el contenido, y el predicado sirve sólo para transformar el contenido en un juicio. Un lenguaje así, añade, tendría solamente un predicado para todos los juicios, es decir, «es un hecho». En su lenguaje, no habría, pues, más que un solo predicado, común a todos los juicios, el signo ⊢.

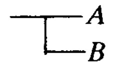
Pasa a continuación al condicional y a la negación, que constituyen las constantes lógicas para su cálculo de proposiciones. Si *A* y *B* significan contenidos que pueden convertirse en juicios, hay cuatro casos posibles diferentes:

A es afirmado y *B* es afirmado
A es afirmado y *B* es negado
A es negado y *B* es afirmado
A es negado y *B* es negado

Introduce entonces una expresión compleja



que representa el juicio de que «la tercera de esas posibilidades no se realiza pero una de las otras tres es un hecho». De la misma manera, si

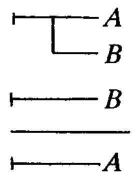


se niega, entonces se niega *A* y se afirma *B*. Además, reconoce que el signo $\vdash\!\sqsubset^{A}_{B}$ podría traducirse, en ciertos casos, como «si», pero que, de todas formas, la relación causal implícita en el «si» no está expresada en el signo. A la barra vertical que une las dos horizontales la llama la «barra-condicional» y si separamos ese signo complejo en partes, se tiene



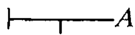
es decir, a) la barra-juicio; b) directamente adyacente, la barra-contenido para la significación del conjunto; c) la barra-condicional; d) las barras-contenido de las dos proposiciones *A* y *B*.

Frege sostiene que $\vdash\!\sqsubset^{A}_{B}$ no es equivalente a «si *A* entonces *B*» y observa que los dos juicios $\vdash\!\sqsubset^{A}_{B}$ y $\vdash\!\!-B$ en conjunto implican por inferencia el nuevo juicio $\vdash\!\!-A$, porque el primero excluye la tercera posibilidad mientras que el segundo juicio excluye la segunda y cuarta posibilidades. Por ello escribe este tipo de inferencia de esta manera



y aunque, según Aristóteles, se puedan enumerar un buen número de modos de inferencia en lógica, Frege emplea solamente el modo anterior, al menos en todos los casos en los que un nuevo juicio es inferido a partir de más de un juicio. Este modo particular es, evidentemente, el *modus ponens* de la lógica tradicional, y Frege recurre sólo a esta inferencia porque, según dice, «no es mi intención ocuparme de todas las maneras de enunciar una proposición psicológica; deseo solamente decidir sobre una cuestión de forma de la manera más apropiada».

Frege presenta a continuación la negación añadiendo una pequeña barra vertical unida por debajo a la barra-contenido para mostrar que «el contenido no se realiza». Así, por ejemplo,



significa «*A* no se realiza», y la pequeña barra vertical se llama la «barra-negación». Después, combina la «barra-contenido», la condicional y la «barra-negación» de diferentes maneras, lo que le permite traducir mediante la expresión

```
├┬─┬┬─ A
    └── B
```

el «*A* y *B*», mientras que el «*A* o *B*» (inclusivo) se traduce mediante la expresión

```
├───┬── A
    └┬─ B
```

La identidad del contenido se expresa mediante el signo ├── ($A \equiv B$), que significa «el nombre de *A* y el nombre de *B* tienen el mismo contenido conceptual», donde *A* y *B* son nombres cualesquiera. Es, propiamente hablando, la equivalencia entre *A* y *B* lo que permite sustituir en cualquier momento uno por otro.

Introduce a continuación el importante concepto de función, en el artículo 9 de su tratado, mediante ejemplos extraídos de la química, la física y la aritmética, y Frege pone de manifiesto la distinción entre la noción de argumento y la de función. Por ejemplo, si comparamos las dos proposiciones: «El número 20 puede ser representado mediante la suma de cuatro cuadrados» y «Todo entero positivo puede ser representado mediante la suma de

cuatro cuadrados», parece posible, según Frege, considerar «ser representable mediante la suma de cuatro cuadrados» como una función que, en un caso tiene como argumento «el número 20», y en el otro caso, «Todo entero positivo». Pero Frege hace la observación de que estos dos argumentos posibles no son conceptos del mismo rango, es decir que lo que se afirma con respecto al número 20 no puede afirmarse en el mismo sentido con respecto a todo entero positivo, salvo en ciertas circunstancias, y que el sentido está ligado al contexto de la frase. Por consiguiente, cada frase por sí misma no encierra una idea independiente y no puede, pues, ser considerada como un argumento de la función o de cualquier otra función.

Frege expresa una función indeterminada del argumento A como $\phi(A)$, mientras que $\psi(A, B)$ representa una función no determinada de los dos argumentos A y B tomados en ese orden, porque en general $\phi(A, B)$ es diferente de $\phi(B, A)$. Se puede leer $\vdash\!\!\!-\!\!-\phi(A)$, como que «$A$ posee la propiedad de ϕ» y $\vdash\!\!\!-\!\!-\psi(A, B)$ puede traducirse como que «B es el resultado de una aplicación del procedimiento ψ al objeto A». El principal mérito de tal simbolismo, según él, es que permite expresar una mayor generalidad de una manera más satisfactoria que la que pueden ofrecer los lenguajes ordinarios. Pasa a continuación a la expresión de esta generalidad mediante la introducción de la cuantificación de las funciones de enunciado. La expresión $\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\phi(\mathfrak{a})$ significa que la función es un hecho cualquiera que sea el argumento que se considere. Aquí Frege parece confundir el símbolo y lo que es simbolizado, porque había ya considerado que $\phi(A)$ podía ser una función tanto del argumento ϕ como del argumento A. Este es precisamente el punto sobre el que Russell hará recaer su célebre paradoja, la cual será comunicada a Frege en una carta redactada el 16 de junio de 1902. En resumen, equivale a decir «todo es ϕ». Además, toda sustitución admisible en la función ϕ debe de producir una expresión que encierre un contenido susceptible de juicio, y la letra gótica que se inserta en la concavidad sirve para ligar la variable con la función. El cuantificador universal puede colocarse en diferentes posiciones en la expresión como, por ejemplo,

$$\begin{array}{l}\vdash\!\!\top\!\!-A\\ \;\;\;\llcorner\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-X(\mathfrak{a})\end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l}\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!\top\!\!-A(\mathfrak{a})\\ \;\;\;\;\;\;\llcorner\!\smile^{\mathfrak{e}}\!\!-B(\mathfrak{a},\mathfrak{e})\end{array} \quad \text{ó} \quad \vdash\!\!\top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\phi(\mathfrak{a})$$

y esto es muy importante, porque así se pueden producir un gran número de enunciados interesantes con ayuda de este nuevo simbolismo. Frege llega de esta manera a elaborar una teoría de la cuantificación en la que se obtienen numerosas combinaciones como, por ejemplo

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\!\!-\Lambda(\mathfrak{a})$$

que significa que hay al menos un valor del argumento para el cual $\Lambda(\mathfrak{a})$ verifica

$$\vdash\!\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\top\!\!-P(\mathfrak{a})\\ \llcorner\!\!-\Lambda(\mathfrak{a})\end{array}$$

y al menos un Λ no es *P*.

Frege está ahora en posesión de un simbolismo apropiado, y puede emprender la presentación de su cálculo de proposiciones a partir de seis axiomas y dos reglas de inferencia, el *modus ponens* y una regla de sustitución implícita. La tercera parte de su tratado es una introducción a la teoría de las sucesiones matemáticas y representa un primer paso hacia la reconstrucción lógica de la aritmética.

Los Grundgesetze der Arithmetik

Cuando Frege publica estas leyes fundamentales de la aritmética en 1893 y 1903, ya había desarrollado mientras tanto una nueva teoría del «sentido y la denotación», publicada bajo el título de *Uber Sinn und Bedeutung* en 1892. En su *Begriffsschrift,* Frege establece una distinción entre un juicio o una afirmación y algo que él llama un «contenido». Sin embargo, no especifica claramente la comprensión de este término, aunque lo oponga no sólo al juicio sino también al signo mediante el que se expresa el contenido. Pero Frege se da cuenta de que la definición de la identidad del contenido mediante un signo no es satisfactoria, y de que debe abandonar este concepto para evitar las ambigüedades lógicas inherentes a la aplicación de esta noción de equivalencia. Es así como desarrolla su teoría del

«sentido y la denotación» de las expresiones verbales, en la que establece una nueva distinción entre sentido (*Sinn*) y denotación (*Bedeutung*).

Frege considera los nombres propios como palabras simples o frases descriptivas que se refieren a objetos definidos del pensamiento. El «sentido» de un nombre es el que proporciona la palabra o la frase, es algo por lo cual el objeto se hace notar, pero no es una idea en el sentido de una imagen o una cosa personal pensada por un individuo. La «denotación» (referencia) es el objeto, si existe, al cual se refiere el nombre, y para Frege nada existe si no puede ser percibido, como los números, los lugares, los instantes, los periodos de tiempo, etc. Por ejemplo, los dos nombres «estrella de la mañana» y «estrella de la tarde» tienen sentidos diferentes, pero sus denotaciones (referencias) son las mismas, el objeto planeta Venus. Además, los números « 2^2 » y $2 + 2$ no tienen el mismo sentido, y lo mismo ocurre con los $2^2 = 4$ y $2 + 2 = 4$, pero el número 4 es la denotación de los dos. Se ve que el término «denotación» y la expresión «nombre propio» de Frege son prácticamente equivalentes.

Frege aplica luego esta distinción a las proposiciones, a las afirmaciones. El «sentido» de un enunciado o una proposición es, según Frege, su contenido, es decir, la significación de las palabras en el sentido ordinario del término, mientras que la «denotación» (referencia) es su «valor de verdad». Las proposiciones son efectivamente consideradas por Frege como «nombres», y así los nombres « $2^2 = 4$ » y « $3 > 2$ » designan el mismo valor de verdad, lo que él llama «la Verdad», y por el contrario, los nombres « $3^2 = 4$ » y « $1 > 2$ » designan el mismo valor de verdad, «la Falsedad». En resumen, «todo enunciado declarativo que se refiera a la denotación de sus palabras es [...] debe ser considerado como un nombre propio, y su denotación, si existe, es o bien la Verdad o bien la Falsedad». La introducción del concepto de valor de verdad fuerza a Frege a modificar su simbolismo a fin de poder representar simbólicamente el valor de verdad de cualquier proposición. Así, Frege coloca el símbolo $\vdash$ delante del nombre de valor de verdad como en el ejemplo siguiente

$$\vdash\!\!\!\text{—}\, 2^2 = 4$$

para afirmar que el cuadrado de 2 es 4. El «juicio» es entonces

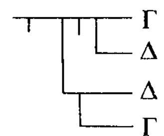
distinto del «pensamiento»: un juicio es el reconocimiento de la verdad de un pensamiento. Se presentan a continuación las combinaciones siguientes para hacer más explícito el papel del simbolismo en la denotación del valor de verdad: $-\Delta$ designa la verdad si Δ es verdad, en caso contrario designa la falsedad si Δ no es cierto; $-\xi$ es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad o un concepto. Por ejemplo

$$-2^2 = 4$$

designa la misma cosa que $2^2 = 4$, es decir, la verdad. El valor de la función $\top\xi$ debe ser falso para todo argumento para el que la función $-\xi$ es verdad. Por ejemplo

$$\top 2^2 = 5$$

es verdad y $\vdash\!\!\top\!\!-\, 2^2 = 5$ puede traducirse como «$2^2 = 5$ no es la verdad» ó «el cuadrado de 2 no es 5». Después, Frege modifica el signo de identidad y adopta en su lugar el signo convencional de la igualdad. Por ejemplo, $\Gamma = \Delta$ debe denotar la verdad si Γ es lo mismo que Δ, y en caso contrario denota la falsedad. El hecho de introducir un simbolismo como $-\Delta$ para designar el valor de verdad de una proposición cualquiera aumenta la flexibilidad de su cálculo lógico. Por ejemplo, la bicondicional $\Delta \longleftrightarrow \Gamma$ se escribe simplemente como $-\Delta = -\Gamma$ en lugar de



Entre las otras innovaciones importantes de sus *Grundgesetze,* se puede subrayar la notación particular empleada para designar el «campo» de los valores de una función. Toda función de enunciado $\phi(\xi)$ asocia a cada valor de su argumento ξ un valor de verdad bien determinado, verdadero o falso, y si dos funciones $\phi(\xi)$ y $\psi(\xi)$ asignan los mismos valores de verdad para todos los valores posibles de ξ, se dirá naturalmente que tienen el mismo «campo» de valores. Fue el primero que distinguió entre el enunciado de una proposición y la aserción de que esta proposición es verdadera. Frege llegó así a introducir una nueva expresión $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$, que simboliza el «campo» de

los valores de $\phi(\xi)$, en la que la letra «ε» es una variable ligada que puede sustituirse por cualquier letra apropiada. En general, propone que la combinación de los signos

$$\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon) = \grave{a}\psi(a)$$

tiene la misma designación que

$$\smile^{a}\!\!-\phi(a) = \psi(a).$$

El «campo» de los valores no debe ser confundido con el conjunto de los valores tomados por la función para diferentes argumentos porque, según Frege, el campo de un concepto (concepto: función de un argumento cuyos valores son todos valores de verdad) es la extensión en el sentido habitual de los lógicos, es decir el conjunto de todos los objetos comprendidos bajo él. Además, un concepto puede tomar por valor uno sólo o algún otro de los valores de verdad, mientras que su «campo» es el conjunto antes mencionado. Así, $\grave{\varepsilon}\phi(\varepsilon)$ proporciona una expresión formal para la extensión de la función de enunciado $\phi(\varepsilon)$, y esta expresión es considerada por Frege como una de las más fructíferas extensiones de su «escritura de los conceptos».

Otra innovación importante aportada por este matemático es la distinción entre un objeto x y el singletón $\{x\}$ que contiene precisamente a x como elemento. Si existe un objeto Δ tal que $\grave{\varepsilon}\phi(\Delta = \varepsilon)$ es lo mismo que ε, es decir, para todo argumento idéntico con un «campo» $\grave{\varepsilon}(\Delta = \varepsilon)$, donde Δ es un objeto cualquiera, el valor de función es Δ, y se denota mediante $\backslash\varepsilon$; pero si no existe tal objeto Δ, entonces el propio ε es el valor de $\backslash\varepsilon$. Por consiguiente, $\backslash\grave{a}\phi(a)$ es el único miembro de $\grave{a}\phi(a)$ si este último es lo que se llama una «clase unitaria», y por el contrario, $\backslash\grave{a}\phi(a) = \grave{a}\phi(a)$, resultado que preserva el principio del tercero excluido. Por ejemplo,

$$2 = \backslash\grave{\varepsilon}(\varepsilon + 3 = 5)$$

es la verdad, porque 2 es el único objeto que está comprendido bajo el concepto «lo que aumentado en 3 proporciona 5».

Añadamos que Frege reconoció la existencia de las funciones de funciones o funciones de segundo orden, pero su notación para el «campo» de las funciones le permitió no sólo evitar hablar de funciones de diferentes niveles, sino también afirmar lo que tenía que decir haciendo referencia a los objetos. El conjunto de los

axiomas utilizados por Frege en sus *Grundgesetze* difiere del que se encuentra en su primer tratado en el sentido de que las reglas de inferencia del *modus ponens* y del principio de sustituciones no constituyen ya las únicas reglas de inferencia de su sistema. Por razones prácticas de brevedad y eficacia, Frege sustituye ciertos axiomas e incluso algunos teoremas de su primer tratado por nuevas reglas de inferencia. La parte lógica de su tratado comprende, pues, una ideografía renovada en la que Frege caracteriza sintácticamente los signos primitivos y proporciona las reglas de deducción (inferencias) y leyes lógicas fundamentales. En la segunda parte de esta ideografía, consagrada a las definiciones, puede encontrarse, entre otras cosas, una definición de la función $\xi \cap \xi$ que asocia un elemento a una clase, las definiciones del producto cartesiano, de la función sobreyectiva, de la función recíproca de una función dada y de una aplicación biunívoca. En suma, esta parte lógica contiene una teoría general de las funciones lógicas en la que puede distinguirse el cálculo de las variables y de las variables proposicionales, la teoría de las clases, tratada como el «campo» de los valores de variables proposicionales mediante funciones de un argumento y una teoría de las relaciones. Según Frege, todas las verdades de la aritmética pueden deducirse de los axiomas por la aplicación de reglas lógicas mediante una escritura de los conceptos bien estructurada. A partir de siete principios formulados con el fin de aceptar definiciones exteriores a su sistema, pasa a continuación a la definición general del número cardinal ($\setminus\!0$ y $\setminus\!1$), lo que constituye el comienzo del tema principal de sus *Grundgesetze,* la aritmética de los cardinales finitos e infinitos y de los números reales.

Los fundamentos de la aritmética de Frege

Los fundamentos de la aritmética de Frege que se exponen en sus *Grundgesetze* son el fruto de una larga reflexión sobre la naturaleza de la aritmética y, en particular, sobre la noción fundamental de número. Es en *Die Grundlagen der Arithmetik,* publicada en 1884, donde Frege expone desde un punto de vista más filosófico que matemático su concepción de la aritmética, sus objeciones con respecto a trabajos anteriores que se refieren al fundamento de esta disciplina, además de examinar largamente la definición de número

cardinal y de presentar sus definiciones de número. Frege pretende introducir innovaciones en el análisis de la noción de número porque este análisis revela al mismo tiempo lo que es verdaderamente un *concepto.* Frege se apoya en tres principios en la elaboración de sus fundamentos:

a) Hay que separar netamente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;
b) Se debe buscar lo que quieren decir las palabras no aisladamente sino en su contexto;
c) No se debe perder nunca de vista la diferencia entre concepto y objeto.

Al principio Frege mantiene el carácter *a priori* de la aritmética, es decir, su existencia como un ciencia en la que todas las proposiciones pueden ser establecidas sin recurrir a la experiencia y, por otro lado, si no es posible producir una demostración sin utilizar proposiciones que no son de lógica general, sino que se refieren a un campo en particular, esas proposiciones reciben el nombre de sintéticas. Se opone, a continuación, vigorosamente a los que sostienen (empiristas) que todo saber es empírico y que las leyes de la aritmética son verdades inductivas, extraídas de leyes fundamentadas en la naturaleza, y en particular se opone al uso del signo + refiriéndolo a la adición física. Después Frege considera la cuestión importante de saber si las leyes de la aritmética son sintéticas *a priori* o analíticas y, a este respecto, sin cuestionar el criterio de Kant, se opone a su utilización en la distinción entre juicios *a priori* analíticos y sintéticos. En efecto, la dicotomía revelada por Kant no puede aplicarse más que a las proposiciones generales y no a las proposiciones existenciales del álgebra, por ejemplo. Kant subestimó evidentemente, según Frege, el valor de los juicios analíticos, aunque parece haber tenido alguna idea de una concepción más amplia de estos juicios, que es la nuestra. Pero Frege pone también de relieve su acuerdo con el pensamiento kantiano en estos términos: «Tiene el gran mérito de haber distinguido entre los juicios sintéticos y los juicios analíticos.» Al calificar las verdades geométricas como sintéticas y *a priori* Kant desveló, según Frege, su verdadera naturaleza. Añade que si bien Kant se equivocó en lo referente a la aritmética, ello no merma su mérito, a su parecer. La opinión de Frege es que es bastante menos importante la cuestión de si estos

juicios sintéticos pertenecen sólo a la geometría o también pertenecen a la aritmética.

A propósito del papel de la intuición en la aritmética, Frege considera que no hay intuición que pueda garantizar la aplicación de las verdades aritméticas a todo lo que sea susceptible de ser numerado; la aritmética no está ligada a la intuición de los dedos como lo está la geometría con los puntos, las líneas y los planos. Además, si se pudiera obtener toda verdad de la aritmética sólo por la intuición, las verdades aritméticas serían presumiblemente independientes unas de otras y de las leyes de la lógica, como precisamente revelaron serlo los axiomas de Euclides. Pero, según Frege, si se intenta negar cualquier proposición fundamental de la ciencia de los números, el resultado obtenido será precisamente una confusión total. Es así como Frege se ve llevado a defender su tesis: las verdades de la aritmética son analíticas porque su demostración exige solamente las leyes de la lógica y el recurso a definiciones. A continuación Frege emprende una larga discusión sobre el concepto de definición en matemáticas, sobre el papel de los símbolos y sobre la confusión que reina entre los conceptos de número y símbolo numérico. Finalmente, Frege emprende un estudio del concepto general de número cardinal cuidándose previamente de establecer un balance histórico de los resultados conocidos en este tema, y en particular subraya que «la palabra "uno", como nombre propio de un objeto de estudio matemático, no admite plural; en consecuencia, no tiene sentido querer generar los números mediante la reunión de varios unos. El signo + en $1 + 1 = 2$ no puede significar tal reunión». De hecho, Frege afirma que la atribución de un número encierra una afirmación sobre un concepto y no sobre un objeto (puesto que el objeto es algo que puede designarse mediante un nombre propio y posee como propiedad justamente un concepto). Después de una larga discusión, adopta la idea de construir un contenido de juicio que se deje interpretar como una identidad, y una identidad tal que los términos de una y otra parte sean números. La definición de número se extraerá de la posibilidad de ordenar biunívocamente los objetos que están en uno de los conceptos con respecto a los que están en el otro.

Frege fue uno de los raros matemáticos que manifestó una cierta admiración por los resultados conjuntistas de Cantor al principio de su aparición, aunque criticara sus métodos y sus definiciones. En

1873, Cantor había comenzado a interesarse por los problemas de equipotencia de conjuntos, en los que observó, que el conjunto de los números racionales es numerable, y en su correspondencia con Dedekind, plantea la cuestión de la equipotencia del conjunto de los enteros y el conjunto de los números reales. Frege se sirvió también de la correspondencia biunívoca para introducir las identidades numéricas, y de allí extraer la definición de número cardinal. Frege enuncia que el concepto F es *equinumérico* con el concepto G si existe una correspondencia biunívoca. Presenta a continuación la definición siguiente:

El número que pertenece al concepto F es la extensión del concepto «equinumérico» al concepto F.

Hay que entender aquí por «extensión del concepto», el conjunto de valores de verdad de ese concepto o el conjunto de los casos en los que un argumento pertenece al dominio de definición del concepto.

Se dice que los objetos correspondientes a los conceptos F y G están en correspondencia uno con otro mediante la relación ϕ, a) si todo objeto de F está en la relación ϕ con un objeto de G, y b) si para todo objeto de G hay un objeto de F que está en la relación ϕ con el primero. La correspondencia será biunívoca si la relación ϕ es inyectiva y sobreyectiva, pero Frege pone un cuidado especial en definir esas dos propiedades mediante su terminología lógica solamente:

1) Si d tiene la relación ϕ con a y si d tiene la relación ϕ con e, para cualesquiera d, a y e, a y e son idénticos;
2) Si d tiene la relación ϕ con a y si b tiene la relación ϕ con a, para cualesquiera d, b y a, d y b son idénticos.

Frege convierte, pues, la correspondencia biunívoca en puras relaciones lógicas, y propone a continuación las definiciones siguientes:

a) El concepto F es equinumérico al concepto G significa que existe una relación que asocia biunívocamente los objetos del concepto F y los objetos del concepto G.

b) El número cardinal que pertenece al concepto F es la extensión del concepto «equinumérico al concepto F».

c) «n es un número cardinal» significa que hay un concepto tal que n es el número cardinal que le pertenece.

Este sistema de definiciones es notable, porque permite la reducción de la aritmética a la lógica. Quedaba un paso por dar: el de elaborar definiciones para cada uno de los números particulares refiriéndose exclusivamente a los conceptos normales de la lógica. En efecto, hasta ese momento, la teoría de Frege permitía determinar o designar un número individual con relación a su pertenencia a un cierto concepto, pero para exhibir la aritmética como un desarrollo de la lógica, la relación de pertenencia a un concepto empírico era inadmisible, porque impedía la existencia de una sucesión infinita de términos. ¿Qué hace Frege? Comienza la sucesión con 0, como lo había hecho Peano, y presenta sus definiciones de la sucesión natural de los números como sigue:

0 es el número cardinal perteneciente al concepto «no idéntico a sí mismo»;

1 es el número cardinal perteneciente al concepto «idéntico a 0»;

2 es el número cardinal perteneciente al concepto «idéntico a 0 ó a 1»;

3 es el número cardinal perteneciente al concepto «idéntico a 0, a 1 ó a 2», etc.

El primer concepto «no idéntico a sí mismo» es posiblemente un concepto de la lógica pura y, evidentemente, «cualquiera que sea el objeto escogido se sabe que no está en tal concepto». Así, la primera definición satisface aparentemente todos los prerrequisitos, y lo mismo ocurrirá con todas las demás. A continuación, Frege se propone definir la relación que afecta a dos miembros próximos de la sucesión natural de los números; es la noción de sucesor, que se define a partir de la proposición

Si todo objeto con el que x tiene la relación ϕ está en el concepto F y si, cuando d está en el concepto F se deduce que, para cualquier d, todo objeto con el que d tiene la relación ϕ está en el concepto F, entonces y está en el concepto F, cualquiera que sea el concepto F.

En efecto, Frege afirma que la proposición anterior quiere decir lo mismo que «y sucede a x en la ϕ-sucesión» y que «x precede a y en la ϕ-sucesión». Frege termina sus definiciones de los números cardinales con el enunciado: «El que n pertenezca a la sucesión natural de los números que comienza por 0 quiere decir que n es un

número finito». Así, ningún número finito se sucede a sí mismo en la sucesión natural de los números. Parece, pues, que Frege ha alcanzado su objetivo, es decir mostrar que la aritmética se reduce a la lógica.

En sus *Grundgesetze,* Frege vuelve a tomar esencialmente los argumentos formulados en los *Fundamentos de la aritmética* pero, cuando ello es posible, formula las definiciones mencionadas más arriba mediante símbolos de clases que sustituyen así a las expresiones funcionales.

Frege aborda también en sus leyes fundamentales de la aritmética el concepto de número cardinal e intenta dar a esta noción un sentido más preciso que el de Cantor. Tiene la idea de tomar como definición de cardinal de un conjunto A el conjunto de todos los conjuntos equipotentes con A y, para ello, introduce de nuevo el término «equinumérico» para la relación entre dos conceptos que son tales que las clases determinadas por ellos pueden ponerse en correspondencia biunívoca. Así, el número cardinal se define como sigue:

> El número cardinal que pertenece al concepto F es la extensión del concepto «equinumérico» con el concepto F.

En otros términos, el número cardinal que pertenece al concepto F es la clase de todos los conceptos que son «equinuméricos» con F. En particular, los números cardinales 0 y 1 se escriben, según Frege, como $\mathfrak{0}$ y $\mathfrak{1}$, y se definen, respectivamente, mediante

$$\mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\top \varepsilon = \varepsilon) \quad \text{y} \quad \mathfrak{P}\grave{\varepsilon}(\curlyvee \varepsilon = \phi)$$

Frege se ocupa abundantemente de la aritmética de los cardinales, y en su segundo libro de los *Grundgesetze* presenta una exposición sobre el continuo real y consagra la última sección de esta obra a un largo estudio sobre la teoría de las cantidades, añadiendo dos apéndices, el segundo de los cuales trata de la paradoja de Russell que revela que su teoría de conjuntos es inconsistente.

El *Bregriffsschrift* de Frege es el verdadero primer sistema comprensivo de la lógica formal. Señalemos que los trabajos posteriores de Peirce producirían una doctrina de las funciones con una notación suficientemente adecuada para expresar todos los principios formulados por Frege. Pero Peirce no llegó a establecer un

número de principios fundamentales análogos a los que aparecen en la tercera sección del libro de Frege. Entre las novedades, hay que subrayar el uso apropiado que hace Frege de los cuantificadores, en particular con el fin de ligar las variables. En cuanto a sus leyes fundamentales de la aritmética, constituyen un desarrollo muy parecido al de los *Principia mathematica* y, a pesar de su simbolismo complejo, poco sugestivo e incluso extraño, ello no impidió que Russell y Whitehead afirmaran en su prefacio que en todas las cuestiones referentes al análisis lógico, estaban en deuda principalmente con Frege.

POINCARÉ

Jules-Henri Poincaré (1854-1912) nació en Nancy el 29 de abril de 1854, en una vieja familia lorenesa. Después de brillantes estudios, ingresó primero en la Escuela Politécnica en 1873, de donde salió en 1875 después de haber obtenido notas particularmente elevadas en matemáticas. Durante su estancia en la Politécnica, dio pruebas de una incompetencia notoria en los ejercicios físicos, en particular en gimnasia, y su incapacidad de dibujar bien, ligada probablemente a una mala coordinación física y a una vista netamente deficiente, fue particularmente notable. A los veintiún años entró en la Escuela de Minas y en 1877 era ingeniero de Minas en Vesoul. Al año siguiente presentó en la Academia de Ciencias su primera nota, que sería el tema de su tesis de doctorado, *Sur les propriétés des fonctions définies par des équations aux dérivées partielles* (Sobre las propiedades de las funciones definidas por ecuaciones en derivadas parciales), defendida en 1879. El mismo año, Poincaré renuncia a la carrera de ingeniero y el ministro de Obras Públicas le pone a disposición de la enseñanza superior, siendo entonces destinado como encargado de curso de análisis matemático en la Facultad de Ciencias de Caen.

En 1880-1881, Poincaré obtuvo resultados de la mayor importancia, dando la representación de las coordenadas de toda curva algebraica mediante funciones uniformes y la integración de las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. En 1881, fue llamado a la Sorbona y después, sucesivamente, fue nombrado encargado de curso de mecánica física y experimental en la Facultad

de Ciencias de París (1885), ocupó la cátedra de física matemática y cálculo de probabilidades en 1886, y en 1896 la de astronomía matemática y mecánica celeste. Fue, por otra parte, desde 1883 hasta 1897, ayudante y después profesor en la Escuela Politécnica y, a partir de 1902, enseñó electricidad teórica en la escuela profesional superior de Correos y Telégrafos. A los treinta y tres años, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en la sección de geometría, y después elegido miembro de la Academia Francesa en 1908 y nombrado inspector general de Minas en 1910. Mientras tanto, en Estocolmo en 1889, Poincaré ganó el premio del gran concurso internacional establecido por el rey de Suecia, Oscar II, entre los matemáticos del mundo entero, por su memoria *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (Sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica), en el que la memoria de Paul Appell, independientemente de la de Poincaré, fue también distinguida entre las demás.

Poincaré, científico universal

Poincaré murió en el momento más brillante de su carrera, en pleno vigor. Su inteligencia era joven, ideas originales y osadas brotaban de su cerebro. Considerando la actividad que desplegó, el número de cuestiones diferentes que trató, las nuevas concepciones de la ciencia que asimiló rápidamente, el conjunto de las ideas originales que extendió, resulta sorprendente la constante actividad que manifestó en cada instante de su existencia. Ningún otro científico parece haber estado como él en una relación constante e íntima con el mundo científico de su época. Recibía y proporcionaba ideas muy a menudo, en intercambio rápido y constante. El nombre de Poincaré fue seguramente el más difundido en los albores de las matemáticas del siglo XX, y sobre todo fue, sin ninguna duda, el más célebre de los matemáticos de esta época.

Poincaré fue un científico cuya actividad era moderna en toda la extensión de la palabra; su inteligencia, magníficamente dotada, poseía todas las virtuosidades del científico y del literato, y supo adaptarse al ritmo trepidante de la vida moderna. Difundió sus ideas y no ocultó ninguna, de forma que se hizo comprender tanto en Europa como en América, y la mayor parte de las revistas científicas

recibieron sus memorias y la exposición de sus trabajos. Además, no dudó nunca entre el deseo de dar a conocer su pensamiento a un gran público y el temor de exponer resultados que no estaban todavía maduros. Provisto de un olfato excepcional que le salvaguardaba de alguna manera de los errores, desveló siempre sus ideas sin ocultar nunca sus métodos. No se detuvo en pulimentar y completar sus descubrimientos para darles forma sistemática y definitiva. Poco preocupado por las cuestiones de detalles, de minucias, se interesaba sobre todo por las cuestiones de conjunto, por los teoremas generales y, al contrario que Gauss, escribía precipitada y considerablemente, sin intentar pulir sus trabajos.

Su renombre fue enorme; pocos científicos y un número muy pequeño de matemáticos han tenido una celebridad semejante. Socio extranjero, miembro honorífico, miembro o correspondiente de más de cuarenta sociedades científicas, fue titular de siete doctorados honoríficos, recipiendario de diversos premios y medallas, presidente del II Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, sin contar los diferentes cargos importantes que ocupó en organismos de envergadura nacional e incluso internacional.

Su obra inmensamente rica abarca el análisis matemático, la mecánica analítica, la mecánica celeste, la física matemática y la filosofía de la ciencias. Se adivina fácilmente la amplitud de sus investigaciones y la riqueza de sus resultados y de las reflexiones que escribió; por ello se nos perdonará sin duda el que no podamos hacerle justicia plenamente en las páginas que siguen, en las que intentaremos esbozar brevemente algunas de sus contribuciones.

Teoría de las funciones fuchsianas

En una memoria de 1866, Lazarus Fuchs (1833-1902), llamó la atención del mundo científico sobre la nueva manera de considerar las ecuaciones diferenciales lineales porque, según decía, el problema real no consistía tanto en reducir la ecuación diferencial a cuadraturas, sino más bien en deducir de la misma ecuación el comportamiento de sus integrales para todos los puntos del plano, es decir, para todos los valores de la variable compleja. Ya Gauss había relacionado una clase especial de esas ecuaciones con su serie,

la función hipergeométrica. Riemann había ido más lejos en su memoria de 1857 mostrando, para valores complejos de x (donde 0, 1 e ∞ son tres puntos singulares), que el conocimiento de las transformaciones

$$y_1' = c_{11}y_1 + c_{12}y_2, \; y_2' = c_{21}y_1 + c_{22}y_2$$

para cada punto singular permitía obtener conclusiones sobre el comportamiento de las soluciones particulares alrededor de los puntos singulares de la ecuación de segundo orden. Fuchs, alumno y sucesor de Weierstrass en Berlín, partiendo de la memoria de Riemann, emprendió el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n cuyos coeficientes son funciones racionales de la variable x. Mediante un análisis minucioso de la convergencia de las series que satisfacen formalmente la ecuación, encontró que los puntos singulares de la ecuación son fijos, es decir independientes de las constantes de integración, y pueden encontrarse antes de pasar a la integración porque son los polos de los coeficientes de la ecuación diferencial. Mostró a continuación que un sistema fundamental de soluciones experimenta una transformación lineal cuando la variable independiente describe una trayectoria que rodea al punto singular. Del comportamiento de esas soluciones obtuvo expresiones válidas en una región circular que rodea ese punto y que se extiende hasta el próximo punto singular.

Esta memoria, de la que sólo se han mostrado algunos resultados, atrajo la atención de Poincaré, que, guiado por la teoría de las funciones elípticas que habían desarrollado Fagnano, Euler, Lagrange, Abel y Jacobi, transportó el principio de inversión, la extensión de la concepción de la periodicidad y las funciones de Jacobi al campo de las ecuaciones diferenciales lineales y descubrió las funciones automorfas. Las integrales de las funciones algebraicas se reproducen, aumentadas por constantes, cuando se gira alrededor de puntos singulares, lo cual es la fuente de la periodicidad de las funciones elípticas. De la misma manera, el conjunto de las integrales fundamentales de una ecuación lineal de coeficientes algebraicos se reproduce cuando se gira alrededor de un punto singular, según una transformación lineal. En una ecuación de segundo orden, la razón de dos integrales fundamentales experimenta una sustitución lineal cuando se recorre un camino cerrado alrededor de una singularidad (Fuchs). Por lo tanto, la variable

independiente z, considerada como función de la razón de dos integrales, debe permanecer invariante con respecto a transformaciones lineales de esta razón. Era la propiedad que debía sustituir a la periodicidad y, al mismo tiempo, al principio de inversión.

Poincaré se quedó con esta idea fundamental y comenzó un estudio sistemático de esas sustituciones, que forman parte de un mismo grupo discontinuo. Subrayemos que la función sen z no cambia si z se sustituye por $z + 2k\pi$ donde k es un entero; en otras palabras, la función no cambia cuando z experimenta una transformación del grupo $z' = z + 2k\pi$. Además, la función elíptica no cambia cuando se sustituye z por el grupo de transformaciones $z' = z + kw + k'w'$ donde w y w' son los períodos de la función. Estos dos grupos de transformaciones forman parte de un conjunto de grupos que Poincaré llamó «discontinuos», porque todas las transformaciones de un punto cualquiera mediante el grupo de transformaciones están en número finito en el interior de toda región acotada.

Poincaré obtuvo la clase de las funciones automorfas cuando consideró la función inversa de la razón de dos soluciones linealmente independientes (integrales) de la ecuación de segundo orden,

$$\frac{d^2n}{dz^2} + P(w, z)\frac{dn}{dz} + Q(w, z)n = 0 \qquad (1)$$

donde w y z están ligadas por la ecuación polinómica $p(w, z) = 0$ y P y Q son funciones racionales. Es la clase de las funciones fuchsianas automorfas, constituida por funciones meromorfas uniformes que no cambian frente a la transformación

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde a, b, c, d son reales sujetos a la condición $ad - bc = 1$.

Estas transformaciones dejan invariable una circunferencia, la circunferencia fundamental de Poincaré, y forman un grupo llamado el «grupo fuchsiano». Poincaré distinguió dos especies de grupos, los que llamó grupos kleineanos, que son los grupos discontinuos más generales, y los grupos fuchsianos. En la segunda memoria de una serie de cinco consagradas a las funciones automorfas (1882-1884), Poincaré construyó las funciones que permanecen invariables

frente a sustituciones de ese grupo, por medio de su serie zeta: sean las transformaciones del grupo

$$z' = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$$

tales que $a_i d_i - b_i c_i = 1$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots$; se obtienen así z_1, z_2, z_3, ..., las transformadas de z. Sea $H(z)$ una función racional; la serie zeta de Poincaré es la función

$$\phi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (c_i z - d_i)^{-2k} H(z_i),\ k > 1$$

y para dos series zeta $\Theta_1(z)$ y $\Theta_2(z)$ con el mismo k, Poincaré forma las razones $\frac{\Theta_1(z)}{\Theta_2(z)}$ de estas Θ-fuchsianas y muestra que permanecen inalteradas cuando se somete la variable a las sustituciones del grupo. Así, $F(z) = \frac{\Theta_1(z)}{\Theta_2(z)}$ es una función automorfa del grupo fuchsiano o del grupo kleineano, dependiendo de si $\Theta(z)$ es una serie fuchsiana o kleineana con respecto al grupo de sustitución. Poincaré distinguió dos especies de funciones fuchsianas, la que existe en el plano entero y la que no existe más que en el interior del círculo fundamental. Las funciones fuchsianas sirven para integrar las ecuaciones diferenciales del tipo (1). Extendió también la transformación homográfica al caso de los coeficientes complejos, y distinguió, entre las transformaciones obtenidas, familias diferentes, cuyos grupos correspondientes fueron llamados kleineanos, en honor de Klein, quien se había interesado por las funciones fuchsianas. Las propiedades de las funciones kleineanas son análogas a las de las funciones fuchsianas, pero sus regiones difieren.

El método del barrido

En 1847, Lord Kelvin (Thomson) anunció el principio de Dirichlet (llamado así por Riemann) que puede presentarse como sigue: sea la clase de todas las funciones U que poseen derivadas continuas de segundo orden en el interior y en el exterior de las regiones T y T', respectivamente, y una superficie S que separa esas dos regiones. Las funciones U deben ser continuas en cada punto, y supongamos

que una función f toma sus valores sobre S; la función V que hace mínima la integral de Dirichlet

$$I = \iiint_T \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] dv$$

satisface la relación $\Delta V = 0$ y toma el valor de f en la frontera de S. La solución del problema de Dirichlet consiste en hacer mínima la función I, es decir, en establecer la existencia de una solución de $\Delta V = 0$ directamente o mediante el principio de Dirichlet.

El único método riguroso dado con anterioridad al de Poincaré había sido el de Karl G. Neumann (1832-1925) —comentarista de los trabajos de Riemann y autor del primer manual de topología— que conducía, mediante el procedimiento de las medias aritméticas, a desarrollos en serie cuya convergencia no se podía demostrar más que si la superficie era convexa. Otro modo de presentación, propuesto por Riemann en su tesis doctoral, no era del todo riguroso pero presentaba sin embargo un gran interés para la teoría de funciones de variable compleja, como instrumento muy apropiado para obtener resultados fundamentales. Esta laguna del razonamiento de Riemann será colmada en 1899 por Hilbert, que ofrecerá condiciones más generales en 1901.

La idea fundamental del «método del barrido» de Poincaré, utilizado en su memoria de 1890 y publicado en el *American Journal of Mathematics,* es la misma que la que se encuentra en la base del método de las imágenes eléctricas de Thomson: se puede, sin cambiar el potencial en el exterior de una esfera, sustituir toda la carga interior por una distribución conveniente y simple de una carga igual sobre la superficie de la esfera. Se llega así, sin cambiar el potencial en el exterior, a *barrer* las cargas interiores de la esfera para llevarlas a la superficie formando una capa equivalente. Esta operación, repetida una infinidad de veces, permite obtener desarrollos convergentes para la densidad superficial de equilibrio eléctrico en un punto de una superficie de forma cualquiera, con tal que la superficie posea efectivamente dos radios de curvatura en el punto considerado. Este método equivale a formar una sucesión de funciones no armónicas en la región pero que, tomando los valores en la frontera exactos, se hacen cada vez más armónicas (se dice que una función de potencial V es armónica si se dan sus valores en la frontera de la región y satisface $\Delta V = 0$ en la región).

Teoría de los problemas de contorno

En una memoria aparecida en 1894 en los *Rendiconti de Palermo* que tiene como título *Sobre las ecuaciones de la física matemática,* Poincaré parte de los trabajos de Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), en los que se encuentra, en particular, la demostración analítica de la existencia del sonido fundamental (primer armónico), y que fue quien determinó la solución general del problema de los sonidos debidos a las vibraciones de una membrana encontrando todos los valores de una cierta razón. Este problema pertenece al cálculo de variaciones; hacía falta, pues, distinguir los máximos y los mínimos, lo que le condujo a plantear la cuestión siguiente: una función de dos variables se anula en la frontera de un dominio de dos dimensiones. La razón de su parámetro de segundo orden a su valor es una constante negativa en todos los puntos del dominio. ¿Cuál es el menor valor absoluto de esta razón? Schwarz determinó el valor mínimo, mientras que Poincaré encontró todos los demás valores, además del mínimo de esa razón. Las investigaciones de Poincaré se concretan en la demostración de la existencia y de las propiedades esenciales de todos los valores propios de

$$\Delta u + \lambda u = f$$

con λ complejo, en una región cerrada de tres dimensiones en la que $u = 0$ en la frontera. Además, demostró que $u(\lambda)$ es una función meromorfa de la variable compleja λ y que los polos son reales, que son precisamente los valores propios λ_n.

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales

En el célebre problema de los tres cuerpos, puede plantearse la cuestión de si uno de los cuerpos permanecerá siempre en una cierta región del cielo o podrá alejarse indefinidamente, si la distancia entre dos cuerpos aumentará o disminuirá infinitamente, o si permanecerá comprendida entre ciertos límites. Es el problema de la *estabilidad del sistema solar,* es decir, la cuestión de saber si, en el curso de los siglos, las dimensiones de las órbitas del sistema planetario variarán poco o si, por el contrario, se perderán en el infinito o se precipitarán sobre el Sol. Además, el problema de las

órbitas planetarias ha revelado la importancia de las soluciones periódicas en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Lagrange había encontrado, en 1772, soluciones particulares periódicas del problema de los tres cuerpos en su memoria titulada *Essai sur le problème des trois corps* (Ensayo sobre el problema de los tres cuerpos). La determinación de soluciones periódicas sería proseguida eficazmente por el primer gran matemático americano George William Hill (1838-1914) en sus trabajos sobre el movimiento de la Luna que fundan la teoría matemática de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes periódicos. Desgraciadamente, los trabajos de Hill fueron prácticamente ridiculizados hasta el momento en que Poincaré demostró que el procedimiento de Hill era convergente y edificó la teoría de los determinantes infinitos y de los sistemas infinitos de ecuaciones diferenciales.

Poincaré inauguró un nuevo enfoque para la búsqueda de soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales que gobiernan los movimientos planetarios. Como esas ecuaciones diferenciales no son lineales, Poincaré tuvo que crear métodos completamente nuevos, porque aunque es cierto que las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales habían aparecido mucho antes, pensemos en la ecuación de Riccati y en la ecuación del péndulo por ejemplo, no había sido propuesto ningún método general para resolverlas.

Puesto que las ecuaciones del movimiento de tres cuerpos celestes no pueden ser resueltas en términos de funciones conocidas, y dado que el problema tiene incluso una infinidad de soluciones, Poincaré concentró su atención en las relaciones que existen entre estas soluciones. Este enfoque es semejante al que preconizaron los algebristas de los siglos XVIII y XIX cuando se decidieron a considerar simultáneamente todas las raíces que buscaban en lugar de buscar una raíz determinada de la ecuación propuesta. Su teoría «cualitativa» se presenta en cuatro memorias fundamentales (publicadas entre 1881 y 1886) que tratan todas *sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial,* y propone considerar las relaciones mutuas de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. El problema planteado en lenguaje astronómico consiste en saber si las órbitas son estables o inestables, lo que puede traducirse en lenguaje matemático mediante preguntas como las siguientes: El punto móvil ¿describe una curva cerrada? ¿Permanece en el interior de una cierta porción de plano?

Poincaré se dedicó en primer lugar al caso más sencillo, el de una sola ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

donde P y Q son analíticas en x y en y.

La solución de la ecuación es de la forma $f(x, y) = 0$, y define un sistema de líneas a trazar sobre una superficie dada. Poincaré se dio cuenta, por el análisis de estos tipos de soluciones, de la importancia de los puntos singulares (los puntos para los cuales P y Q se anulan) porque dos curvas integrales diferentes no pueden cruzarse más que en un punto singular. Poincaré examinó con cuidado lo que pasa en el entorno de un punto singular cualquiera y encontró cuatro especies diferentes: nudo, puerto (punto de silla), centro y foco. Los nudos son los puntos de cruce de una infinidad de curvas integrales (soluciones); los puertos son los puntos de silla en los que, por ejemplo, las fuerzas magnéticas debidas a imanes se equilibran; los puntos rodeados de curvas cerradas que se encierran ellas mismas mutuamente se llaman «centros», mientras que los focos son los puntos de donde nacen espirales (soluciones) que se desarrollan progresivamente. Poincaré encontró numerosos resultados, entre los que se pueden mencionar los ciclos, los ciclos límite, los ciclos sin contacto, etc. Por ejemplo, los ciclos límite son curvas cerradas que son soluciones (integrales) de la ecuación diferencial tales que todas aquellas que no acaban en puntos singulares se enrollan alrededor aproximándose cada vez más, en la forma de una espiral de reloj. El caso de la ecuación de primer orden sobre la esfera o sobre la Tierra es el tema de las tres primeras memorias, mientras que la cuarta memoria (1886) trata de los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

En su memoria premiada en el concurso de 1889, Poincaré prosigue esas mismas investigaciones y considera una teoría aún más general, aplicada esta vez al problema de los tres cuerpos celestes. Muestra que existen, en general, una infinidad de posiciones iniciales y de velocidades iniciales tales que las distancias mutuas entre los tres cuerpos son funciones periódicas del tiempo. Su gran tratado titulado *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Los métodos nuevos de la mecánica celeste) (1892-1899) extiende los resultados obtenidos anteriormente y se encuentra allí desarrollada, entre

otras cosas, una nueva clase de soluciones, llamadas «soluciones asintóticas», que se aproximan indefinidamente a soluciones periódicas para valores infinitamente grandes, positivos o negativos, del tiempo, así como sus ideas sobre el problema de los *n* cuerpos.

La obra de Poincaré sobre el problema de la estabilidad del sistema solar fue parcialmente coronada por el éxito. Por otra parte, la estabilidad sigue siendo todavía una cuestión abierta; en particular la inestabilidad de la órbita de la Luna no parece ser aceptada unánimemente. Los trabajos de Poincaré serán proseguidos y ampliados por los de A. Liapunov e I. Bendixson.

Teoría de las series asintóticas

Durante el siglo XVIII los matemáticos y los astrónomos utilizaron abundantemente las series divergentes, sin conocer demasiado la naturaleza misma de la divergencia, porque a menudo eran muy apropiadas para estimar los valores de las funciones con ayuda de unos pocos términos solamente. Pero el rigor matemático introducido por Cauchy tuvo bastante influencia en que los matemáticos rechazaran el uso de tales series, aunque algunos de ellos, como Peacock, Martin Ohm, De Morgan, siguieran promoviendo su utilización para expresar analíticamente o calcular las funciones. Abel y Cauchy se opusieron vigorosamente a la utilización incondicional de esas series en las demostraciones de teorías, pero Cauchy persistió en utilizarlas en algunas ocasiones y escribió incluso una memoria titulada *Sur l'emploi légitime des séries divergentes* (Sobre el uso legítimo de las series divergentes) en 1843. Cauchy mostró en esa memoria que la serie de Stirling para el log $\Gamma(x)$ (log $n!$), aunque sea divergente para todo x, puede ser útil en el cálculo de log $\Gamma(x)$ cuando x tiene un valor positivo muy grande. Los descubrimientos de las geometrías no euclídeas y de nuevas álgebras contribuyeron a crear una atmósfera en la que las matemáticas se perciben como una ciencia instituida por hombres que deben sentirse libres para innovar, inventar e incluso transgredir ciertos principios considerados como inmutables.

Antes de que Poincaré fundara la teoría de las series asintóticas, algunos matemáticos se habían interesado por aplicar las series divergentes a diversos problemas. Mencionemos brevemente los

trabajos de Laplace en su *Théorie analytique des probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades) (1812) sobre la aproximación de la función de error y de $n!$ y el uso de una serie asintótica para calcular la integral

$$f(x) = \int_a^b g(t)e^{xh(t)}dt,$$

los trabajos de Stokes, lord Kelvin y George N. Watson (1886-1965) sobre la estimación de la integral de Airy, las estimaciones de integrales realizadas mediante series de potencias por Cauchy y Poisson, y el uso de las series divergentes en la solución de ecuaciones diferenciales por Liouville y Green, etc.

Poincaré y Thomas Jan Stieltjes (1856-1894), célebre por sus trabajos sobre la teoría analítica de las fracciones continuas en los que introdujo en 1894-1895 la integral que lleva su nombre, de manera independiente reconocieron la naturaleza de las series divergentes y propusieron las bases de una teoría formal de esas series. Mientras que Stieltjes habla de series semiconvergentes y estudia los aspectos de cálculo de esas series mediante un enfoque centrado en las fracciones continuas, Poincaré introduce el término «asintótico» para calificar esas series, y su punto de partida es el estudio de las soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales en mecánica celeste.

A primera vista, puede comprenderse que es poco probable, en un caso práctico cualquiera, que las condiciones iniciales del movimiento de los cuerpos celestes sean tales que correspondan a una solución periódica. Sin embargo, Poincaré observó que se puede tomar una de esas soluciones como punto de partida de una serie de aproximaciones sucesivas y estudiar o desarrollar las que difieren de ella muy poco. Llegó así a aislar y a formular las propiedades esenciales de esas series asintóticas, pues proporcionaban aproximaciones suficientes para las necesidades de la práctica.

Una serie de la forma

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$$

donde las a_j son independientes de x, se dice que representa a la función $f(x)$ asintóticamente para grandes valores de x, cuando

$$\lim_{x\to\infty} x^n \left[f(x) - \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}\right)\right] = 0, \ (n = 0, 1, 2\dots)$$

Se denota la relación entre $f(x)$ y su serie asintótica mediante el símbolo $\sim$ de modo que

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$$

Poincaré no consideró más que valores reales de x en un entorno del infinito, pero se pueden definir también esa series para x compleja con la norma $|x| \to \infty$, así como generalizar esas series para considerar un entorno de cero. En general, el orden de magnitud del error cometido utilizando esas series es igual a la magnitud del primer término omitido. Poincaré demostró que la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones están representados asintóticamente por la suma, diferencia, producto y cociente de las series respectivas, con tal que el término constante en la del denominador sea diferente de cero. Puede, evidentemente, representarse una integral mediante una serie asintótica generalizando la definición inicial. Poincaré aplicó su teoría de las series asintóticas a las ecuaciones diferenciales, y su volumen 2 de los *Métodos nuevos de la mecánica celeste* contiene numerosos ejemplos aplicados a ecuaciones de segundo orden.

Los estudios de Poincaré sobre las series asintóticas serían proseguidos y desarrollados por Jakob Horn (1867-1946), George David Birkhoff (1884-1944), lord Rayleigh y Richard Gans (1880-1954). Subrayemos que el problema inverso de la determinación de las series asintóticas, la «sumabilidad», consiste en saber si, partiendo de una serie divergente en el sentido de Cauchy puede asignarse una *suma* a esa serie. Las primeras investigaciones sobre el tema fueron emprendidas por Euler, Poisson, Abel, Fröbenius, Hölder y Ernesto Cesaro; más tarde Stieltjes hizo avanzar el tema con su original enfoque (fracciones continuas), pero el desarrollo sistemático de la teoría de las series «sumables» comienza en 1895 con los trabajos de Emile Borel (1871-1956), uno de los grandes matemáticos franceses de la primera mitad del siglo, que se distinguió en teoría de la medida, topología y cálculo de probabilidades, y cuyo nombre quedará unido al célebre teorema de Heine-Borel. Léopold Fejér (1880-1959) mostró el valor del concepto de «sumabilidad» en la teoría de las series de Fourier y sus trabajos están en la base de investigaciones fructíferas emprendidas en el siglo XX sobre el tema.

La topología combinatoria

La topología constituye en el siglo XX una rama importante de las matemáticas en varios aspectos. Sin embargo, puede dividirse en dos subramas muy distintas: la topología combinatoria (la geometría de situación) y la topología de los conjuntos de puntos. Hemos visto (véase Klein y la topología) que los primeros trabajos en topología combinatoria se remontan a principios del siglo XIX y que su desarrollo fue obra de numerosas contribuciones individuales a lo largo de ese siglo. Poco entusiasmado por la topología de los conjuntos de puntos, cuyo desarrollo a lo largo del siglo anterior había estado íntimamente ligado a la aritmetización del análisis, Poincaré será el primero en emprender un estudio sistemático de la teoría combinatoria de las figuras geométricas, y se le considera generalmente como el fundador de esta nueva teoría. Antes de Poincaré, sólo había sido suficientemente estudiada la teoría de las superficies cerradas, y los trabajos de Betti marcan el comienzo de una teoría general, precisamente la de Poincaré.

La topología combinatoria o *analysis situs* es el estudio de los aspectos cualitativos intrínsecos de las configuraciones espaciales que permanecen invariantes frente a transformaciones biunívocas. En efecto, como recuerda Poincaré en su memoria sobre el *Analysis situs* (1895), «el dicho según el cual la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas es exacto, pero esas figuras, para no confundirnos, todavía deben satisfacer una condición.» Prosigue diciendo que las proporciones pueden alterarse groseramente, pero las posiciones relativas de las diversas partes no se deben desordenar. Las transformaciones biunívocas deforman tanto como queramos la configuración espacial, pero no producen, a lo largo de esta deformación, ni desgarro ni, por el contrario, adherencia entre las partes primitivamente separadas.

Cuando Poincaré emprendió el estudio de las disposiciones de las curvas integrales de una ecuación diferencial, constató que la influencia de la forma que afecta, en el sentido de la geometría de situación, a la superficie sobre la que se trazan esas curvas es capital y absoluta. Por ejemplo, después de haber estudiado el caso de la esfera, pasó a continuación al toro y constató que, en ese caso, aparecían una multitud de circunstancias nuevas, no permitidas en el caso de la esfera. Sus trabajos sobre la teoría cualitativa de las

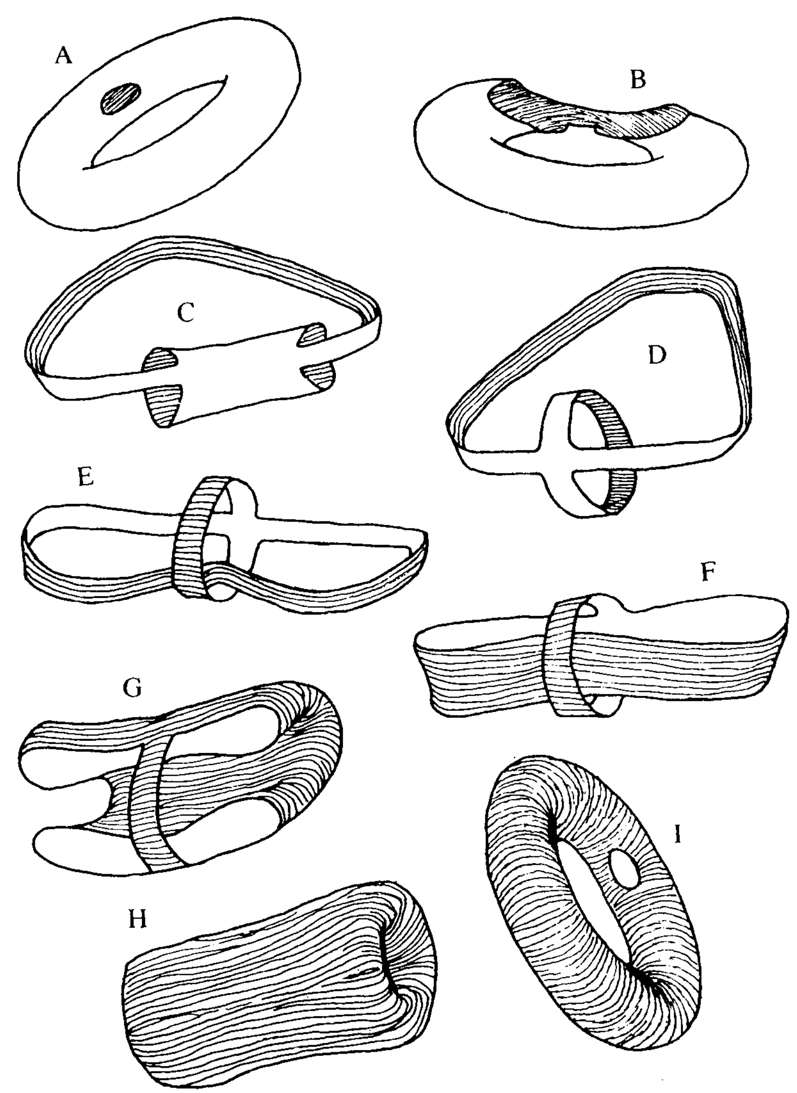


FIGURA 11.3 Problema clásico de topología: una cámara de aire ¿es reversible? Suponiendo que esté hecha de un caucho muy maleable, se le da la vuelta: 1) estirando el agujero de la válvula (A, B) para obtener dos bandas estrechas (C, D); 2) imprimiendo a éstas un movimiento de torsión para exponer el revés (E); 3) estirando al revés (F, G, H, I).

ecuaciones diferenciales son fundamentalmente topológicos, a causa principalmente de la forma de las curvas integrales y de la naturaleza de los puntos singulares (nudo, puerto, centro y foco). Esos trabajos le indujeron a determinar la estructura de las superficies de cuatro dimensiones, las cuales sirven para representar funciones algebraicas $f(x, y, z) = 0$ donde x, y y z son complejos. La puerta estaba abierta y Poincaré decidió franquear el umbral y abordar el problema general de la geometría de situación de las configuraciones espaciales de n dimensiones. Sus escritos sobre el tema figuran en las *Comptes Rendus* de 1892 y 1893, en la célebre memoria de 1895 publicada en el *Journal de l'Ecole Polytechnique* y en otras cinco memorias publicadas en diferentes revistas entre 1895 y 1904. El contenido matemático de sus trabajos es demasiado técnico para que consideráramos la posibilidad de presentar en el marco de nuestra obra el detalle de los mismos. Baste simplemente mencionar su técnica de triangulación y sus conceptos de símplex y cómplex, que sirvieron para edificar la teoría entrevista por Riemann (introducida por Brouwer), el concepto de espacio de invariantes topológicos como los números de Betti, los números de torsiones y los números de intersección, su noción del grupo fundamental de lazos, etc.

Los trabajos de Poincaré abrieron un vasto campo de investigaciones en el que numerosos matemáticos desarrollaron y profundizaron los conceptos fundamentales introducidos por sus investigaciones. Mencionaremos entre los principales a Brouwer, James W. Alexander (1888-1971), Oswald Veblen (1880-1960), Lev S. Pontrjagin (1908-1960), Emmy Noether (1882-1935).

Otras contribuciones de Poincaré

Entre sus múltiples trabajos científicos, podemos subrayar sus memorias sobre la aritmética, sobre las representaciones de números mediante sus formas, sobre los números complejos, sobre las fracciones continuas y sobre las formas cuadráticas. En álgebra, consagró parte de su tiempo a estudios sobre las formas cúbicas y cuaternarias; en geometría, propuso un modelo de geometría hiperbólica y, en probabilidad, escribió numerosas notas que prolongaban los trabajos de Laplace y de los analistas del siglo XIX.

Sus *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* (Lecciones sobre las hipótesis cosmogónicas) de 1911 constituyen una síntesis notable del conjunto de los conocimientos relativos a la génesis de los mundos, y contribuyeron a hacer progresar la mecánica celeste. No menos enriquecedora es la serie de memorias consagradas a la física matemática, y en particular a la elasticidad, la propagación del calor, la termodinámica, la teoría cinética de los gases, la óptica, la electricidad, las oscilaciones eléctricas, la difracción de las ondas hertzianas y la telegrafía sin hilos.

Sus últimos libros estuvieron consagrados a la filosofía de las ciencias y constituyen su obra filosófica.

La obra filosófica de Poincaré

Lo esencial de esta obra filosófica se encuentra en los volúmenes siguientes: *La science et l'hypothèse* (La ciencia y la hipótesis) (1902), *La valeur de la science* (El valor de la ciencia) (1905), *Science y méthode* (Ciencia y método) (1908) y *Dernières pensées* (Ultimos pensamientos) (1913).

Poincaré, según la expresión de Boutroux, era un autodidacto en filosofía y experimentaba una desconfianza particular hacia los sistemas filosóficos convencionales. Poincaré no perdió nunca de vista los hechos y en sus especulaciones más audaces, más paradójicas en apariencia, permaneció firmemente ligado a ellos. La verdad, en el sentido de Poincaré, es la expresión filosófica de las condiciones implicadas por la existencia real de las ciencias positivas.

A partir de las geometrías no euclídeas, Poincaré se percató de que sus trabajos de análisis matemático le permitían arrojar una nueva luz sobre el célebre postulado de las paralelas, y ése fue el punto de partida de sus primeras reflexiones filosóficas que se pueden encontrar en *La ciencia y la hipótesis.* Se admitía la posibilidad teórica de las geometrías no euclídeas, pero se podía pensar que esas geometrías eran construcciones artificiales y sin relación con la geometría real. Riemann y Beltrami habían probado que los teoremas de geometrías no euclídeas pueden ser considerados siempre, si se quiere, como teorías de geometría euclídea. Al revés de sus predecesores, Poincaré utiliza las proposiciones no euclídeas para

demostrar que la geometría euclídea tiene un sentido, y así, traduce esas proposiciones con ayuda de un diccionario, construido a la manera de los diccionarios habituales, a teoremas de la geometría ordinaria. Por ejemplo, el espacio se traduce por «la porción de espacio situada por encima del plano fundamental», y el plano se convierte en «la esfera que corta ortogonalmente al plano fundamental». El teorema de Lobachevski, «la suma de los ángulos de un triángulo es menor de dos rectos», se traduce, según Poincaré, por «Si un triángulo curvilíneo tiene por lados arcos de circunferencia que prolongados cortarían ortogonalmente al plano fundamental, la suma de los ángulos de ese triángulo curvilíneo será menor de dos rectos.» A continuación, Poincaré propone el problema de la naturaleza de los axiomas y afirma, después de algunas discusiones, que «los axiomas geométricos no son, pues, ni juicios sintéticos *a priori*, pues tendrían entonces un carácter de necesidad, ni hechos experimentales». Esto son *convenios,* y nuestra elección permanece, pues, *libre* y no está limitada más que por la necesidad de evitar toda contradicción. Si se plantea entonces la pregunta: ¿es verdadera la geometría euclídea? Poincaré responde de entrada que no tiene ningún sentido, pero añade que es más cómoda.

En el capítulo IV de esa misma obra, Poincaré aborda un análisis filosófico del concepto de espacio, en el cual separa las propiedades del espacio geométrico —continuo, infinito, de tres dimensiones, homogéneo, e isótropo—, después lo compara con el espacio representativo, es decir el marco de nuestras representaciones y nuestras sensaciones, constituido por los espacios visual, táctil y motor, y llega a la conclusión de que «el grupo de los desplazamientos constituye el objeto de la geometría». Después de esto, Poincaré, partiendo de la conclusión de que «la geometría no es más que el compendio de las leyes según las cuales se suceden las imágenes de nuestras sensaciones», más que un marco impuesto a cada una de nuestras sensaciones, imagina entonces una serie de representaciones, semejantes en todo punto a nuestras representaciones ordinarias, pero que se suceden de acuerdo con leyes diferentes de aquéllas a las que estamos acostumbrados. Poincaré describe a continuación un mundo imaginario encerrado en una gran esfera y sometido a ciertas leyes, de manera que es la geometría de Lobachevski la que se impone a sus habitantes, que es la más cómoda, al contrario de lo que sucede en nuestro mundo en el que es la

geometría euclídea la que se impone. Después de haber descrito ese mundo imaginario, concluye en estos términos:

Seres educados allí encontrarían sin duda más cómodo crear una geometría más cómoda, que se adaptara mejor a sus impresiones. En cuanto a nosotros, respecto de esas mismas impresiones, es seguro que encontraríamos más cómodo no cambiar nuestras costumbres.

En *La naturaleza del razonamiento matemático,* contenida en la obra ya citada, Poincaré plantea en primer lugar la cuestión de que si todas las proposiciones que enuncia la ciencia matemática pudieran deducirse unas de las otras mediante las reglas de la lógica formal, cómo es que la matemática no se reduce a una inmensa tautología. Añade que el razonamiento silogístico sigue siendo incapaz de añadir nada a los datos que se le proporcionan, y estos datos se reducen a algunos axiomas, por lo que no se deberían encontrar otras cosas en las conclusiones. Hace falta, pues, admitir que a partir de las consecuencias que implica el uso de un razonamiento silogístico, el razonamiento matemático tiene por sí mismo una especie de virtud creadora, y por consiguiente se distingue del silogismo. Es así como llega a mostrar que el razonamiento por recurrencia, por su carácter esencial de contener una infinidad de silogismos, es el razonamiento matemático por excelencia. Además, según dice, no se puede concebir una inteligencia lo bastante poderosa para percibir de un solo vistazo el conjunto de las verdades matemáticas. La respuesta es fácil si uno se sirve del razonamiento por recurrencia, porque es un instrumento que permite pasar de lo finito a lo infinito, y sin la idea del infinito matemático «no habría ciencia porque no habría nada general». El matemático no es un analista en el sentido aristotélico de la palabra. Procede por construcción, y va de lo particular a lo general.

Se encuentra también en la cuarta parte de esta misma obra, titulada *La naturaleza,* un texto que contiene sus reflexiones filosóficas sobre el cálculo de probabilidades y cuyo fin es examinar el valor de este cálculo en las ciencias físicas y analizar qué confianza merece. Según Poincaré, la definición habitual de la probabilidad de un suceso en términos de la razón del número de casos favorables al número total de casos posibles es incompleta, e ilustra esta afirmación con un ejemplo del juego de dados. Después emprende una

clasificación de los problemas de probabilidades teniendo en cuenta el concepto de probabilidad subjetiva (probabilidad prevista según las leyes antes de que el fenómeno se produzca) y el concepto de probabilidad objetiva (los sucesos observados se reparten de acuerdo con las leyes del cálculo de probabilidades). Según Poincaré, existen las probabilidades de las ciencias matemáticas, de las ciencias físicas, de los juegos de azar y finalmente de la teoría de errores. Sin aportar, según dice, soluciones a los problemas planteados, Poincaré constata sin embargo que existen ciertos puntos de semejanza en estas diferentes aplicaciones de las probabilidades. Así, al principio hace falta adoptar una hipótesis o un convenio que comporta siempre un grado de arbitrariedad, y la elección de este convenio reposa esencialmente en el principio de razón suficiente. Desgraciadamente, subraya Poincaré, este principio es muy vago y muy elástico, y toma muchas formas diferentes. La forma más usual de este principio es la creencia en la continuidad, creencia sin la que toda ciencia sería imposible. Finalmente, Poincaré añade que los problemas en los que el cálculo de probabilidades puede ser aplicado con aprovechamiento son aquellos en los que el resultado es independiente de la hipótesis hecha al principio, con tal que esta hipótesis satisfaga la condición de continuidad. En resumen, se atribuyen al azar los sucesos que son producidos por causas complejas, pero ¿cómo se puede calcular lo que no se conoce?, ¿cómo puede ser que el azar tenga leyes? Admitiendo que la probabilidad de un suceso determinado es una función continua de este suceso, sin tener ninguna razón *a priori* para presumir las leyes del azar, hay que admitir que la variación del suceso implica en consecuencia una variación de su probabilidad. Así, dos sucesos muy próximos uno de otro son, salvo pequeñas diferencias, igualmente probables. La continuidad de los fenómenos aleatorios está en la base de la ciencia del azar.

Poincaré reflexionó sobre muchos otros temas que se refieren bien a la matemática, bien a la física o incluso a la física matemática, entre los que hemos escogido la noción del «continuo» y la «creación matemática». Serán abordados otros temas en el momento de la presentación de las escuelas de pensamiento creadas a comienzos del siglo XX con el fin de aportar respuestas a la crisis de los fundamentos de las matemáticas, la cual era particularmente aguda en esa época.

En *La ciencia y la hipótesis,* Poincaré trata de la magnitud matemática y de la experiencia y, desde la primera frase, afirma que si se quiere saber lo que los matemáticos entienden por un continuo, no hay que preguntárselo a la geometría. Se interesa, pues, por los trabajos de los aritméticos, y en particular por la escuela de Berlín. Según Poincaré, Kronecker concibe el continuo matemático como una pura creación de la inteligencia. Hablando de las cortaduras de Dedekind, subraya que según el punto de vista de Dedekind, el número inconmensurable $\sqrt{2}$ no es más que el símbolo de ese modo particular de reparto de los números inconmensurables. Pero, añade, contentarse con ello sería olvidar completamente el origen de esos símbolos, porque, ¿tendríamos la noción de esos números si no conociéramos de antemano una materia que concebimos como divisible hasta el infinito, es decir como un continuo? La doctrina contraria es la de los empiristas, según los cuales el continuo matemático está simplemente extraído de la experiencia física. Ninguna de las dos soluciones propuestas satisface a Poincaré, y por ello aborda la creación del continuo matemático en dos etapas: la primera consiste en intercalar entre A y B un número conmensurable de términos, lo que constituye un conjunto numerable de términos, y la segunda consiste en introducir los inconmensurables intercalándolos en el conjunto numerable constituido en la primera etapa. Poincaré llega entonces a la conclusión siguiente: «La inteligencia tiene la facultad de crear símbolos, y es así como ha construido el continuo matemático, que no es más que un sistema particular de símbolos. Su potencia está limitada sólo por la necesidad de evitar toda contradicción; pero la inteligencia no hace uso de ella más que si la experiencia le proporciona una razón para ello.»

En los *Ultimos pensamientos* pueden encontrarse también reflexiones de Poincaré sobre el continuo, pero ligadas esta vez al *análisis situs* y a las cortaduras.

La creación matemática

En una célebre conferencia pronunciada en la Sociedad de Psicología de París en 1908, y reproducida en *Ciencia y método,* Poincaré abordó directamente el estudio de esta facultad misteriosa, la invención, y nos confió sus observaciones sobre las relaciones entre el

consciente y el inconsciente, entre lo lógico y lo fortuito, relaciones que están en la base del problema. También quiso dar a las observaciones que presentaba un carácter personal, por no decir autobiográfico.

El estudio de la invención en general ha sido objeto en el pasado de numerosas investigaciones por eminentes psicólogos, pero cuando se trata de estudios sobre la invención en matemáticas la dificultad es doble porque el tema se refiere a dos disciplinas: la psicología y las matemáticas. Para tratarlo de manera adecuada, habría que ser a la vez matemático y psicólogo. El tema ha sido, sin embargo, estudiado por matemáticos, psicólogos e incluso neurólogos.

Recordemos brevemente que el célebre Gall, quien se interesó por la frenología y fue un precursor de la noción de localización cerebral, deducía de su principio que la capacidad matemática debía caracterizarse por una «protuberancia» especial de la cabeza, cuyo emplazamiento indicaba incluso. Las ideas de Gall fueron recogidas en 1900 por el neurólogo Möbius (nieto del matemático), que realizó un estudio bastante largo y profundo de las capacidades matemáticas consideradas desde el punto de vista de un naturalista. Cierto número de datos se refiere, por ejemplo, a la herencia en el seno de familias de matemáticos, a la longevidad y a capacidades de distintos tipos. Señalemos de paso que Francis Galton (1822-1911) había consagrado un largo capítulo de *Hereditary genius* (1869) a los hombres de ciencia. En cuanto a los psicólogos, algunos habían sostenido que la invención se produce por puro azar, y otros, por el contrario, permanecían fieles a la teoría más clásica de la lógica y del razonamiento sistemático.

M. E. Maillet hizo una primera encuesta entre matemáticos a principios de este siglo, cuyos resultados aparecieron en la revista *L'Enseignement Mathématique* desde 1901 hasta 1908 (tomo III a tomo X). Más de cien matemáticos respondieron al cuestionario, que comprendía treinta preguntas relativas a sus hábitos mentales y a sus métodos de trabajo, variando considerablemente el número de respuestas de una pregunta a otra. Hay que reconocer que la calidad de la medida de ese cuestionario, así como la pertinencia de algunas de las cuestiones, dejaba bastante que desear. Sin embargo, se pueden apreciar algunos índices reveladores: la mayoría de los que contestaron se habían sentido atraídos por las matemáticas antes de los quince años; el gusto por las matemáticas no parecía ser heredi-

tario, y si lo era, provenía de la rama paterna; los dos tercios de los que respondieron se interesaban por las matemáticas puras, y el interés por las diferentes ramas estaba dividido; los métodos de trabajo y los gustos personales de los encuestados también estaban muy divididos; el papel del azar y de la inspiración en los descubrimientos matemáticos eran cuestiones respecto de las cuales no habría unanimidad, aunque sí la habrá respecto del trabajo sostenido, la necesidad del estudio y de la reflexión; la inspiración matemática era más frecuente al despertar que durante el sueño, mientras que las circunstancias que conducían al descubrimiento eran a menudo extrañas, sin vínculo aparente con el tema. Los descubrimientos matemáticos no nacen nunca, al parecer, por generación espontánea; suponen siempre un terreno sembrado de conocimientos previos y bien preparado para un trabajo a la vez consciente y subconsciente. Por otra parte, todo descubrimiento, por su misma novedad y su originalidad, contrasta forzosamente con lo que le precede, y parece tanto más sorprendente cuanto más inopinadamente surge de una incubación latente prolongada. Se comprende, pues, que según los casos y los individuos, en ocasiones sea la dependencia del trabajo voluntario anterior la que sorprende más a su autor cuando reflexiona sobre ello retrospectivamente; otros opinan que el abuso de las lecturas paraliza el desarrollo de la inteligencia, por lo que haría falta leer sobre todo a los clásicos, las obras maestras, etc.; se habla también a menudo de la preocupación constante por las analogías en la invención, del orden caótico de los teoremas, etc. Las costumbres de la vida de los matemáticos son sensiblemente las mismas que las de la mayoría de las personas.

Poincaré afirma al comienzo de su exposición que tuvo conocimiento de los resultados de esa encuesta cuando su texto estaba prácticamente terminado, pero añade que, de forma general, la mayoría de esas opiniones confirman sus conclusiones.

Entra en lo más importante del tema planteando la pregunta siguiente: ¿cómo es posible que tanta gente no comprenda las matemáticas? Poincaré responde a esta pregunta mostrando que la aptitud para las matemáticas reposa esencialmente en una buena memoria y en una fuerza prodigiosa de la atención. Sin embargo, la demostración matemática exige que los silogismos se coloquen en un cierto orden, y es precisamente ese orden lo que es importante. Porque, según dice, si «tengo la sensación, la intuición de este or-

den de forma tal que percibo de un vistazo el conjunto del razonamiento, no temo ya olvidarme de uno de los elementos porque cada uno de ellos vendrá a colocarse en su sitio, sin ningún esfuerzo de memoria». Es aquí donde el matemático se diferencia de los demás por esta «intuición del orden matemático» que le permitirá crear, lo cual no está al alcance de todos.

La creación matemática, según Poincaré, consiste precisamente en no hacer combinaciones inútiles sino las que son útiles, las cuales, sin embargo, están en minoría. «La invención es discernimiento, elección». Procediendo por analogía entre los hechos matemáticos y otros tipos de hechos, llegaremos, según Poincaré, al conocimiento de las leyes matemáticas. Después añade que, entre las diferentes combinaciones, las más fecundas serán aquellas formadas con elementos extraídos de campos muy alejados unos de otros. Inventar es elegir pero, según dice, la palabra no es del todo exacta, y para ilustrar su punto de vista decide narrar el célebre descubrimiento que consagró su gloria, la teoría de las funciones fuchsianas. Después de haberse dedicado en vano al tema durante un par de semanas, y queriendo probar que no podían existir tales funciones, describe la noche de insomnio en la que demostró precisamente la falsedad de esta idea:

> Una noche tomé café solo, contrariamente a mi costumbre, y no pude dormirme; las ideas surgían en tropel; las sentía como chocar, hasta que dos de ellas se enganchaban, por decirlo así, para formar una combinación estable. A la mañana siguiente, había establecido la existencia de una clase de las funciones fuchsianas, las que provienen de las series hipergeométricas; no tenía entonces más que escribir los resultados, lo que hice en sólo algunas horas.

Este fenómeno bastante excepcional de sentir la coexistencia del yo consciente y el yo subconsciente, fue expresado por Poincaré de la manera siguiente: «Parece que, en estos casos, asiste uno mismo a su propio trabajo inconsciente, que ha llegado a ser parcialmente perceptible para la consciencia sobreexcitada, y que no por ello ha cambiado de naturaleza. Entonces uno se da cuenta vagamente de lo que distingue a los dos mecanismos.»

Poincaré intentó luego encontrar una expresión para esas funciones, y he aquí cómo llegó a su resultado:

Quise representar estas funciones mediante el cociente de dos series; esta idea fue perfectamente consciente y reflexionada; la analogía con las funciones elípticas me guiaba. Me preguntaba cuáles debían ser las propiedades de esas series si existían y llegué sin dificultad a formar las series que llamé zetafuchsianas. En ese punto, me fui de Caen, en donde vivía entonces, para tomar parte en una excursión geológica emprendida por la Escuela de Minas. Las peripecias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos; llegados a Coutances, subimos a un omnibús para no sé qué paseo; en el momento en el que ponía el pie en el estribo, me vino la idea, sin que nada en mis pensamientos anteriores pareciera haberme preparado para ello, de que las transformaciones que había utilizado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no euclídea.»

Añade que comprobó este resultado, más tranquilamente, a su vuelta a Caen, y después prosigue:

Me puse entonces a estudiar cuestiones de aritmética sin grandes resultados aparentemente y sin sospechar que ello pudiera tener la más mínima relación con mis investigaciones anteriores. Cansado por mi falta de éxito, fui a pasar unos días al borde del mar, y pensé en cosas absolutamente diferentes. Un día, paseándome por un acantilado, me vino la idea, siempre con las mismas características de brevedad, certeza inmediata y subitaneidad, de que las transformaciones aritméticas de las formas cuadráticas ternarias indefinidas eran idénticas a la de la geometría no euclídea.

Así, Poincaré se dio cuenta de que existían otros grupos fuchsianos, y por consiguiente otras funciones fuchsianas, además de las ya descubiertas en su célebre noche de insomnio. A continuación, Poincaré se dedicó a los casos más generales y, una vez más, después de un esfuerzo consciente persistente, no llegó a superar la dificultad más que de una manera inesperada y sin preparación, en el momento de su servicio militar. Poincaré formula finalmente algunas observaciones pertinentes a propósito del acto de invención que, en resumen, son rasgos característicos de la creatividad en general. Por ejemplo, subraya que el papel del trabajo inconsciente en la invención matemática le parece indiscutible (período de incubación), de la misma manera que el papel eficaz de las conspiraciones repentinas cuando van precedidas y seguidas de períodos de reflexión conscientes. Añade que las ideas nuevas que surgen no pueden ser reglas mecánicas o fórmulas algebraicas acabadas, porque estas

últimas son estrictas y complicadas y, por consiguiente, exigen disciplina y mucha atención, y pertenecen, por tanto, al trabajo consciente. Finalmente, reconoce que esa noche de insomnio fue una noche de excitación, muy a pesar suyo, porque asistió, sin intervenir conscientemente, al trabajo de su subconsciente.

Que sepamos, Poincaré fue el primer matemático célebre que expuso sus observaciones sobre la creatividad en matemáticas, y esta conferencia pronunciada en 1908 llevará al mundo científico a inclinarse seriamente hacia el estudio de la creatividad. En efecto, algunos años más tarde, fue llevada a cabo por varios matemáticos con la ayuda de Claparède y Fournoy una encuesta más importante que la de Maillet, cuyos resultados fueron publicados también en *L'Enseignement Mathématique*. Además, en 1937, tuvieron lugar en el Centro de Síntesis de París una serie de conferencias sobre las diversas clases de invenciones con la participación de Claparède. Más tarde, en 1945, aparecía en los Estados Unidos una célebre obra escrita por Jacques Hadamard (1865-1963) que fue traducida al francés después, y que llevaba por título *Ensayo sobre la psicología de la invención en el dominio de las matemáticas* (1959).

Hadamard era también un matemático de gran clase, y sus contribuciones en el campo de las matemáticas son imponentes: generalizó la teoría de las características a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de cualquier orden; fue uno de los primeros matemáticos que realizó importantes aplicaciones de la teoría de los números transfinitos al análisis; hizo estudios sobre las operaciones funcionales mediante el cálculo de variaciones, y se le debe el término funcional; se le debe igualmente una demostración del célebre teorema de los números primos mediante la función zeta, en 1896, así como investigaciones sobre los determinantes.

El *Ensayo* de Hadamard es ciertamente el primer libro importante publicado sobre la creatividad en general y, por añadidura, está aplicado al campo de las matemáticas. En la segunda mitad del siglo XX, asistiremos a un recrudecimiento de las investigaciones en este campo, y son de señalar particularmente las contribuciones americanas e inglesas. Entre los autores importantes, podemos citar a J. P. Guilford, L. Hudson, P. E. Vernon, E. P. Torrance, E. de Bono, A. E. Osborn, W. J. J. Gordon, A. Beaudot, G. y B. Veraldi, S. Arieti, S. J. Parnes, C. S. Cottell.

LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS

Cuando consideramos desde un punto de vista lógico el desarrollo de las matemáticas a finales del siglo XIX, podemos constatar que la noción misma de verdad matemática se ha separado del mundo sensible. En efecto, la creación de los números complejos e hipercomplejos, el advenimiento de las álgebras de dimensión finita y de la teoría cantoriana de los números transfinitos, el desarrollo de esta teoría y de la de los números reales, forzaron, por así decirlo, a los matemáticos a no contar ya con la realidad sensible para verificar sus teorías. Como en muchos casos las matemáticas se reducían a una colección de estructuras, cada una de ellas desarrollada sobre un sistema de axiomas que le era propio, la cuestión de la consistencia de esos axiomas se hacía cada vez más acuciante, y varios matemáticos se preocuparon de ese problema. Los modelos propuestos por Beltrami y Poincaré, alrededor de 1880, hicieron posible la consistencia de las geometrías no euclídeas.

Después de 1880, fueron Peano y su escuela quienes se ocuparon del problema de los fundamentos de la aritmética. Aproximadamente en la misma época, Frege elabora una tentativa seria para reducir toda la aritmética a la lógica. Mientras tanto, Hilbert consigue establecer la consistencia de la geometría euclídea sobre la hipótesis de que la aritmética es consistente. Pero la carta de Russell a Frege, en 1902, planteó un segundo problema importante para los fundamentos, la presencia de paradojas en el seno de la teoría de conjuntos, lo que hizo fracasar las tentativas de Peano y Frege. En poco tiempo, paradojas tales como las de Russell, Burali-Forti, Richard, Grelling y Nelson plantearon controversias y sumieron al mundo de las matemáticas en una verdadera crisis que hizo tambalearse toda la confianza de los matemáticos. A principios del siglo XX, las preocupaciones principales de un buen número de matemáticos estaban centradas en este problema de los fundamentos, pero no por ello hay que creer que esto impidió el desarrollo y el progreso de muchos otros temas de las matemáticas. En particular, bajo la influencia de la teoría de conjuntos, se desarrolló considerablemente la teoría de la medida, alrededor de 1900, con los trabajos de Jordan, contenidos en su *Cours d'analyse* (Curso de análisis) (1893), las *Leçons sur la théorie des fonctions* (Lecciones sobre la teoría de funciones) (1898), de Borel, la tesis de René Baire (1874-1932),

titulada *Sur les fonctions des variables réelles* (Sobre las funciones de variables reales), en la que introduce el concepto importante de «conjunto abierto» y, evidentemente, con la tesis de Lebesgue, en 1902, y sus famosas *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Lecciones sobre la integración y la búsqueda de funciones primitivas), de 1903, en donde desarrolla su célebre integral. Paralelamente, el surgimiento de la topología de los conjuntos de puntos proviene de la extensión de la teoría de conjuntos emprendida por Giulio Ascoli (1843-1896) con una memoria que trata del estudio de los conjuntos de curvas (1883); después, Vito Volterra (1860-1940) publicó sus primeras investigaciones sobre los funcionales en 1886; a continuación, Hadamard propuso en 1897 (en el I Congreso Internacional de Matemáticos) un estudio sobre el conjunto de las funciones continuas en el intervalo (0, 1) con valores dados en los extremos; en 1903, Borel propuso también un estudio, esta vez sobre los conjuntos cuyos elementos son rectas o planos, y sugirió una manera de extender la noción de entorno en una memoria titulada *Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans* (Algunas observaciones sobre los conjuntos de rectas o planos; en el mismo año, Ivar Irik Fredholm (1866-1927) publicó una memoria que permitía la extensión del concepto de argumento a las mismas funciones; en 1906, el concepto de espacio abstracto fue generalizado en la tesis de Maurice Fréchet (1878-1973), en la que intentaba unificar en términos abstractos las ideas de sus predecesores bajo el vocablo de cálculo funcional; después, Hermann Weyl (1885-1955) propuso un desarrollo de las variedades generales en dos dimensiones en términos de entorno; y, finalmente, Felix Hausdorff (1868-1942) se sirve del concepto de entorno en sus *Gründzüge der Mengenlehre* (Rasgos fundamentales de la teoría de conjuntos) (1914) para elaborar una teoría definitiva de los espacios abstractos, con lo que la topología de los conjuntos de puntos se convierte entonces en una disciplina autónoma. Sin embargo, la cuestión de los fundamentos constituye en esta época una preocupación principal que no se puede ignorar, a causa de la influencia que ejerció en numerosas investigaciones posteriores.

En las páginas que siguen, expondremos brevemente la cuestión de las paradojas o antinomias de la teoría de conjuntos, y después las investigaciones que condujeron a la axiomatización de esta teoría, y,

finalmente, analizaremos los trabajos ligados a las tres escuelas de pensamiento que se formaron con el fin de exponer su propia concepción de la matemática.

LAS PARADOJAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

En su uso habitual, los términos «paradojas» o «antinomias» son considerados a menudo como sinónimos. Se habla frecuentemente de las «paradojas de la teoría de conjuntos» cuando se hace referencia a las contradicciones observadas en esta teoría. El término «antinomia» significa un enunciado o una proposición contradictoria en sí, que puede ser representada formalmente mediante una equivalencia entre la proposición y su negación. Por el contrario, un teorema verdadero es una paradoja si aparece como incorrecto sobre la base de consideraciones previas muy precisas. Además, hablar de paradojas es establecer un hecho psicológico, y lo que aparece como paradójico para uno puede parecer completamente aceptable o natural para otro. A pesar de esta distinción de matiz entre los dos términos, emplearemos más a menudo la palabra paradoja, porque es el término más utilizado por los matemáticos para designar las contradicciones de la teoría de conjuntos.

Ya en 1895, Cantor tenía conciencia de la paradoja del conjunto de todos los ordinales y, en la misma época, parecía estar al corriente de la paradoja del conjunto de todos los conjuntos. En una carta dirigida a Dedekind, en 1899, expone sus puntos de vista sobre las antinomias inherentes a ciertos conjuntos, y en particular estudia el sistema de todos los ordinales. Un conjunto w es un número ordinal si puede ser bien ordenado de manera que para todo elemento v de w el segmento inicial $I(v)$ de w sea igual a v, donde $I(v) = \{0, 1, 2, \ldots v - 1\}$. Por ejemplo, el número natural 3 es un número ordinal, porque $I(3)$ es igual a 3, y de la misma manera todo número natural es un número ordinal. Además, el conjunto w de todos los números naturales situados en el orden natural es también un número ordinal.

Según Cantor, si Ω fuera un conjunto, habría un ordinal δ, el cual sería mayor que todos los ordinales α, y en particular δ sería mayor que δ, lo que es absurdo. Es entonces cuando subdivide las «multititudes» en dos categorías: las que pueden coleccionarse en

una entidad y las que no pueden concebirse como un objeto único sin provocar una contradicción. Cantor distingue las primeras de las segundas mediante los términos «multitudes consistentes» y «multitudes inconsistentes», respectivamente. Es importante señalar aquí que Cantor anuncia ya que ciertas clases de objetos no pueden ser consideradas como formando un nuevo conjunto. Se encuentran también en esta carta otros ejemplos de «multitudes inconsistentes» como la colección de los álefs $\aleph_0$, $\aleph_1$, ... $\aleph_\alpha$ donde $\aleph_0$ designa la cardinalidad de todos los conjuntos numerables, etc. Dado un número transfinito que designa la cardinalidad de un conjunto, puede obtenerse otro «mayor» siempre, en particular el que designa la cardinalidad del conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de partida. Ello plantea, en primer lugar la célebre paradoja de Cantor al considerar si habría número transfinito posterior al correspondiente al conjunto cuyos elementos son todos los posibles conjuntos, y en segundo lugar, la cuestión de si entre dos números transfinitos construidos de esa forma existen otros intermedios. Todo esto condujo a la hipótesis del continuo propuesta por Hilbert en la lista de veintitrés problemas que presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900.

Cesare Burali-Forti (1861-1931) publicó en 1897 una memoria titulada *Una questioni sui numeri transfiniti* (Una cuestión sobre los números transfinitos) en la que formulaba la paradoja que lleva su nombre con el simbolismo introducido por Peano: si el conjunto Ω de todos los ordinales está bien ordenado, también es un ordinal. Entonces, para cada ordinal α se tiene que $\alpha < \Omega$, y en particular $\Omega + 1 < \Omega$, lo que es absurdo. La publicación de esta paradoja originó algunas discusiones entre los matemáticos, y en particular Poincaré presentó en *Ciencia y método* una discusión de esta paradoja, cuya existencia parecía imputar a la lógica simbólica, además de formular algunas exigencias a los que quisieran utilizar correctamente el lenguaje de la lógica. Hadamard también se ocupó de esta contradicción de la teoría cantoriana de conjuntos, y llegó a la conclusión de que había que rechazar la existencia de una colección de todos los ordinales en un conjunto.

Con motivo del Congreso Internacional de París, presidido por Poincaré, Russell conoció personalmente a Peano y, a la vista de las discusiones de los participantes, el joven matemático inglés subraya

en su autobiografía que Peano había mostrado la máxima precisión en sus declaraciones, y que cuando se entablaba una discusión era invariablemente el más fuerte. Russell añade que era gracias a su lógica matemática como Peano lo conseguía. Influenciado por Peano, y trabajando en estrecha colaboración con Whitehead, Russell hizo progresos notables en la nueva lógica. En el verano de 1901, conoce algunas antinomias de la teoría de conjuntos de Cantor, y algún tiempo después formula su célebre paradoja de las clases $\{x | x \notin x\}$. Sea $w = \{x | x \notin x\}$ la clase de todas las clases que no son elementos de sí mismas; se demuestra fácilmente que si $w \in w$ ó $w \notin w$, cada proposición conduce a una contradicción. Según Russell, la contradicción proviene de un tipo de razonamiento circular que él llama «círculo vicioso» y que implica una argumentación falaz. En 1903 publicó una exposición de este tipo de contradicción en sus *Principles of mathematics* (Principios de matemáticas). Mientras tanto, Frege había publicado un apéndice en el segundo volumen de sus *Grundgesetze* (1902) en el que expresaba su amargura al ver desmoronarse, por así decirlo, toda su obra como consecuencia de la carta de Russell que contenía la paradoja de las clases. Intentará resolver el obstáculo considerando diversas sugerencias, la primera de las cuales se refiere a la posible existencia de conceptos para los cuales no existirían clases correspondientes. Por ejemplo, si el concepto de una clase que no es elemento de sí misma es un concepto que no corresponde a una clase, la paradoja de Russell no se mantiene. Pero Frege preferirá modificar su quinto axioma en lugar de conciliar esta concepción revolucionaria con su propia teoría, y desgraciadamente, las modificaciones aportadas a su teoría no eran suficientes para liberar a su sistema de toda antinomia.

Parece que Russell hizo caso de la primera sugerencia de Frege, es decir que ciertas funciones de enunciado no determinan verdaderas clases, y que el problema del lógico consistía en elaborar reglas mediante las cuales estas funciones no predicativas, como él las llamaba, pudieran ser distinguidas de las otras. En un artículo publicado en 1906, Russell admitía la posibilidad de resolver el problema únicamente con la condición de eliminar la utilización de la notación de clase, de la misma manera que se habían eliminado las cantidades infinitesimales en el cálculo diferencial e integral. Además, consideraba que era importante determinar qué porción

de las matemáticas podría ser presentada sin recurrir a la notación de clase.

En el momento en que Russell publicaba su sugerencia de las funciones de enunciado no predicativas, Poincaré tomaba parte muy activamente en una disputa con Peano y sus discípulos a propósito del razonamiento matemático. En *Las matemáticas y la lógica (Ciencia y método),* Poincaré recuerda que el razonamiento por recurrencia es la fuente por excelencia en matemáticas y que, al depender de la intuición del paso al infinito, no puede ser reducido a una regla formal. En un segundo artículo (1906), Poincaré muestra que las paradojas provienen de una falsa concepción de las matemáticas, y aunque esté de acuerdo con la distinción de Russell entre función predicativa y función no predicativa, añade que la verdadera explicación de esta diferencia debe buscarse en los comentarios de Richard a propósito de la paradoja propuesta por este último en 1905. Poincaré llega, a partir de todo ello, a la conclusión siguiente: «Así, las definiciones que deben ser consideradas como no predicativas son las que contienen un círculo vicioso.» Es razonable pensar que las declaraciones de Poincaré tienden a demostrar que faltan ciertas definiciones matemáticas y que el círculo vicioso que da origen a las paradojas está ligado a la tentativa de querer tratar un conjunto infinito como una entidad. Además, añade esta observación mordaz a propósito de los cantorianos: «No existe el infinito actual. Los cantorianos lo han olvidado y han caído en la contradicción.» Russell respondió a Poincaré que las paradojas eran todas debidas a círculos viciosos, pero que no estaba de acuerdo con él en su interpretación del principio y no aceptaba relacionar la fuente de las paradojas con una falsa concepción de los conjuntos infinitos de Cantor. Russell creía que la naturaleza de las antinomias era más lógica que matemática, ya que eran esencialmente del mismo género que la antigua paradoja de Epiménides o el mentiroso: si un hombre dice «miento», su expresión es contradictoria y no puede ser ni verdadera ni falsa.

Entre las otras paradojas propuestas en esta época, se puede mencionar la enunciada por Kurt Grelling (1886-1941) y Leonard Nelson (1882-1927) en 1908: algunos adjetivos, cuando se aplican a ellos mismos, siguen siendo adjetivos. Por ejemplo, corto y polisílabo se describen mediante ellos mismos, es decir, el adjetivo corto es corto, el adjetivo polisílabo es polisílabo, y son verdaderos por sí

mismos según los autores. Por el contrario, los adjetivos largo y monosílabo no lo son, porque el adjetivo largo no es largo y el adjetivo monosílabo no es monosílabo. Estos adjetivos que no son descriptivos de ellos mismos, se llaman «heterológicos», y la cuestión es: ¿es el adjetivo «heterológico», a su vez, heterológico? Esta cuestión implica una contradicción ya se responda de una manera afirmativa o negativa. En 1918, Russell propuso su célebre paradoja del barbero: «En un pueblo hay un barbero que afeita la barba a todos los que no se afeitan a sí mismos; la cuestión es saber si el barbero se afeita a él mismo. La paradoja proviene del hecho de que sólo se afeita si no se afeita.» Una reseña histórica de estas paradojas está incluida en la obra de Fraenkel y Bar-Hillel (véase la bibliografía).

Russell y Whitehead señalan que la causa de estas paradojas está en el hecho de que un objeto es definido en términos de una clase de objetos que contiene precisamente al objeto a definir. La distinción entre función predicativa y función no predicativa no es suficiente para eliminar toda contradicción. En efecto, es evidente que la clase de todos los hombres no es por sí misma un hombre, mientras que la clase de todas las ideas es, por sí misma, una idea. Esta distinción permite separar las clases en dos categorías mutuamente excluyentes: aquellas que son elementos de sí mismas y aquellas que no lo son. Pero se puede probar que si M denota la primera categoría y N la segunda, N pertenece tanto a M como a sí misma. Por consiguiente, la utilización de la definición no predicativa debe ser excluida de la teoría de conjuntos. Además, Zermelo había observado en 1908 que este tipo de definición servía en análisis, en particular para definir las cotas inferiores de un conjunto de números. Por añadidura, la demostración de Cantor de que el conjunto de los números reales no es numerable, recurría también a una definición no predicativa de los conjuntos.

Estas paradojas conmovieron a los matemáticos hasta tal punto que Dedekind, por ejemplo, se desanimó tanto que retrasó a sabiendas durante ocho años la publicación de la tercera edición de su obra *Was sind und was sollen die Zahlen* (La naturaleza y el significado de los números). Algunos de ellos, perplejos ante estas antinomias, aceptaron compromisos no sólo a nivel de la teoría de conjuntos, sino también en partes importantes del análisis. Otros, por fin, entre los que hay que contar a Zermelo y Russell, decidie-

ron emprender una revisión sistemática de la teoría de conjuntos, el primero de ellos elaborando una axiomatización, y el segundo, con la colaboración estrecha de Whitehead, llevando a cabo una sistematización de las matemáticas en el monumental tratado de los *Principia mathematica* (1910-1913).

LA AXIOMATIZACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Ernst Zermelo (1871-1953) emprendió en 1904 la tarea de demostrar la comparación entre los números cardinales de conjuntos que no están bien ordenados. En esta época, la propiedad de ser comparados de dos cardinales cualesquiera m y n, es decir, de establecer las relaciones $m > n$, $m < n$ ó $m = n$, no había sido demostrada. La memoria de Zermelo de 1904 (y la de 1908) suministraba la prueba de que cualquier conjunto podía ser bien ordenado, prueba que Cantor había intentado obtener en vano desde 1883. Hilbert presentó el enunciado de este teorema en el Congreso Internacional de París como uno de los problemas que permanecía sin demostración. La demostración de Zermelo se basaba en un principio que formuló inmediatamente después de su demostración, el «axioma de elección», que puede enunciarse como sigue: para toda familia de conjuntos no vacíos y disjuntos, existe una función que permite escoger un solo elemento en cada conjunto de manera que se pueda formar un nuevo conjunto. Añadamos que el axioma de elección, el teorema de la buena ordenación y la comparación de dos conjuntos mediante sus cardinales respectivos son principios equivalentes. (Véase Rubin y Rubin, en la bibliografía.)

Desde su aparición, el axioma de elección fue objeto de una controversia, en particular con Peano, quien acusaba a Zermelo de no haberlo demostrado, y con varios matemáticos franceses (Hadamard, Lebesgue, Borel y Baire), que consideraban en sustancia que la función no había sido especificada, y por ello no se podía considerar este axioma como un principo suficientemente significativo. Una excepción importante, Poincaré, consideraba este axioma como un juicio sintético, *a priori,* sin el cual la teoría de los cardinales sería imposible, tanto para los conjuntos finitos como para los conjuntos infinitos. Un ejemplo popular, sugerido por Russell, sirve para clarificar las circunstancias en las que el axioma

de elección es necesario. En una colección infinita de pares de zapatos, este axioma no es necesario para establecer la existencia de un conjunto escogido de forma que contenga exactamente un elemento de cada par, pues basta enunciar una regla para escoger los zapatos del pie derecho. Pero en el caso de una colección infinita de calcetines (medias), todos semejantes en cuanto al color, el tamaño, etc., no se dispone de ninguna regla; se debe entonces recurrir al axioma de elección si la afirmación consiste en decir que existe un conjunto que contiene exactamente un calcetín de cada par de la colección. Señalemos que se propusieron varios axiomas de elección a continuación del de Zermelo, como, por ejemplo, el «axioma multiplicativo», publicado por Russell en 1905, y otros que serían utilizados, en particular, en la teoría de la medida y en análisis. La equivalencia lógica de estos «axiomas de elección», desempeñó también un papel importante en la controversia, y algunas objeciones formuladas en aquella época han sobrevivido hasta nuestros días. Sin embargo, los trabajos de Paul J. Cohen (1934) han permitido establecer la independencia de la hipótesis del continuo y, de este modo, han contribuido a clarificar el estatuto del axioma de elección y de los teoremas que no pueden ser demostrados sin ese axioma.

La axiomatización de la teoría de conjuntos por Zermelo está contenida en su memoria de 1908, titulada *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* (Investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos), publicada en los *Mathematische Annalen.* Zermelo comienza su memoria considerando que la definición de Cantor del concepto de conjunto requiere seguramente algunas limitaciones, pero nadie ha llegado a sustituirla todavía por otra definición, igualmente sencilla, esta vez exenta de toda duda. Frente a tal situación, Zermelo considera que no tiene elección, y por ello decide invertir el orden, es decir partir de la teoría existente y buscar los principios que se requieren como bases de esta disciplina matemática. Añade a continuación que el problema debe resolverse de tal manera que los principios se hagan lo suficientemente limitados como para excluir todas las contradicciones, pero sean todavía lo suficientemente amplios como para que todo lo que es válido en esta teoría pueda ser preservado. Zermelo esperaba así que axiomas claros y explícitos clarificaran la significación de un conjunto y las propiedades que deberían poseer los conjuntos.

Además, pensaba que, reduciendo los conjuntos a la categoría de los conjuntos consistentes de Cantor, ello sería suficiente para las matemáticas. Su plan consistía en presentar la teoría de conjuntos como una teoría completamente axiomatizada en la que el concepto de conjunto *(Menge)* debería permanecer indefinido, exceptuando las propiedades que le fueran atribuidas por los axiomas.

En su teoría, se encuentran tres nociones primitivas: conjunto *(Menge),* «urelemento» y la relación de pertenencia $\in$, y además un cierto campo de objetos abstractos B; los objetos o cosas *(Dinge)* se representan mediante letras, y la igualdad $a = b$ debe tomarse como la afirmación de que los dos símbolos a y b designan la misma cosa. Los conjuntos *(Menge)* se distinguen de los «urelementos» por la propiedad de poseer elementos, salvo el conjunto vacío. A continuación, Zermelo presenta sus axiomas como lo haría un geómetra moderno en el caso de un conjunto de axiomas para una geometría no euclídea. De hecho, los presenta de una manera que respeta el espíritu de la axiomatización de la geometría de Hilbert. Como la teoría no está formulada en el lenguaje formal, Zermelo quiere precisar los tipos de proposiciones que son significativas para su teoría. Define también una proposición P como bien definida si las relaciones fundamentales del dominio mediante axiomas y leyes universales válidas de lógica determinan sin arbitrariedad cuando es o no válida. Presenta a continuación siete axiomas:

1. Axioma de extensionalidad: si cada elemento de un conjunto x es un elemento del conjunto y y viceversa, entonces $x = y$ (todo conjunto está determinado por sus elementos).
2. Axiomas de los conjuntos elementales: la existencia del conjunto vacío, del singletón, y si x e y son dos objetos, entonces el conjunto $\{x, y\}$ contiene precisamente a x y a y.

Los axiomas 3, 4 y 5 permiten la formación respectiva de subconjuntos, del conjunto potencia y de la reunión de conjuntos, mientras que el 6 es el axioma de elección. El último axioma de Zermelo, el axioma del infinito, garantiza la existencia en B de un conjunto Z con los elementos 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, ... Se puede así utilizar para presentar la sucesión 0, 1, 2, ... de los números naturales o el conjunto numerable de referencia en el sistema de Zermelo. Después de la presentación de sus axiomas, consagra la otra parte de su memoria a una discusión detallada de la equipotencia de los conjuntos. La

noción de «bien definida» fue introducida por Zermelo para tener en cuenta su tercer axioma, que precisa qué tipos de propiedades definen los subconjuntos. Esta noción será revisada precisamente por Fraenkel en 1922. Subrayemos que la memoria de Zermelo fue comentada y criticada por Poincaré en una memoria titulada *La logique de l'infini* (La lógica del infinito), de 1909 (incluida en sus *Ultimos pensamientos*). En resumen, Poincaré pretende que los axiomas no le satisfacen porque no sólo, según dice, no le parecen evidentes, sino que «cuando se me pregunte si están exentos de contradicción, no sabré qué responder». El autor, subraya, ha creído evitar la paradoja del mayor cardinal prohibiéndose toda especulación fuera del recinto de un *Menge* (notemos que Poincaré se niega a utilizar el término francés *ensemble* (conjunto) porque la palabra *Menge*, según dice, no parece haber conservado en estos axiomas el sentido intuitivo de la palabra conjunto). Finalmente, añade que estaría tranquilo si Zermelo hubiera demostrado que estaba a cubierto de la contradicción, pero sabe también que no podría hacerlo dentro del marco estricto de sus axiomas.

Abraham A. Fraenkel (1891-1965) modificó el tercer axioma de Zermelo en 1922 a fin de eliminar su imprecisión, demostró la independencia del axioma de elección e introdujo el axioma de sustitución, utilizando el signo $=$ como una noción primitiva del mismo tipo que $\in$. El mismo año, el matemático noruego Thoralf Skolem presentó puntos de vista semejantes a los de Fraenkel en el V Congreso de Matemáticos Escandinavos celebrado en Helsinki, con variantes que hacían más flexibles el tratamiento y la visualización del sistema. A partir de los trabajos de estos tres matemáticos, el sistema axiomático de la teoría de conjuntos, propuesto inicialmente por Zermelo, lleva en la actualidad el nombre de «teoría de Fraenkel-Zermelo». Mientras tanto fue introducido el concepto de par ordenado, y los trabajos subsiguientes de Von Neumann, Paul Bernays y Kurt Gödel permitieron refinar la teoría de conjuntos y hacer respetables los conjuntos inconsistentes de Cantor. Las investigaciones posteriores se refirieron sobre todo a la consistencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo, la independencia de esta última hipótesis, los grandes cardinales y la teoría de juegos y estrategias. (Véase Van Dalen y Monna en la bibliografía.)

LAS ESCUELAS DE PENSAMIENTO EN MATEMÁTICAS

En la época en que fue difundida la teoría de conjuntos, Kronecker atacó duramente esta concepción revolucionaria de las matemáticas sobre la base de sus propias concepciones «intuicionistas». Varios matemáticos participaron también en el debate, y otros permanecieron prácticamente neutrales, pero lo que es también digno de mención es que esta situación favoreció los intercambios de ideas entre matemáticos, al mismo tiempo que reveló la existencia manifiesta de puntos de vista fundamentales, de concepciones profundas sobre la naturaleza y los fundamentos de las matemáticas. Aunque no se puedan separar fácilmente todas las variantes de estas concepciones, es relativamente fácil, por el contrario, percibir tres grandes corrientes filosóficas, tres grandes escuelas del pensamiento en matemáticas que, a través de sus investigaciones, sus publicaciones y sus críticas, reflejan elocuentemente la unidad de pensamiento propia de cada una de ellas. Queremos hablar aquí de las escuelas logística, formalista e intuicionista, las cuales contaron en sus filas con un cierto número de matemáticos y cuyas cabezas dirigentes fueron, respectivamente, Russell y Whitehead, Hilbert, Brouwer y Weyl. Es importante señalar que muchos matemáticos en esta época no manifestaron abiertamente su inclinación por una u otra de estas escuelas y que, por consiguiente, no pueden ser consideradas como representativas del conjunto de los matemáticos activos hacia 1900. Sin embargo, su importancia es muy manifiesta si se analizan sus contribuciones a la ciencia matemática, tanto a nivel del contenido matemático como en el plano de sus concepciones profundas sobre la naturaleza y los fundamentos de esta ciencia.

En 1893, Klein distinguía claramente tres categorías de matemáticos, en sus *Lectures on mathematics* (Lecciones de matemáticas), en estos términos:

Entre los matemáticos en general, se pueden distinguir tres grandes categorías; y los nombres de *lógicos, formalistas* e *intuicionistas* pueden servir quizás para caracterizarlos. 1) La palabra *lógico* es utilizada aquí, evidentemente, sin hacer referencia a la lógica matemática de Boole, Peirce, etc.; se trata solamente de designar con esta palabra a un grupo de hombres cuya principal fuerza se basa en su potencia lógica y crítica, en su habilidad para

proporcionar definiciones estrictas y extraer de allí deducciones rigurosas. Es bien conocida la influencia sana y preponderante ejercida por Weierstrass en Alemania en esta dirección. 2) Entre los matemáticos, los *formalistas* se destacan principalmente en el hábil tratamiento formal de una cuestión dada y en la invención de un algoritmo apropiado para esta regla. Digamos que *Cayley* y *Sylvester* deben pertenecer a este grupo. 3) Finalmente, los *intuicionistas* son los que recurren particularmente a la intuición geométrica (Anschawung), no sólo en geometría pura, sino en todas las ramas de las matemáticas. Lo que Benjamin Peirce ha llamado «geometrizar una cuestión matemática» parece expresar la misma idea. *Lord Kelvin* y *Von Staudt* son representantes de esta última categoría.

Añadamos que Poincaré, en su discurso inaugural del Congreso Internacional de París expresó puntos de vista muy parecidos a las distinciones de Klein. En la misma época, las paradojas de la teoría de conjuntos obligaron a los matemáticos a emprender una revisión sistemática de la teoría que llevará a Zermelo, Fraenkel y Skolem a elaborar una teoría axiomática de conjuntos. Aunque esta axiomatización haya servido como base lógica de las matemáticas existentes, el enfoque preconizado por estos tres matemáticos no era satisfactorio para un buen número de ellos. Además, la cuestión de la consistencia del sistema de los números reales y de la teoría de conjuntos no había sido todavía resuelta, y la utilización del axioma de elección suscitaba controversias. Pero la cuestión de los fundamentos seguía siendo un problema importante y no se llegaba a identificarlo claramente, tanto más cuanto que las axiomatizaciones logradas hacia 1900 habían sido realizadas sirviéndose de la lógica matemática existente, la cual era aceptada como algo establecido. Se asiste entonces a una especie de protesta general en la que los matemáticos quieren replantear los fundamentos mismos de las matemáticas: es el comienzo verdadero de las escuelas de pensamiento.

LA ESCUELA LOGÍSTICA

Hemos visto anteriormente la tentativa de Frege para reconstruir la lógica sobre bases más estrictas y formales, así como sus intentos de edificar la aritmética a partir de la lógica. Desgraciadamente, la aparición de la paradoja de Russell tuvo el efecto de hacer su

sistema inconsistente y, a pesar de las mejoras aportadas a los axiomas de su sistema, Frege no llegó a disipar completamente la inconsistencia de su teoría. Pero, afortunadamente, este plan no fue abandonado, pues Russell y Whitehead habían emprendido, con independencia de Frege, la tarea monumental de derivar toda la matemática a partir de la lógica.

RUSSELL Y WHITEHEAD

Bertrand Russell (1872-1970), matemático, filósofo y sociólogo británico, nació en Trellek (País de Gales) en 1872. Escribió en su autobiografía: «Me he imaginado sucesivamente como liberal, socialista o pacifista, pero no he sido nunca ninguna de estas cosas, en ningún sentido profundo. Siempre el intelecto escéptico, cuando más he querido acallarlo, me ha inspirado dudas, me ha aislado del entusiasmo fácil de los otros y me ha transportado a una soledad desolada.»

Entre sus múltiples publicaciones, podemos mencionar su *Essay on the foundations of geometry* (Ensayos sobre los fundamentos de la geometría) (1897), en el que considera que la geometría proyectiva constituye una forma *a priori* de toda geometría del espacio físico. Después, en 1903, publicó sus *Principles of mathematics* (Principios de matemáticas) donde esboza sus ideas de derivar las matemáticas de la lógica; las ideas de Russell serán desarrolladas en detalle a continuación en los *Principia mathematica* (3 vols., 1910-1913) con la colaboración de Whitehead. En 1914, publicó *Nuestro conocimiento del mundo exterior y los métodos científicos,* que será seguida, en 1918, de *Misticismo y lógica* y de la *Introducción a la filosofía matemática,* en 1919.

Alfred North Whitehead (1861-1947), filósofo y matemático inglés, fue profesor en Londres desde 1911 hasta 1924 y después en la Universidad de Harvard hasta 1937. Sus principales obras matemáticas son *Tratado de álgebra universal,* publicado en 1898, e *Introducción a las matemáticas* (1911).

En sus *Principios de matemáticas,* Russell define la verdadera naturaleza de las matemáticas como sigue:

Las matemáticas puras son la clase de todas las proposiciones de la forma «p implica q», donde p y q son proposiciones que contienen una o varias variables, las mismas en cada proposición, y ni p ni q contienen constantes, salvo constantes lógicas.

Russell intentó justificar esta definición examinando de una manera muy detallada las principales ramas de las matemáticas y analizando en ellas los conceptos matemáticos bajo el ángulo de los conceptos de la lógica. Al no utilizar el simbolismo lógico, Russell debía presentar sus importantes argumentos de una manera retórica, y a veces no llegaba más que a esbozarlos. Por ello intentó desarrollar un lenguaje simbólico elaborado, basado en el de Peano, para presentar los *Principia.* Russell sostenía que los únicos conceptos primitivos necesarios pertenecían ya a la lógica y, por consiguiente, se podían definir todos los conceptos matemáticos y demostrar todos los teoremas en el interior de un sistema lógico. Así, las matemáticas puras no requieren ni nociones primitivas ni proposiciones primitivas diferentes de las de la lógica. Ese es precisamente el fin perseguido en los *Principia* al presentar un sistema completo de las matemáticas puras fundamentado en la lógica solamente. Las matemáticas se convertían así en una extensión natural de la lógica, sin contenido, siendo solamente formas a las cuales no se les puede asociar ninguna significación de naturaleza física o geométrica.

Los Principia mathematica

En su mayor parte los *Principia* fueron escritos entre 1906 y 1909, y completados en 1910, sobre todo con aportaciones de Whitehead. El volumen I ofrece desde el principio un tratamiento muy detallado de la lógica simbólica, fundamentado en un pequeño número de axiomas. Después los autores presentan su cálculo lógico, que comprende un cálculo de proposiciones y un cálculo de las funciones de enunciado, desarrollado a continuación en una teoría formal de las clases y las relaciones. Se encuentra también una discusión de unos temas que se hacen cada vez más específicos, lo que conduce eventualmente a una teoría puramente lógica de los números cardinales y ordinales. Todo esto ocupa el volumen I y una gran parte del

volumen II. Vienen a continuación varios capítulos consagrados a las clases simplemente ordenadas, en los cuales puede encontrarse un tratamiento general del contenido lógico del análisis matemático. Finalmente, el volumen III termina con una discusión de las diversas aplicaciones de los números que se podrían denominar «medidas». Parece que esta última parte debía preparar el camino para un cuarto volumen que habría estado consagrado a la geometría, pero ese volumen no fue escrito nunca. El simbolismo lógico contenido en los *Principia mathematica* de 1910 fue modificado más tarde, entre otros por Whitehead y Russell, y estas modificaciones serán, por lo demás, manifiestas en la segunda edición, publicada en 1925. En lo que sigue, nos referiremos esencialmente a la primera edición, salvo indicación en contrario.

Las letras minúsculas latinas se utilizan para designar las proposiciones y las variables proporcionales, y las formas moleculares no p, p o q, p y q, si p entonces q, p si y solamente q son simbolizadas respectivamente por $\sim p$, $p \vee q$, $p.q$, $p \supset q$, $p \equiv q$. Las funciones de enunciado de una o varias variables se denotan mediante los símbolos $\phi(x)$, $\phi(x, y)$, etc., los cuantificadores por $(x)\phi x$, para «todo x», y $(\exists x)\phi x$ para «existe un x». Se encuentra también un signo específico para la aserción o el juicio, es el signo «$\vdash$» que, colocado delante de una proposición, sirve para realizar un juicio sobre la proposición. Por ejemplo, «$\vdash(p \supset p)$» debe tomarse como una aserción completa que dice que el autor es culpable de error a menos que la proposición $p \supset p$ sea verdadera (como lo es). Una expresión como «$p \supset p$» sin el signo de aserción debe de ser comprendida como tomada en consideración solamente, es decir que no se emite ningún juicio sobre esa proposición. Los puntos «.» sirven para dos fines: bien para reemplazar a los paréntesis o bien para indicar el producto lógico o la conjunción de dos o más proposiciones. Por ejemplo

$$p \vee q . \supset . q \vee p$$

significa la proposición «p o q» implica «q o p», mientras que con la expresión siguiente

$$\vdash : p \vee q . \supset . q \vee p$$

afirmamos la misma proposición, en lugar de tomarla simplemente

en consideración; los «:» significan que lo que es afirmado es todo lo que sigue al signo $\vdash$.

Russell y Whitehead introdujeron también definiciones, y su definición «es una declaración de que un cierto símbolo o combinación de símbolos introducidos significa lo mismo que otra cierta combinación de símbolos cuyo significado es conocido». Por ejemplo, la expresión

$$p \supset q . = . \sim p \vee q \; D_f$$

es una definición, porque la significación de $p \supset q$ es conocida, mientras que la de $\sim p \vee q$ no lo es.

Entre las proposiciones primitivas (postulados) del cálculo de proposiciones de Russell y Whitehead, se pueden mencionar: (1) toda cosa implicada por una premisa verdadera es verdadera (es la regla que justifica la inferencia); (2) $\vdash : p \vee p . \supset . p$ (si p o p es verdadera, entonces p es verdadera); (6) $\vdash : . p \supset r . \supset : p \vee q . \supset . p \vee r$ (si p implica r, entonces «p o q» implica «p o r»).

Partiendo de estos postulados, los autores proceden a la deducción de teoremas de la lógica y después, eventualmente, de la aritmética y del análisis. Señalemos que las reglas silogísticas usuales de Aristóteles aparecen en forma de teoremas. He aquí algunos ejemplos de teoremas:

$$\vdash : . p \supset \sim p . \supset \sim p$$

(principio de reducción al absurdo)

$$\vdash : . \sim (p . \sim p)$$

(ley de contradicción)

$$\vdash : . p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p$$

(si p implica q, entonces no q implica no p).

El cálculo de proposiciones es evidentemente una etapa hacia el cálculo de funciones de enunciado que trata de los conjuntos mediante propiedades más que nombrando los elementos del conjunto. Por ejemplo, ϕx es una función de enunciado (que no es una proposición) que designa el conjunto de todos los hombres si «x es un hombre». Las variables que aparecen ligadas en las aserciones que se encuentran en los *Principia* no denotan necesariamente

objetos individuales, porque las letras pueden representar también funciones de enunciado, clases, relaciones, etc.

Russell desarrolló la «teoría de los tipos» para oponerse a la forma de razonamiento circular que engendraba las paradojas de la teoría de conjuntos. Según Russell, hacía falta evidentemente, desconfiar de esas funciones no predicativas y elaborar reglas de lógica que permitieran distinguir bien las funciones predicativas de las funciones no predicativas. En un primer momento, los autores de los *Principia* establecen una estratificación de las expresiones formales que comprende los objetos individuales, las funciones de primer orden (cuyos argumentos son funciones de primer orden), etc. Pero Russell y Whitehead se dieron cuenta de que esta clasificación de las funciones no permitía distinguir entre las expresiones $\phi(\phi x)$ y ϕx funciones de tipo diferente. Por ejemplo, el símbolo $\phi(\phi(x))$ no debe expresar una proposición, como $\phi(a)$ lo expresa si $\phi(a)$ es un valor de $\phi(x)$. De hecho, según los autores, $\phi(\phi(x))$ debe ser un símbolo que no expresa nada: podemos decir, además, que no es significativo. Así, dada una función cualquiera $\phi(x)$, hay argumentos para los cuales la función no tiene valor, y también argumentos que hacen a la función significativa (valores). Entonces elaboraron una nueva clasificación de las funciones, fundamentada esta vez en el concepto de función de enunciado en la que no intervienen los cuantificadores. Las funciones predicativas se simbolizan por un punto de exclamación situado inmediatamente después del símbolo de la función. La nueva clasificación sigue el mismo orden, los objetos individuales, las funciones de primer orden (las funciones de enunciado $\phi!x$, $\phi!(x, y)$, etc.), las funciones de segundo orden, por ejemplo, $\sim \phi!a$, donde $\phi!x$ es una función variable de primer orden y a es un objeto individual, etc.

En su teoría de los tipos, la palabra «tipo» significa el campo de significación de las funciones de enunciado, es decir la totalidad de los argumentos que hacen a la función significativa. Por ejemplo, una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n argumentos que pueden ser variables individuales o funciones variables, define un «tipo» que es la totalidad de n-úplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para las cuales $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es significativa. Esta teoría conduce a una jerarquía de tipos que Poincaré describe de la manera siguiente: «Sea una proposición verdadera de un individuo cualquiera de una clase dada. Por un individuo cualquiera debemos entender en primer lugar todos los

individuos de esta clase que se pueden definir sin servirse de la noción misma de proposición. Los llamaré individuos cualesquiera de primer orden. Un individuo cualquiera de segundo orden será entonces un individuo en cuya definición podrá intervenir la noción de esta proposición de primer orden. Si afirmo la proposición de todos los individuos de segundo orden, tendré una proposición de segundo orden. Los individuos de tercer orden serán aquellos en cuya definición puede intervenir la noción de esta proposición de segundo orden, y así sucesivamente.» Por ejemplo, supongamos que el tipo de orden cero son los individuos «hombres», la función de enunciado «x es prudente» es de tipo 1, porque puede ser afirmada significativamente, aunque no sea necesariamente cierta; la función de enunciado «ser una virtud cardinal» es de tipo 2 porque puede ser afirmada de manera significativa de la prudencia y, en general, todo atributo es de un tipo más elevado que las entidades de las cuales puede ser afirmado o negado significativamente.

Si se intenta edificar las matemáticas siguiendo escrupulosamente esta jerarquía de los tipos, el desarrollo resulta muy complicado. Por ejemplo, en los *Principia*, dos objetos a y b son iguales si para cada propiedad $f(x)$, $f(x)$ y $f(x)$ son proposiciones equivalentes. Pero según la teoría de los tipos, f puede ser de tipo diferente, porque puede contener variables de primero, segundo, tercer... orden así como las variables simples a y b. Además, la definición de la igualdad debe de ser aplicada a todos los tipos de f. En suma, existen una infinidad de relaciones de igualdad, una para cada tipo de propiedad. De la misma manera, el continuo de los números reales está constituido por números de diferentes tipos. Russell y Whitehead introdujeron un nuevo axioma, el axioma de reductibilidad, que supone que cada función es equivalente para todos sus valores a funciones predicativas de los mismos argumentos, con el fin de poder incorporar a su teoría la teoría de los números reales de Dedekind, en particular. Este axioma afirma, por ejemplo, que a cada función de enunciado ϕx de una sola variable le corresponde una función predicativa formalmente equivalente $f!x$, es decir una función predicativa $f!x$ tal que ϕx y $f!$ son equivalentes para todo x.

Los *Principia* contienen también una teoría de las clases en la que las clases no son admitidas *a priori* como entidades actuales. En efecto, Russell y Whitehead sostienen que las designaciones de clases son símbolos incompletos, es decir símbolos que no pueden ser

definidos solos pero pueden serlo en grupo. Además, una proposición con respecto a una clase debe reducirse siempre a un enunciado a propósito de una función, la cual define la clase, es decir sobre la función que es satisfecha por los miembros de la clase y no lo es por ningún otro argumento. Así, una clase es un objeto derivado de una función que presupone la existencia de la función. Esto es, una clase es un conjunto de objetos que satisfacen funciones de enunciado. Una clase existe si posee al menos un elemento, y la clase vacía y la universal se introducen mediante las definiciones respectivas siguientes:

$$\Lambda = x(x = x)D_f$$

y

$$\mathrm{V} = x(x = x)D_f.$$

La reunión y la intersección de dos clases se definen en términos de la disyunción y la conjunción de las funciones de enunciado que las originan. En resumen, la teoría de las clases se desarrolla de una forma análoga a la presentación moderna. Las relaciones se expresan entonces como clases de parejas que satisfacen funciones de enunciado de dos variables, y después los autores desarrollan una teoría de las relaciones que les permitirá introducir la noción de número cardinal.

En su teoría de las clases, Russell y Whitehead habían introducido la relación de correspondencia biunívoca entre las clases, de forma que se pudiera decir que dos clases son semejantes si están en correspondencia biunívoca. La relación de semejanza posee las propiedades habituales y todas las clases poseen una propiedad común: el número cardinal. Así definen el número de una clase como la clase de todas las clases que son semejantes (equivalentes) a la clase dada. Con esta definición, Russell y Whitehead están en condiciones de desarrollar los números reales, y teóricamente podían reconstruir todo el análisis e incluso la geometría.

El enfoque logístico de las matemáticas fue evidentemente criticado por los miembros de las otras escuelas, y en particular por Poincaré y Weyl, a causa de la presencia de numerosos detalles ambiguos en los *Principia* y la arbitrariedad del axioma de reductibilidad, y también porque ese monumental tratado quedó, de hecho,

inacabado. A pesar de las críticas formuladas al logicismo, es preciso admitir que esa filosofía ha sido aceptada por muchos matemáticos. Además, una contribución muy importante de los *Principia* consiste precisamente en su presentación exhaustiva de una axiomatización de la lógica bajo una forma simbólica, y en eso el tratado de Russell y Whitehead hizo progresar enormemente la lógica matemática. Finalmente, los *Principia* constituyeron una tentativa clásica elaborada con el fin de demostrar la validez de la creencia compartida por algunos matemáticos, consistente en percibir la lógica de las matemáticas como suficientemente bien asimilada como para que pueda formalizar todas las demostraciones matemáticas.

LA ESCUELA INTUICIONISTA

La concepción de las matemáticas preconizada por el grupo de matemáticos que se ha dado en llamar los «intuicionistas» es radicalmente opuesta a la mantenida por los de la escuela logística. Las creencias fundamentales que constituyen la piedra angular de la filosofía matemática intuicionista residen en la afirmación de que las teorías matemáticas no son significativas a menos que se refieran a entidades construidas a partir de alguna cosa dada por la intuición inmediata,y que las definiciones en matemáticas deben ser siempre constructivas. Entre los primeros representantes que expresaron opiniones de naturaleza intuicionista podemos mencionar a Kronecker, Poincaré, Borel, pero fue con Brouwer y Weyl con los que se desarrolló verdaderamente una doctrina filosófica de este tipo. Al igual que la escuela logística, esta concepción intuicionista nació a finales del siglo XIX como reacción a la axiomatización y a la existencia de paradojas en la teoría de conjuntos, pero también por una inspiración interna fundamentada en una concepción propia de la naturaleza de las verdades matemáticas.

En la *Crítica de la razón pura,* de Immanuel Kant (1724-1804), el célebre filósofo alemán encuentra la fuente de las matemáticas más en la intuición que en el tratamiento intelectual de los conceptos abstractos. De la misma manera, el papel de la intuición será la fuente de donde brotará una especie de idea visual a partir de la cual extraerán los intuicionistas los entes matemáticos. Distinguiremos

las primeras manifestaciones del espíritu intuicionista en los trabajos de Kronecker.

Kronecker se interesó por la geometría algebraica y la teoría de ecuaciones, y escribió una teoría de cuerpos, de números algebraicos, más general que la de Dedekind, y en una forma que satisfacía el espíritu de una matemática constructiva. Sus disputas con Cantor se hicieron célebres, y hasta su muerte, en 1891, Kronecker se opuso ferozmente a la teoría de conjuntos de Cantor porque no aceptaba que éste pudiera creer que con tal de que se respetara la lógica las proposiciones sobre el infinito eran significativas. Además, se opuso violentamente a la introducción de entidades en matemáticas que no pudieran producirse, ni siquiera en principio, mediante un método constructivo o con criterios que previeran un número finito de etapas. En esto se sumaba a la afirmación de Poincaré en el sentido «de introducir objetos matemáticos (entidades) solamente si pueden definirse completamente mediante un número finito de palabras». Añadía, en esta conferencia pronunciada en el Congreso Internacional de Roma (1908), que «la teoría de conjuntos podía ser considerada como un *caso patológico* interesante». Kronecker aceptaba que se pudieran construir proposiciones o frases de conformidad con las reglas gramaticales y que las deducciones pudieran ser obtenidas según las reglas de la lógica, pero insistía mucho más en el hecho de que las entidades a las que se hacía referencia debían ser producidas realmente, porque si no todas las conclusiones resultarían faltas de sentido.

Kronecker se oponía incluso a la existencia misma de los números reales, porque pensaba que todo teorema de análisis debía ser interpretado como expresando relaciones entre los enteros solamente. A propósito de las definiciones y demostraciones, era de la opinión de que las definiciones debían contener los medios de calcular el objeto definido en un número finito de etapas, mientras que las demostraciones de existencia deberían permitir el cálculo de una estimación tan precisa como hiciera falta de la cantidad cuya existencia se demostraba. Kronecker y los intuicionistas consideraban por supuesto los números naturales como las entidades más simples y más fundamentales de las matemáticas. Después de una conferencia-cena, Kronecker habría afirmado incluso el epigrama bien conocido: «Dios ha creado los números naturales; el resto es trabajo del hombre». Además, como dijo a Lindemann después de

que este último hubiera demostrado la trascendencia de π: «¿Qué uso puede hacerse de su magnífica investigación sobre π? ¿Por qué estudiar tales problemas cuando los números irracionales no existen?».

Conocemos bastante bien los puntos de vista de Poincaré sobre el tema por haberlos expuesto anteriormente, pero es interesante subrayar aquí un estudio de este gran matemático sobre *La intuición y la lógica en matemáticas* (en *El valor de la ciencia*), en el cual expone la existencia de varias clases de intuición del número puro, compara el papel de la lógica con el de la intuición —la primera es el instrumento de la demostración, la segunda es el instrumento de la invención—, y muestra que no se pueden hacer conquistas científicas mediante la generalización. Añadamos también que Poincaré caracteriza a algunos matemáticos de su época, y se sirve de la intuición como base de clasificación. Hadamard retomará este estudio, expresando sus divergencias, en su *Ensayo* sobre la invención. Emile Borel, a quien se deben brillantes investigaciones sobre el cálculo de probabilidades, la teoría de la medida (medida de Borel), la teoría de las funciones y de las series divergentes y la teoría de los conjuntos de puntos, apoyó a Poincaré en sus afirmaciones de que los enteros no podían ser fundamentados axiomáticamente. Criticó también, como Poincaré, el axioma de elección, porque recurre a un número no numerable de elecciones, lo cual es inconcebible para la intuición. Se opuso también a los métodos no constructivos de la teoría de conjuntos y de la teoría de funciones de variables reales, y se negó a admitir la existencia de los números transfinitos más allá del cardinal de los números naturales.

Las opiniones emitidas por estos matemáticos fueron esporádicas y fragmentarias, y fue Brouwer quien fundó sistemáticamente el intuicionismo moderno.

Luitzen Brouwer Egbertus Jan Brouwer (1881-1966), matemático holandés, fue profesor en la Universidad de Amsterdam y el miembro más destacado de la Escuela de Amsterdam. Sus investigaciones en matemáticas se centraron principalmente en las ramas siguientes: el análisis tensorial y la geometría diferencial, en donde introdujo la noción de transporte paralelo de un vector para superficies de curvatura constante (1906); la topología de los conjuntos de puntos y, sobre todo, la topología combinatoria, en la que introdujo las

importantes innovaciones de las nociones de símplex y cómplex y estableció en 1911 un teorema fundamental sobre los puntos fijos. Como en el caso de Kronecker, la mayor parte de sus investigaciones en matemáticas, y en particular en topología, no reflejan sus concepciones filosóficas de las matemáticas, pero de ello no se debe concluir que su filosofía no sea seria.

Su tesis de 1904 marca el comienzo de la elaboración de su filosofía intuicionista, porque una parte trata precisamente de los fundamentos de las matemáticas en el estilo del intuicionismo. Después, en 1907, elaboró las bases de su filosofía en su tratado titulado *Sobre los fundamentos de las matemáticas* y a partir de esa fecha y hasta 1926 dedicará a su filosofía varias memorias publicadas en diferentes revistas.

Como Kant y Poincaré, Brouwer sostenía que los teoremas matemáticos son verdades sintéticas *a priori*. En su discurso inaugural de 1912 en la Universidad de Amsterdam, Brouwer mantuvo que la aritmética e incluso todas las matemáticas debían provenir de la intuición del tiempo, incluida la geometría, pues la intuición fundamental era la aparición de las percepciones en una sucesión temporal. De esta intuición de la «bi-unicidad» desnuda obtenemos, según dice, en primer lugar la noción de una sucesión de números ordinales, y después la noción de continuo lineal, es decir de este «entre-dos» que no se puede agotar por la interposición de nuevas unidades y que, además, no puede nunca concebirse como una simple colección de unidades. Sólo existe el conjunto numerable, y por consiguiente no hay cardinales salvo $\aleph_0$, el cardinal del conjunto cuyos miembros pueden ponerse en correspondencia biunívoca con la sucesión de los números naturales. En particular, no se puede dar un significado a una frase como «el conjunto de todos los números reales entre 0 y 1». Incluso para Brouwer, el conjunto de los números naturales es infinito potencial que puede crecer sin fin.

Cuando Brouwer habla de la intuición, se refiere solamente a una especie de aprehensión clara de la inteligencia de aquello que ella misma ha construido. Así, concebía el pensamiento matemático como un proceso de construcción que edifica su propio universo, independiente de los otros, como una especie de representación libre, sujeta solamente a lo que reposa sobre la intuición matemática fundamental. Sostenía también que «en este proceso constructivo, ligado por la obligación de considerar cuidadosamente, entre las

ideas no definidas, aquellas que son aceptables por la intuición y aquellas que no lo son, se basa el único fundamento posible de las matemáticas». Por consiguiente, es la intuición y no la experiencia o la lógica la que determina la legitimidad y la aceptabilidad de las ideas. De la misma manera, los objetos matemáticos se adquieren mediante una construcción intelectual, y la sucesión de los números naturales constituye el prototipo de tal construcción.

Según Brouwer, el lenguaje y la lógica no son presuposiciones para las matemáticas, y un enunciado que afirma que un objeto existente posee una propiedad dada significa que existe un método conocido que permite encontrar o construir ese objeto en un número finito de etapas. Brouwer no aceptaba la demostración indirecta utilizada frecuentemente en aritmética transfinita, pues no es un método constructivo. En la práctica, la demostración constructiva exige necesariamente que ningún enunciado o proposición existencial sea admitida en matemáticas a menos que se pueda demostrar presentando un ejemplo. En caso contrario, según Brouwer, han de aceptarse responsabilidades si se llega a paradojas. Por ejemplo, la demostración de Euclides de la existencia de un número infinito de números primos no es constructiva, porque no permite la determinación del *n*-ésimo número primo, y por tanto es inaceptable. Por otra parte, la definición de número primo es constructiva, porque puede aplicarse para determinar en un número finito de etapas si un número dado es primo o no.

Brouwer rechazó la lógica tradicional porque la creencia común en la aplicabilidad de esta lógica a las matemáticas «fue ocasionada históricamente por el hecho de que, en primer lugar, la lógica clásica fue abstraída a partir de las matemáticas de los subconjuntos de un conjunto finito determinado; en segundo lugar, que una existencia independiente *a priori* de las matemáticas fue atribuida a esta lógica y, finalmente, que sobre la base de estos errores *a priori,* fue injustificablemente aplicada a las matemáticas de los conjuntos infinitos». Llegó, pues, a cuestionarse toda la matemática existente y a reconstruirla, desde el principio, utilizando solamente conceptos y modos de inferencia que pudieran considerarse como con una justificación intuitivamente clara. Cuando el programa de Brouwer estuvo suficientemente desarrollado, pudo comparar su propio sistema de lógica como la lógica tradicional y estuvo en condiciones de discernir las leyes lógicas que obedecen realmente a la inferencia

matemática lógica. Brouwer y su escuela analizaron los principios lógicos y retuvieron aquellos que son admisibles con el fin de que la lógica habitual sea conforme a estos últimos y exprese adecuadamente las intuiciones exactas. Por ejemplo, Brouwer analizó la ley del tercero excluido y mostró que era aplicada demasiado libremente, lo que había tenido como consecuencia el excluir numerosas demostraciones de existencia y el aportar proposiciones no «decidibles». En particular, ¿es verdadero o falso que «la sucesión de las cifras 123456789 aparece en alguna parte en la representación decimal del número π?». Como no existe método conocido para decidirlo, no se puede, según Brouwer, aplicar la ley del tercero excluido y por tanto esta proposición puede ser verdadera o falsa. Por el contrario, en el caso de un libro que contiene errores tipográficos sí se puede utilizar esta ley, porque la conclusión se obtendrá en un número finito de etapas escrutando minuciosamente todas las páginas, una detrás de otra.

Hermann Weyl (1885-1955), matemático alemán, fue profesor en la Escuela Politécnica Federal de Zurich (1913) al mismo tiempo que Albert Einstein (1879-1955) y en 1918 apoyó la teoría de la relatividad en una obra ampliamente difundida (Espacio-tiempo-materia). Más adelante, llegó a ser profesor en la Universidad de Gotinga, en 1930, pero en 1933 dimitió de su puesto como protesta contra la discriminación nazi contra sus colegas y se fue a los Estados Unidos, en donde aceptó un puesto en Princeton. Se interesó particularmente por la teoría de números, por las ecuaciones integrales singulares, por la axiomatización de los espacios de Hilbert, por la geometría diferencial, en donde introdujo la geometría de los espacios de conexión afín, por las álgebras de Lie y por la aplicación de la teoría de grupos a la mecánica cuántica.

En su obra titulada *Das Kontinuum* (1918) (El continuo), Weyl considera que el análisis clásico en sus concepciones esenciales y sus procedimientos engloba círculos viciosos hasta tal punto que «cada célula de ese gran organismo está impregnada del veneno de la contradicción». Convencido de que podía librar al análisis del razonamiento circular, propuso que todas las ramas de las matemáticas estuvieran fundamentadas en una o varias totalidades de entes dados, y que fueran significativas para estos entes algunas propiedades y relaciones dadas (predicados). Los entes y predicados origina-

les no se deben postular arbitrariamente sino que, por el contrario, deben darse en un sentido intuitivo. Después formula un cierto número de operaciones que sirven para elaborar y construir otros predicados y acepta utilizar seis operaciones lógicas, que serán aplicadas a los números naturales, así como un proceso de iteración. En 1921, se dio cuenta de que Brouwer había llegado a una concepción intuicionista del continuo real superior a la suya, lo que llevó a Weyl a aceptar las conclusiones de Brouwer y a abandonar su proyecto de reescribir todo el análisis.

En relación con la noción intuicionista de los conjuntos infinitos, Weyl pretendía que la sucesión de los números que crecen más allá de toda etapa ya alcanzada es una multiplicidad de posibilidades abiertas al infinito. Brouwer, dice, nos ha abierto los ojos y nos ha hecho ver hasta qué punto las matemáticas clásicas, alimentadas por una creencia en el absoluto que trasciende todas las posibilidades humanas de realización, van más allá de los enunciados y pueden reivindicar la significación real y la verdad, fundamentadas en la evidencia. En su *Philosophy of mathematics and natural science* (Filosofía de las matemáticas y ciencias naturales) (1949), dice, a propósito de las demostraciones de existencia no constructivas, que informan al mundo de que existe un tesoro sin dejar ver su emplazamiento. Añade también que el análisis ha edificado una casa cuya parte esencial reposa sobre la arena. Los dos aspectos del intuicionismo, positivo y negativo, son bien resumidos por Weyl en el pasaje siguiente:

> Las matemáticas con Brouwer han adquirido su claridad intuitiva más elevada. Desarrollando los comienzos del análisis de una forma completamente natural, han conseguido preservar en todo momento el contacto con la intuición como no se había hecho nunca antes. Sin embargo, no se puede negar que al avanzar hacia teorías más avanzadas y más generales, la inaplicabilidad de las simples leyes de la lógica clásica llega a ser, eventualmente, de una intolerable incomodidad. Y los matemáticos constatan con pena cómo la gran parte del muy elevado edificio que creían construido con bloques de hormigón se disuelve como la bruma ante sus ojos.

Señalemos que Brouwer y su escuela no se limitaron a las críticas solamente, sino que intentaron elaborar una nueva matemática según su propia concepción. En particular, consiguieron salvaguar-

dar el cálculo diferencial e integral con sus procedimientos de límites, pero su construcción es muy complicada. Además, llegaron a construir porciones elementales del álgebra y de la geometría, así como a elaborar una formalización de la lógica intuicionista (A. Heyting, 1930).

LA ESCUELA FORMALISTA

Mientras que Russell sostenía persistentemente que todo el conjunto de las matemáticas puras es reducible a la lógica, Hilbert creía firmemente que las matemáticas debían constituir una actividad autónoma del matemático. Es así como el *formalismo,* es su espíritu, es bastante más matemático que filósofo, y refleja muy claramente la tendencia hacia la abstracción total que se convertiría en el rasgo dominante de las matemáticas en la época en que el punto de vista formalista estaba precisándose. La tendencia general de las matemáticas a finales del siglo XIX se orientaba cada vez más hacia una utilización ampliada del método axiomático, y el fundador de la escuela formalista caracterizaba justamente el pensamiento matemático en términos axiomáticos. El programa formalista desarrollado por Hilbert comienza en su método axiomático y se servirá de sus principios para caracterizar modelos estructurados a partir de los cuales el problema central será determinar su consistencia.

HILBERT

David Hilbert (1862-1943), matemático alemán, fue profesor en Königsberg primero, su ciudad natal, y después en Gotinga desde 1895 hasta 1929. Fue el jefe indiscutible de la escuela matemática alemana del primer tercio del siglo XX, y si uno compara la naturaleza y la inspiración de sus trabajos matemáticos con los de Poincaré, se inclinaría a considerar a Hilbert como un matemático que se siente más a sus anchas en el siglo XX. Sus investigaciones matemáticas tocaron varios temas, y en algunos casos sus trabajos se han revelado como definitivos.

Después de escribir su tesis de doctorado en 1855 sobre los invariantes, hizo progresar la teoría de los invariantes algebraicos en

1888 con una demostración relativamente simple del teorema de Jordan (todo sistema de formas binarias posee un sistema finito completo de invariantes y covariantes). Pero el mismo año asombró a la comunidad matemática proponiendo un enfoque completamente nuevo del problema, mostrando que toda forma de grado dado, con un número de variables dado, y que todo sistema de formas dado, con un número cualquiera de variables dado, posee un sistema completo de invariantes y covariantes enteros integrales independientes. La metodología de Hilbert adelantó la teoría abstracta de los módulos, de los anillos y de los cuerpos.

En 1899, Hilbert reconstruyó el método del cálculo de variaciones de Thompson y Dirichlet, y erigió el principio de Dirichlet como método para demostrar la existencia de una solución de ese célebre problema, y gracias a sus esfuerzos ese principio se ha convertido en un instrumento potente en la teoría de funciones. En 1905, Hilbert dio una solución completa, con la ayuda de la teoría de las ecuaciones integrales, al célebre problema de Riemann a propósito de las singularidades en las ecuaciones diferenciales. Mientras tanto, sus investigaciones sobre la teoría de los números algebraicos, emprendidas en 1892, llevaron a su famoso informe de 1897. Desde 1904 a 1910, publicó una serie de seis memorias importantes sobre las ecuaciones integrales.

Sus *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de geometría), publicados en 1899, constituyeron una síntesis notable de sus investigaciones sobre los fundamentos de la geometría, y abrieron el camino a los numerosos trabajos orientados hacia la axiomatización de los diferentes sectores de las matemáticas. Antes de abordar el formalismo de Hilbert, querríamos presentar brevemente su famosa conferencia pronunciada en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, en la que intentó, basándose en las principales tendencias de las investigaciones matemáticas de fines del siglo XIX, predecir de alguna manera la o las direcciones futuras de los progresos matemáticos. Para ello, propuso veintitrés problemas que, a sus ojos, representaban los puntos de discusión que podrían eventualmente hacer progresar las matemáticas.

Según Hilbert, la historia enseña la continuidad del desarrollo de las matemáticas, y sabemos que cada época tiene sus propios problemas, que la época siguiente resuelve o deja de lado por no aprovechables, para sustituirlos por otros nuevos. Si queremos tener

una idea del desarrollo probable del conocimiento matemático en un futuro inmediato, debemos pasar revista a las cuestiones no resueltas y buscar los problemas que la ciencia actual ha planteado, y cuya solución se espera en el futuro. Según Hilbert, las condiciones para resolver un problema consisten esencialmente en establecer la veracidad de la solución mediante un número finito de etapas fundamentales en un número finito de hipótesis que están implícitas en el enunciado del problema y que se deben formular siempre de manera precisa. Además, es falso pensar, siempre según Hilbert, que el rigor de la demostración es enemigo de la simplicidad; muy al contrario, dice, numerosos ejemplos vienen a confirmar que el método riguroso es, al mismo tiempo, el más sencillo y fácil de comprender.

Los problemas sugeridos por Hilbert provienen de los diferentes sectores de las matemáticas, y se adivina fácilmente la profundidad y complejidad de su contenido. No tenemos la intención de ocuparnos de todos, pero algunos ofrecen cierto interés en el marco de nuestra obra, precisamente porque su formulación es sencilla.

El primer problema se refiere a la estructura del continuo de los números reales: a) ¿existe un cardinal entre $\aleph_0$ (conjunto numerable) y «*c*», el cardinal de los números reales? b) el continuo numérico, ¿puede ser considerado como un conjunto bien ordenado? Los trabajos de Kurt Gödel en 1943 y Paul Cohen en 1963 parecen impedir que se pueda llegar a una solución bien definida de este problema. El segundo problema tiene que ver con la cuestión de saber si se puede demostrar que los axiomas de la aritmética son consistentes, es decir que un número finito de etapas lógicas fundamentadas en esos axiomas no puede conducir nunca a resultados contradictorios. La respuesta de Gödel en 1931 parece pronunciarse negativamente en este segundo problema, porque demostró que en el interior de un sistema existe siempre una proposición al menos que no puede ser demostrada basándose únicamente en los axiomas del sistema.

Otro problema, el séptimo, se refiere a nociones familiares. En efecto, se trata de saber si α^β, donde α es algebraico y diferente de cero y de uno, y β es irracional y algebraico, es trascendente. El problema fue resuelto en 1934 por Alexander Osipovich Gelfond (1906-?), y su solución se conoce en la actualidad con el nombre de «teorema de Gelfond». Por el contrario, otras cuestiones relativas a

este problema no han sido todavía resueltas, que sepamos: si α y β son trascendentes, ¿es α^β trascendente? De la misma manera, no se sabe todavía si e^π, π^π, π^e y la constante euleriana γ son trascendentes. Sin embargo, en virtud del teorema de Gelfond, se puede demostrar que e^π es trascendente, porque $e^\pi = 1/e^{-\pi} = 1/i^{2i}$ e i^{2i} es trascendente según el teorema de Gelfond. El estudio de los números trascendentes proporciona un método para encontrar la solución, en términos de números enteros, de algunas ecuaciones. (Véanse Waldschmidt y Vilu en la bibliografía.) Se puede también aprovechar la ocasión para señalar que la célebre conjetura de Francis Guthrie (1852) que se refiere al coloreado de los mapas geográficos con cuatro colores, ha sido resuelta, después de 124 años, gracias a un método que recurre a la utilización de un ordenador, debido a K. Appel y W. Haken, en 1976. (Véanse Appel y Haken en la bibliografía). Finalmente, cerca de la mitad de los problemas sugeridos por Hilbert han sido resueltos hasta el momento, pero otros, por el contrario, como la hipótesis del continuo, pueden permanecer todavía largo tiempo sin solución.

El formalismo de Hilbert

En su pequeño tratado de geometría de 1899 sobre los fundamentos de la geometría, Hilbert presentó por primera vez una axiomatización completa de la geometría, mientras que Peano se había contentado con dar, en 1889, sólo un sistema de axiomas. Hilbert aportará numerosas modificaciones posteriores a esta primera axiomatización, hasta su versión final, que será publicada en 1930. Parte de tres objetos indefinidos: punto, recta y plano, y otros conceptos tales como «está situado sobre» (relación entre un punto y una recta, relación entre punto y plano), «entre», congruencia de pares de puntos y congruencia de ángulos. El sistema comprende, a continuación, veinte axiomas, clasificados en cinco grupos: los axiomas de pertenencia, los axiomas de orden, los axiomas de congruencia, el axioma de las paralelas y los axiomas de continuidad. Hilbert mostró con sus axiomas que podía demostrar los teoremas fundamentales de Euclides. Otros matemáticos completaron esta tarea demostrando que toda la geometría euclídea podía derivarse de estos axiomas. Según la interpretación de Poincaré, Hilbert intentó

poner los axiomas de forma tal que pudieran ser aplicados por cualquiera, con tal que esa persona aplicara servilmente las reglas puramente mecánicas a los axiomas. Pero el problema importante en esa época se refería a la consistencia de los axiomas, y Poincaré afirmó en 1898 que podía creer en la consistencia de una estructura fundamentada axiomáticamente si era posible dar de ella una interpretación aritmética. Eso fue precisamente lo que hizo Hilbert, quien demostró también la consistencia de su sistema, pero *sobre la base* de la consistencia de la aritmética. Esta cuestión de la consistencia de la aritmética seguía siendo, no obstante, una cuestión sin respuesta en aquella época. Notemos que el lenguaje utilizado por Hilbert en sus *Grundlagen* es el lenguaje ordinario de la geometría euclídea sin formulación simbólica de tipo lógico.

Después de haber demostrado la consistencia de su sistema geométrico sirviéndose de un modelo de su sistema, construido en el interior de la aritmética, mostró a continuación la independencia de estos axiomas, es decir sacrificar uno de los cinco grupos conservando los otros cuatro y obtener cada vez una geometría coherente. Por ejemplo, suprimió el grupo III, el postulado de las paralelas, y obtuvo la geometría no euclídea de Lobachevski; el abandono del axioma de Arquímedes del grupo V (sean AB y CD dos segmentos cualesquiera; entonces existe en la recta AB un número de puntos A_1, A_2, ..., A_n tales que los segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ son congruentes a CD y tales que B está situado entre A y A_n), implica la existencia de una geometría no arquimediana. Llegó también a construir geometrías no arguesianas y no pascalianas.

Con la publicación de esta obra de geometría, Hilbert hizo avanzar de una forma sustancial todo lo que se había realizado antes que él a nivel de la justificación lógica de la geometría euclídea. A partir de 1904, comenzó verdaderamente sus investigaciones sobre los fundamentos de las matemáticas, intentando, por una parte, proporcionar una base para el sistema de los números sin recurrir a la teoría de conjuntos y, por otra parte, abordar el problema de la consistencia de la aritmética, porque este último tema podía cuestionar la consistencia de su sistema de geometría. En una conferencia en el Congreso Internacional de Heidelberg (1904) sobre los fundamentos de la lógica y de las matematicas, Hilbert sugirió un programa para eliminar las paradojas recientemente descubiertas, proponiendo realizar la axiomatización de la lógica, de la aritmética y de

la teoría de conjuntos. El no pensaba reducir la aritmética a la lógica. Quería, de hecho, desarrollar las dos conjuntamente con el fin de mostrar que todo el sistema no era inconsistente; por consiguiente, su fin último consistía en realizar la axiomatización de todas las ramas de las matemáticas.

En una memoria de 1922, Hilbert expuso claramente el papel fundamental del método axiomático como el intrumento actual y futuro que conviene a la inteligencia humana. Este instrumento es a la vez inasequible, fecundo e indispensable para toda investigación exacta, cualquiera que sea. Además, añade que deja al investigador la más completa libertad de movimientos. Proceder axiomáticamente en este sentido es sencillamente pensar en el conocimiento de lo que significa *uno*. Finalmente, la axiomática suprime las ingenuidades dogmáticas de antaño, pero nos deja, sin embargo, las ventajas de la creencia. En 1925, en una conferencia pronunciada con motivo de una reunión de la Sociedad Matemática de Westfalia para honrar la memoria de Weierstrass, Hilbert formuló claramente el conjunto de estas concepciones sobre los fundamentos de las matemáticas. Titulada *Sobre el infinito,* esta conferencia comprende dos partes: la primera se refiere a los fundamentos de las matemáticas, y la segunda esboza una tentativa de demostrar la hipótesis del continuo. (Véase Heijenoort en la bibliografía.)

Hilbert intentó mostrar que una clarificación definitiva de la naturaleza del infinito se había hecho necesaria, no tanto para los intereses específicos de las ciencias individuales como para el honor de la comprensión humana. Después de haber analizado la presencia del concepto del infinito en diversos temas de las matemáticas, aborda los trabajos de Cantor y manifiesta su admiración por la teoría de los números transfinitos en estos términos: «Esto me parece la flor más admirable de toda la inteligencia humana y, en general, una de las más grandes realizaciones de la actividad humana puramente racional.» Prosigue diciendo que el infinito en Cantor es un infinito actual, y que es éste último quien ha desarrollado su noción. Después, discute el nacimiento de las paradojas y encuentra que su presencia es intolerable. Propone por ello un cierto número de consideraciones que permiten evitar estas paradojas:

1) Debemos buscar minuciosamente maneras de formar nociones y modos de inferencia fecundos; debemos cultivarlos, apoyarlos y hacerlos utiliza-

bles, aunque se tengan pocas posibilidades de éxito. Nadie debería poder expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.

2) Es necesario hacer inferencias con la misma seguridad que cuando son utilizadas en la teoría de números elemental, la cual no se discute, y si aparecen contradicciones y paradojas, ello es debido a nuestra imprudencia.

Según Hilbert, el uso de las inferencias lógicas y la ejecución de las operaciones lógicas deben estar condicionados por la existencia previa de alguna cosa, que debe ser dada a nuestra facultad de representación, por ciertos objetos concretos fuera de la lógica que están intuitivamente presentes como nacimiento inmediato antes de todo pensamiento. Si se puede contar con la inferencia lógica, debe de ser posible examinar completamente estos objetos en todas sus partes, y el hecho de que se produzcan, que difieran unos de otros y que se sigan unos a otros o estén ligados con los objetos, está dado intuitivamente, como algo que no puede ni reducirse a otra cosa ni mermar. He aquí, según Hilbert, la posición filosófica de base que considera necesaria para las matemáticas y, en general, para todo pensamiento científico. En particular, en las matemáticas, esto es lo que considera que son los signos concretos, en sí mismos, cuya forma, según la concepción que ha adoptado, es inmediatamente clara y reconocible.

El papel específico del infinito en matemáticas, dice, es puramente el de una idea, idea de la razón en la filosofía de Kant, es decir un concepto de razón que trasciende toda experiencia y por el cual lo concreto es completado de manera que forme una totalidad. Está de acuerdo con Brouwer en la primacía de la intuición y en la demostración constructiva, pero no duda en afirmar su admiración por la teoría de los números transfinitos, en aceptar el infinito actual, en pretender que todo problema puede resolverse y en recurrir a proposiciones «ideales», inaccesibles mediante métodos «finitarios». La demostración matemática necesita proposiciones «ideales», es decir fórmulas que no expresan asertos «finitarios» y que no significan algo por sí mismas, y a las cuales, por tanto, no pueden aplicarse las operaciones lógicas. Es pues necesario formalizar las operaciones lógicas y también las demostraciones matemáticas por sí mismas. Es entonces cuando Hilbert introduce un simbolismo lógico para «y» y «o», «implica» y «no», que será asociado a

los signos matemáticos ya existentes. Provisto de estos símbolos, que son los materiales que constituyen las fórmulas, Hilbert puede ahora presentar lo que entiende por «formalizar una demostración matemática». Una prueba matemática es una combinación que debe darse como tal a nuestra intuición perceptual; consiste, según dice, en inferencias según el esquema

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ A \rightarrow B\end{array}}{B}$$

en el que cada premisa, las fórmulas A y $A \rightarrow B$, son un axioma o resultan de un axioma por sustitución, o coinciden con la última fórmula de una inferencia previa o resultan de esta inferencia por sustitución. Se dice que una fórmula es demostrable si es la última fórmula de la prueba. Por consiguiente, según el punto de vista formalista, la verdad y el rigor están bien definidos y son objetivos.

Hilbert conservó la ley del tercero excluido porque es necesaria en análisis. Dice, a este respecto, que impedir a un matemático servirse de ella es como impedir a un astrónomo utilizar su telescopio o a un boxeador servirse de sus puños.

Hilbert y sus discípulos Wilhelm Ackermann (1896-1962), Paul Bernays (1888-?) y Von Neumann desarrollaron gradualmente, entre 1920 y 1930, lo que se conoce con el nombre de «metamatemática». Es, esencialmente, un método para establecer la consistencia de cualquier sistema formal. Decir que un sistema es consistente es decir que la aplicación de las reglas de inferencia a los axiomas no puede nunca conducir a un par de consecuencias de las que una es la negación de la otra. Pero es posible, quizás, demostrar esto razonando no en el interior del sistema, sino sobre el sistema, es decir precisamente sobre las fórmulas mediante las cuales se expresa el sistema. Las fórmulas axiomáticas son finitas en número, y la derivación debe ser una sucesión finita de etapas, de modo que en el paso de una etapa a otra se respeten una sucesión o un número finito de reglas. De esta manera, la demostración de la consistencia puede alcanzarse sirviéndose de métodos de argumentos «finitarios», y éste es, en resumen, el enfoque preconizado en la metamatemática y en la metalengua. Consiguieron establecer la consistencia de siste-

mas formales sencillos y creyeron poder realizar su objetivo, es decir probar la consistencia de la aritmética y la teoría de conjuntos. Pero Kurt Gödel (1906-1978) publicó en 1931 una memoria excepcionalmente difícil y brillante titulada *Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (Sobre proposiciones «indecidibles» formalmente de los Principia Mathematica y de los sistemas relacionados).

Gödel mostró que el método axiomático posee ciertas limitaciones inherentes cuando se aplica a sistemas relativamente simples como la aritmética de los números transfinitos. El teorema de incompletitud de Gödel estipula que si toda teoría formal F adecuada para englobar la teoría de números es consistente y si los axiomas del sistema formal de la aritmética son axiomas o teoremas de F, entonces F es incompleta. En otras palabras, existe una proposición p de la teoría de números tal que ni p ni no p es un teorema de la teoría. Existe entonces una proposición verdadera de la teoría de números que no puede ser demostrada. En suma, la consistencia de la aritmética no puede ser establecida por todo razonamiento metamatemático que pueda estar representado en el interior del formalismo de la aritmética. Sin embargo, no está excluida por este teorema ninguna prueba metamatemática de la consistencia de la aritmética. En efecto, Gerhard Gentzen, discípulo de la escuela formalista, llegó a construir una prueba metamatemática, pero esta prueba recurre a un conjunto de reglas de inferencia cuya propia consistencia interna es tan dudosa como la consistencia formal de la aritmética.

Hilbert y Bernays publicaron en 1934 y en 1939 dos volúmenes titulados *Grundlagen der Mathematik* (Fundamentos de matemáticas) en los que exponen un balance de los resultados ya obtenidos y admiten que están lejos de una solución al problema fundamental de la consistencia de un sistema formal. Sin embargo, aunque los trabajos de los formalistas hayan sido también criticados por la escuela intuicionista, sobre todo por Brouwer y Weyl, han sugerido una técnica que parece apropiada en cuestiones particulares que se refieren a la completitud de sistemas de axiomas y a la posibilidad de imaginar procedimientos de decisión o reglas empíricas para la solución de problemas en diversos sectores de las matemáticas, problemas que exigen un tratamiento axiomático formal.

Ninguna de las soluciones propuestas con vistas a clarificar los

problemas fundamentales de las matemáticas por los seguidores del logicismo, del intuicionismo o del formalismo ha alcanzado el objetivo, que consistía en proporcionar un enfoque universalmente aceptable de las matemáticas. Sin embargo, las investigaciones ligadas a estas tres corrientes de pensamiento han hecho progresar las matemáticas en diversas direcciones, y si el enfrentamiento entre los seguidores de estas tres escuelas llegó a tener el aspecto de una crisis, ello no impidió el desarrollo fulgurante de las matemáticas durante el siglo XX. Por otra parte, la historia nos enseña que, en ciertas épocas, las matemáticas se han encontrado en un estado de crisis más o menos aguda, crisis de los inconmensurables en tiempo de los griegos, controversia particularmente acre entre los discípulos de Newton y los de Leibniz, la crisis que acabamos de evocar, la controversia actual entre los seguidores del análisis no conforme (no estándar) de Abraham Robinson y los de Erret Bishop con el «análisis constructivo», pero que su desarrollo discurre invariablemente de una manera continua con períodos de gran fecundidad entremezclados con períodos de consolidación o de revisión y reflexión.

BIBLIOGRAFÍA

Appel, Kenneth y Wolfgang Haken, «La solution du problème des quatre couleurs», *Pour la Science,* 2, diciembre de 1977, pp. 56-70. Véase también *Scientific American,* 237, octubre de 1977, pp. 108-21.

Bell, Eric, T., *Men of mathematics,* Nueva York, Simon and Schuster, 1965, pp. 466-83, 526-54.

Beth, Evert W., *Mathematical thought,* traducido del holandés, Nueva York, Gordon and Breach, 1965.

Birkhoff, Garret, comp., *A source book in classical analysis,* Cambridge Massachusetts, Harvard Univesity Press, 1973.

Birkhoff, Garret, comp., «Proceedings of the American Academy Workshop on the evolution of modern mathematics held at the American Academy of Arts and Sciences, Boston, Massachusetts, August 7-9, 1974.» *Historia Mathematica,* 2, 1975, pp. 425-624.

Black, Max, *The nature of mathematics,* Nueva York, Harcourt, Brace, 1933.

Bochenski, I. M., *A history of formal logic,* Notre Dame, Indiana, Univer-

sity of Notre Dame Press, 1961, [*Historia de la lógica formal,* Madrid, Gredos, 2.ª ed. 1976].

Bourbaki, Nicolas, «The architecture of mathematics», *The American Mathematical Monthly,* 57, 1950, pp. 221-32.

Bourbaki, Nicolas, *Eléments d'histoire des mathématiques,* París, Hermann, 1960, [*Elementos de historia de las matemáticas,* Madrid, Alianza, 2.ª ed. 1976].

Boyer, Carl B., *A history of mathematics,* Nueva York, Wiley, 1968, pp. 649-78.

Brunschvigg, Léon, *Les étapes de la philosophie des mathématiques,* París, Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1972.

Cavailles, Jean, *Philosophie mathématique,* París, Hermann, 1962.

Van Dalen, D. y A. F. Monna, *Sets and integration. An outline of the development,* Groninga, Países Bajos, Wolters-Noordhoff Publishing, 1972.

Daumais, Maurice, comp., *Histoire de la science,* París, N.R.F., 1957, pp. 688-709.

Dieudonné, Jean A., «The work of Nicolas Bourbaki», *The American Mathematical Monthly,* 76, 1970, pp. 134-45.

Dieudonné, Jean A., «Recent developments in mathematics», *The American Mathematical Monthly,* 71, 1964, pp. 239-48.

Fraenkel, Abraham y Y. Bar-Hillel, *Foundations of set theory,* Amsterdam, North-Holland, 1958.

Fraenkel, Abraham, «The recent controversies about the foundations of mathematics». *Scripta Mathematica,* 13, 1947, pp. 17-36.

Frege, Gottlob, *The basic laws of arithmetic,* traducido del alemán por M. Furth. Berkeley y Los Angeles. University of California Press, 1967.

Frege, Gottlob, *Les fondements de l'arithmétique,* traducción e introducción de C. Imbert. París, Seuil, 1970, [*Fundamentos de la aritmética,* Barcelona, Laia, 1972].

Gardner, Martin, *L'étonnante histoire des machines logiques,* París, Dunod, 1964.

Gödel, Kurt, *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems,* Nueva York, Basic Book, 1965, [*Sobre proposiciones formalmente «indecibles» de los Principia Mathematica,* Valencia, Univ. de Valencia, 1981].

Gödel Kurt, «What is Cantor's continuum problem?», *The American Mathematical Monthly,* 54, 1947, pp. 515-25.

Hadamard, Jacques, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine des mathématiques,* traducido del inglés por J. Hadamard, París, Librairie scientifique, A. Blanchard, 1959.

Heijenoort, Jean van, comp., *From Frege to Gödel.* Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1977.

Hilbert, David, «Mathematical Problems», traducido del alemán por M. W. Newson, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 8, 1902, pp. 437-79.
Johnson, Philipp E., *A history of set theory,* Boston, Massachusetts, Prindle, Weber & Schmidt, 1972.
Kennedy, Hubert C., «Peano's concept of number», *Historia Mathematica,* 1, 1974, pp. 387-408.
Klein, Felix, *Le programme d'Erlangen,* París, Gauthier-Villars, 1974.
Klein, Felix, *Famous problems of elementary geometry,* Nueva York, Dover, 1956.
Klein, Felix, «The arithmetizing of mathematics», traducido del alemán por I. Maddison, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 2, 1896, pp. 241-49.
Kline, Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Nueva York, Oxford University Press, 1972, pp. 1182-1210.
Kneale, William y Morta, *The development of logic,* Londres, Oxford University Press, 1962, [*El desarrollo de la lógica,* Madrid, Tecnos, 1980].
Kneebone, G. T., *Mathematic logic and the foundations of mathematics,* Londres, D. van Nostran, 1963.
Kuntzmann, Jean, *Où vont les mathématiques,* París, Hermann, 1967, [*¿A dónde va la matemática?,* México, Siglo XXI, 1969].
Le Lionnais, François, comp., *Les grands courants de la pensée mathématique,* París, Albert Blanchard, 1962.
Luchins, Abraham, S. y Edith H., *Logical foundations of mathematics for behavioral scientists,* Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1965.
Mandelbrot, Benoît, «Les objets fractals», *La Recherche,* 9, enero de 1978, pp. 5-13.
Manheim, Jérôme M., *The genesis of point set topology,* Nueva York. Macmillan Company, 1964.
Manheim, Jérôme M., «The genesis of point set topology: from Newton to Hausdorff», *The Mathematics Teacher,* 59, 1966, pp. 36-41.
May, Kenneth O., *Bibliography and research manual of the history of mathematics,* Toronto, University of Toronto Press, 1973.
Meschkowski, Herbert, *Evolution of mathematical thought,* San Francisco, Holden-Day, 1965.
Monna, A. F., *Functional analysis in historical perspective,* Nueva York, Wiley, 1973.
Nagel, Ernest y James F. Newman, *Gödel's proof,* Nueva York, New York University Press, 1958, [*El teorema de Goedel,* Madrid, Tecnos, 2.ª ed. 1979].
National Council of Teachers of Mathematics (The), *Historical Topics for the Mathematics Classroom,* Washington, D.C., N.C.T.M., 1969.
Newman, James R., comp., *The world of mathematics,* Nueva York, Simon

and Schuster, 1956, [*Sigma. El mundo de las matemáticas,* Barcelona, Grijalbo, 8.ª ed. 1980].

Peano, Giuseppe, «Giuseppe Peano at the University of Turin», *The Mathematics Teacher,* 61, 1968, pp. 703-706.

Pesin, Ivan N., *Classical and Modern Integration Theories,* Nueva York Academic Press, 1970.

Pierpont, James, «On the arithmetization of mathematics», *Bulletin of the American Mathematical Society,* 5, 1899, pp. 394-406.

Poincaré, Henri, *La science et l'hypothèse.* París. Flammarion, 1968, [*La ciencia y la hipótesis,* Madrid, Espasa Calpe].

Poincaré, Henri, *Science et méthode.* París. Flammarion, 1908, [*Ciencia y método,* Madrid, Espasa Calpe].

Poincaré, Henri, *La valeur de la science.* París. Flammarion, 1948, [*El valor de la ciencia,* Madrid, Espasa Calpe].

Poincaré, Henri, *Dernières pensées.* París, Flammarion, 1913. [*Ultimos pensamientos,* Madrid, Espasa Calpe].

Poincaré, Henri, *The foundations of science,* Nueva York, Science Press, 1946.

Pont, Jean-Claude, *La topologie algébrique des origines à Poincaré,* París, Presses Universitaires de France, 1974.

Russell, Bertrand, *Principles of mathematics,* 2.ª ed., Nueva York, Norton, 1938.

Russell, Bertrand, *Introduction à la philosophie mathématique,* traducido del inglés por G. Moreau, París, Payot, 1970.

Russo, François, P., *Groupes et géométries,* D-126, París, Palais de la Découverte, 1969.

Sarton, George, *The study of the history of mathematics & study of the history of science,* Nueva York, Dover, 1936.

Scientific American, *Mathematics in the modern world,* San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1968.

Stone, M. H., «The revolution in mathematics», *Liberal Education,* 47, 1961, pp. 304-27.

Taton, René, comp., *Histoire générale des sciences,* tomos III y IV, *La Science Contemporaine,* París, P.U.F., 1961-1964, [*Historia general de las ciencias,* vol. 3, Barcelona, Destino, 1973].

Volterra, Vito *et al., Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique,* París, Felix Alcan, 1914.

Waldschmidt, Michel y Jacques Vélu, «Les victoires de la transcendance». *La Recherche,* 8, diciembre de 1977, pp. 1059-65.

Waismann, Friedrich, *Introduction to mathematical thinking,* traducido del alemán por T. J. Benac, Nueva York. Frederick Ungar Publishing, 1951.

Weil, André, «The future of mathematics», *The American Mathematical Monthly,* 57, 1950, pp. 295-306.

Weyl, Hermann, «Mathematics and logic», *The American Mathematical Monthly,* 53, 1946, pp. 2-13.

Weyl, Hermann, *The philosophy of mathematics and natural science,* Princeton, Nueva Jersey, Princeton University Press, 1949, [*Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural,* México, UNAM, 1965].

Weyl, Hermann, «A half-century of mathematics», *Bulletin of the American Mathematical Society,* 57, 1951, pp. 523-53.

Whitehead, Alfred N. y Bertrand Russell, *Principia mathematica,* 3 vols., Cambridge University Press, 1910-1913.

Whitehead, Alfred N. y Bertrand Russell, *Principia mathematica to 56.* Londres, Cambridge University Press, 1967, [*Principia mathematica,* Madrid, Espasa Calpe, 3.ª ed. 1977].

Wilder, Raymond L., «Topology: its nature and significance», *The Mathematics Teacher,* 55, 1962, pp. 462-475.

Wilder, Raymond L., «The role fot the axiomatic method», *The American Mathematical Monthly,* 74, 1967, pp. 115-27.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál fue el papel del programa de Erlangen de Klein en la unificación de las geometrías existentes? Justificar la respuesta.
2. Pueden constatarse ciertas lagunas o ausencias en el programa de Erlangen. Comentar esta afirmación.
3. Peano se interesó por los fundamentos de las matemáticas. ¿Con qué fin y cuáles eran sus motivos. Justificarlo.
4. Precisar las contribuciones de Peano en el campo de la lógica simbólica con ejemplos.
5. Los trabajos de Peano influyeron en las investigaciones de Russell y Whitehead. Comentar esta afirmación.
6. ¿Cuál fue el fin perseguido por Frege en su «escritura de los conceptos»?
7. ¿Cuál es el aporte innovador de Frege a la lógica matemática? Precisarlo con ejemplos.
8. Precisar los objetivos perseguidos por Frege en sus leyes fundamentales de la aritmética.
9. ¿Por qué puede afirmarse que Poincaré fue un científico universal? Justificarlo.

10. ¿Cuáles son las principales concepciones filosóficas de Poincaré sobre las matemáticas?
11. Poincaré se interesó por la creación matemática. Comentar esta afirmación con ejemplos.
12. Explicar el origen de las paradojas de la teoría de conjuntos y precisar el punto de vista de Russell sobre la eliminación de estas antinomias.
13. La axiomatización de la teoría de conjuntos fue obra de Zermelo, Fraenkel y Skolem. Comentarlo y decir cómo llegaron a ella.
14. ¿Cuáles fueron las principales causas que originaron las tres escuelas de pensamiento a principios del siglo XX?
15. Resumir las concepciones: a) del logicismo; b) del intuicionismo; c) del formalismo.
16. Las tres escuelas de pensamiento no llegaron a alcanzar su objetivo. ¿Se puede concluir que la controversia entre estas corrientes no ha producido nada nuevo? Comentarlo con ejemplos.

INDICE DE NOMBRES

Abel, Niels Henrik (1802-1829), 235, 260, 275, 282, 286, 292, 311, 324-326, 328, 329, 342, 354, 387, 389, 527, 534, 536
Ackerman, Wilhelm (1896-1962), 584
Agnesi, Maria Gaetana (1718-1799), 178, 229
Alexander, James W. (1888-1971), 539
Angeli, Stefano degli (1623-1697), 88
Argand, Jean Robert (1768-1822), 268, 305, 306, 397, 402
Ascoli, Giulio (1843-1896), 551

Babbage, Charles (1791-1871), 277, 395, 398
Baire, René (1874-1932), 550, 557
Bartholin, Erasmus (1625-1698), 69, 70
Barrow, Isaac (1630-1677), 82, 91, 100, 102, 103, 119, 145, 179
biografía, 92; análisis, 93-96
Bayes, Thomas (1702-1761), 255
Beaune, Florimond de (1601-1652), 69
Beltrami, Eugenio (1835-1900), 443, 471, 480, 490, 540, 550
Berkeley, George (1685-1753), 144, 181, 182, 342
Bernays, Paul (1888-), 560, 584, 585
Bernoulli, Jakob (1654-1705), 140, 143, 150, 159, 160, 179, 187, 197, 229, 280
biografía, 144-145; sobre las series infinitas, 145-146; sobre problemas populares, 146-148; *Ars conjectandi,* 148-150
Bernoulli, Johann (1667-1748), 131, 140, 143, 145, 146, 147, 152, 154, 155, 159, 160, 161, 162, 172, 180, 182, 187, 192, 197, 198, 199, 207, 209, 214, 229, 238, 280, 287, 343
biografía, 150-151; contribuciones matemáticas, 155-156
Bernoulli, Nikolaus, II (sobrino de Jakob), 148, 159
Bernoulli, Nikolaus III (1695-1726), 156, 157, 162, 187, 188
Bernoulli, Daniel (1700-1782), 140, 151, 156, 157, 187, 188, 220, 235, 241, 348
Bernoulli, Johann II (1710-1790), 157, 159, 187
Bernoulli, Johann III, 159, 160
Berthane, George (1800-1884), 429
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784-1846), 306
Betti, Enrico (1823-1892), 391, 471, 495, 537, 539
Bézout, Etienne (1730-1783), 142, 244, 251, 417
Biot, Jean-Baptiste (1774-1862), 249, 252, 466

Birkhoff, George David (1884-1944), 536
Bobillier, Etienne (1797-1832), 460, 462-463, 467, 468
Bolyai, Janos (1802-1860), 290, 305, 443, 472, 473-474, 475, 489
Bolyai, Wolfgang Farkas (1775-1856), 177, 276, 282
Bolzano, Bernhard (1781-1848), 277, 282, 286, 311, 312, 330-333, 342, 343, 350, 354, 355, 358, 377, 379, 499
Boole, George (1815-1864), 118, 277, 395, 422, 431-434, 435, 436, 502, 504, 508
Borel, Émile (1871-1956), 278, 499, 536, 550, 551, 557, 570, 572
Brianchon, Charles Julien (1785-1864), 444, 445, 450, 454, 460
Brouncker, William (1620-1684), 87, 88
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1881-1966), 484, 539, 570, 572-575, 576, 583, 585
Buffon, George-Louis Leclerc, conde de (1707-1788), 149, 158, 187, 222-224, 254
Burali-Forti, Cesare (1861-1931), 553

Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845-1918), 277, 371, 376, 377, 412, 498, 501, 504, 520, 521, 523, 552, 553, 555, 557, 558, 559, 560, 571, 582
  biografía, 367-368; teoría de los números irracionales, 369-371; teoría de conjuntos, 378-382
Carnot, Lazare-Nicholas-Marguerite(1753-1823),228,229,277,442, 445, 448
  biografía, 261-263; trabajos matemáticos, 263-265
Cartan, Elie (1869-1951), 494
Cassini, Jacques (1677-1756), 150, 218
Cataldi, Pietro Antonio (1548-1626), 88
Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857), 81, 191, 220, 285, 293, 325, 326, 328, 330, 331, 333, 335, 337, 342, 343, 349, 350, 351, 354, 355, 358, 364, 371, 377, 388, 417, 449, 460, 534, 535
  biografía, 308-311; rigor en el análisis, 311-316; series infinitas, 316-317; funciones de variable compleja, 317-320; otras contribuciones matemáticas, 320-322
Cayley, Arthur (1821-1895), 275, 277, 395, 418, 420, 421, 426, 427, 432, 443, 471, 485, 487, 490, 491
  biografía 421-422; teoría de matrices, 422-426
Cesaro, Ernesto (1859-1906), 265, 500, 536
Ceva, Giovanni (1648-1734), 144, 174
Clairaut, Alexis Claude (1713-1765), 140, 142, 186, 187, 213, 216-220, 230, 240, 255, 347
Clifford, William Kingdom (1845-1879), 415, 416, 427
Cohen, Paul J. (1934-), 558, 579
Collins, John (1625-1683), 88, 92, 102, 119
Condorcet, Marie - Jean - Antoine - Nicolas Caritat de (1743-1794), 190, 228, 230, 240-242, 269
Cotes, Roger (1682-1716), 143, 164, 199
Cramer, Gabriel (1704-1752), 159, 170, 178, 223, 417, 467
Crelle, August Leopold (1780-

1855), 324, 326, 368, 369, 378, 423, 455, 456

Chasles, Michel (1793-1880), 276, 443, 450, 451-453, 454, 456, 486

D'Alembert, Jean Le Rond (1717-1783), 140, 141, 182, 186, 187, 199, 212-216, 220, 230, 235, 238, 240, 241, 251, 255, 268, 312, 342, 343
Dedekind, Julius Wilhelm Richard (1831-1916), 277, 367, 379, 381, 497, 504, 506, 521, 552, 556, 571
biografía, 371-372; teoría de los números irracionales, 372-376
Delambre, Jean-Baptiste (1749-1822), 268
De Moivre, Abraham (1667-1754), 143, 150, 160, 164, 166, 199
biografía, 160-162; probabilidades, 162-163; trigonometría, 163-164
De Morgan, Augustus (1806-1871), 55, 277, 395, 399, 417, 436, 534
biografía 400; concepciones algebraicas, 400-401; trabajos de lógica, 428-431
Désargues, Gérard (1591-1661), 4, 7, 50, 52, 56, 67, 75, 76, 441, 444, 448, 450
biografía, 58-60; El *Borrador,* 60-63
Descartes, René (1596-1650), 4, 7, 26, 27, 30, 31, 37, 39, 42, 47, 51, 56, 59, 63, 67, 68, 69, 70, 73, 75, 76, 83, 84, 100, 102, 107, 117, 120, 147, 191, 213, 217, 441, 443
biografía, 8-9; geometría, 9-17; sistema de coordenadas, 17-18; método de tangentes, 18-20, análisis, 20-21
De Sluse, René-François (1622-1685), 51, 74, 75, 120
De Witt, Jan (1623-1672), 70, 71, 72, 73, 83
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805-1859), 286, 289, 322-323, 337, 342, 343, 349, 351, 352, 355, 499, 530, 578
Dodgson, Charles L. (Lewis Carroll) (1832-1898), 420
Du Bois-Reymond, Paul (1831-1889), 355, 376, 377, 498
Dupin, Charles (1784-1873), 444, 445, 460, 471

Einstein, Albert (1879-1955), 104, 575
Euler, Leonhard (1707-1783), 9, 85, 86, 139, 140, 141, 142, 151, 156, 164, 169, 182, 186, 187, 213, 214, 215, 220, 221, 229, 230, 233, 234, 235, 237, 238, 255, 256, 259, 268, 280, 294, 296, 297, 298, 301, 302, 309, 311, 312, 315, 318, 322, 343, 347, 349, 358, 417, 421, 450, 467, 495, 527, 536
biografía, 187-191; noción de función, 191-193; notaciones, 193-194; fundamentos del cálculo, 195-197; logaritmo y número complejo, 197-200; series infinitas, 200-203; teoría de números, 203-206; otras contribuciones, 206-212

Fagnano, Giulio Carlo de Toschi di (1682-1766), 144, 175, 229, 527
Fejér, Léopold (1880-1959), 536
Fermat, Pierre de (1601-1665), 3, 4, 7, 19, 20, 21, 39, 41, 44, 45, 50, 51, 55, 56, 58, 59, 67, 68, 75, 82, 84, 85, 88, 94, 96, 100, 102, 108,

178, 203, 204, 205, 213, 237, 259, 309, 441
biografía, 21-22; el *Isagoge,* 22-26; paralelismo entre las geometrías de Descartes y Fermat, 26-27; método de máximos y mínimos, 27-29; método de las tangentes, 29-31, integración, 32-35; teoría de los números, 32-35; teoría de probabilidades, 35-36
Feuerbach, Karl Wilhelm (1800-1834), 451, 468
Fourier, Jean - Baptiste - Joseph (1768-1830), 278, 315, 323, 334, 335, 337, 344-349, 352, 369, 389
Fraenkel, Abraham A. (1891-1965), 382, 484, 560, 562
Fréchet, Maurice (1878-1973), 551
Fredholm, Ivar Irik (1866-1927), 551
Frege, Gottlob (1848-1925), 277, 436, 483, 504, 505, 550, 554, 562, 563
biografía, 507-508; *Begriffsschrift,* 508-514; *Grundgesetze der Arithmetik,* 514-518; fundamentos de la aritmética, 518-524
Fuchs, Lazarus (1833-1902), 526, 527

Galois, Évariste (1811-1832), 235, 275, 278, 322, 386
biografía, 388-391; teoría de la resolubilidad, 391-394
Galton, Francis (1822-1911), 278, 545
Gans, Richard (1880-1954), 536
Gauss, Karl-Friedrich (1777-1855), 33, 177, 194, 206, 211, 265, 275, 276, 277, 278, 281, 285, 322, 324, 328, 342, 343, 349, 367, 376, 387, 391, 397, 402, 408, 417, 443, 471, 472, 473, 474, 475, 479, 489, 495, 526
biografía, 286-293; teorema fundamental del álgebra, 293-294; *Disquisitiones arithmeticæ,* 294-301; otros resultados en teoría de números, 301-302; trabajos geométricos, 302-305; otros trabajos matemáticos, 305-308
Gelfond, Alexander Osipovich (1906-), 579, 580
Gergonne Joseph-Diez (1771-1859), 450, 454, 455, 460, 466, 467, 469
Gibbs, Josiah Willard (1839-1903), 278, 282, 415, 416, 417
Gödel, Kurt (1906-1978), 560, 579, 585
Goldbach, Christian (1690-1764), 187, 194, 200, 220, 221
Grandi, Guido (1671-1742), 144, 146, 177, 178
Grassmann, Hermann Günther (1809-1877), 387, 407, 415, 416, 444, 502
biografía, 407; análisis, 408-413
Green, George (1793-1841), 278, 336-337, 535
Gregory, Duncan F. (1813-1844), 399, 401, 428
Gregory, James (1638-1675), 82, 88, 89, 90, 91, 94, 96, 167, 172, 192, 399
Grelling, Kurt (1886-1941), 555

Hachette, Jean-Nicolas Pierre (1769-1834), 246, 249, 460
Hadamard, Jacques (1865-1963), 259, 302, 382, 549, 551, 553, 557, 572
Halley, Edmund (1656-1742), 103, 161, 181, 229

Hamilton, William (1788-1856), 429
Hamilton, William Rowan Sir (1805-1865), 276, 387, 395, 401, 407, 412, 413, 414, 415, 416, 426, 471
biografía, 361-362; trabajos sobre los números irracionales, 362-364; álgebra de las parejas, 401-403; cuaterniones, 403-407
Hankel, Hermann (1839-1873), 277, 376, 377, 408, 412
Harnack, Alex (1851-1888), 498
Hausdorff, Felix (1868-1942), 501, 551
Heaviside, Oliver (1850-1925), 415, 416, 417
Heine, Heinrich Edward (1821-1881), 369, 372, 376, 377
Helmholtz, Hermann von (1821-1894), 471, 494
Hermann, Jacob (1678-1733), 179
Hermite, Charles (1822-1901), 278, 354, 356, 358, 359-360, 388, 485, 488
Hesse, Ludwig Otto (1811-1874), 443, 471
Heuraet, Hendrick Van (1633-1660), 87
Hilbert, David, 276, 281, 283, 382, 480, 484, 506, 530, 550, 553, 557, 559, 561, 575, 577-580
formalismo, 580-586
Hill, George William (1838-1914), 282, 532
Hobbes, Thomas (1588-1679), 68
Horn, Jakob (1867-1946), 536
Hudde, Johann (1629-1704), 70, 71, 75, 107
Huygens, Christian (1629-1695), 36, 51, 58, 70, 81, 82, 87, 96, 102, 116, 119, 120, 121, 122, 131, 148, 161, 162, 280

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804-1851), 260, 281, 286, 292, 326, 327-329, 349, 389, 391, 417, 455, 527
Jevons, William Stanley (1835-1882), 277, 434-435, 436
Jones, William (1675-1749), 194
Jordan, Camille (1838-1922), 275, 391, 394, 426, 471, 488, 495, 499, 500, 550
Jurin, James (1684-1750), 181, 182

Kant, Immanuel (1724-1804), 519, 570, 573, 583
Keill, John (1671-1721), 180
Kelvin, William Thomson, Lord (1824-1907), 278, 336, 337, 529, 535
Klein, Felix (1849-1925), 281, 287, 292, 382, 459, 471, 480, 483, 484-486, 529, 537, 561
génesis del programa de Erlangen, 486-491; contenido del programa de Erlangen, 491-495; topología, 495-496
Klügel, Georg S. (1739-1812), 472, 473
Kronecker, Leopold (1823-1891), 275, 367, 368, 376, 382, 544, 561, 570, 571, 573

Lacroix, Silvestre François (1765-1843), 142, 249, 312, 389, 466
Lagrange, Joseph Louis (1736-1813), 139, 140, 221, 228, 248, 251, 252, 255, 256, 257, 259, 268, 280, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 301, 308, 312, 342, 343, 344, 387, 388, 417, 527, 532
biografía, 229-233; trabajos matemáticos en Turín, 233-235; actividad matemática en Berlín, 235-238; contribuciones mate-

máticas durante la Revolución, 238-240
Laguerre, Edmond (1834-1886), 486, 487
La Hire, Philippe de (1640-1718), 67, 70, 73, 75, 76, 77, 150, 453
Lambert, Johann Heinrich (1728-1777), 140, 187, 221-222, 259, 358, 472, 473
Lamé Gabriel (1795-1870), 337, 460-462, 466
Landen, John (1719-1790), 238, 343
Laplace, Pierre Simon de (1749-1827), 140, 149, 159, 186, 228, 229, 241, 257, 308, 318, 321, 334, 335, 336, 344, 349, 417, 535, 539
biografía, 251-253; teoría de las probabilidades, 253-255; mecánica celeste, 255-257
Lebesgue, Henri (1875-1941), 499, 557
Legendre, Adrien-Marie (1752-1883), 140, 142, 205, 211, 228, 229, 254, 294, 297, 298, 307, 309, 322, 325, 326, 328, 344, 358, 367, 388, 450, 472
biografía, 257-258; geometría y postulado de las paralelas, 258-259; teoría de números, 259; otras contribuciones, 260-261
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), 48, 53, 54, 57, 71, 80, 96, 100, 101, 104, 105, 140, 143, 144, 145, 146, 147, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 160, 172, 176, 179, 180, 181, 182, 192, 197, 198, 199, 208, 215, 223, 229, 238, 262, 264, 277, 317, 342, 396, 428, 448, 504, 509, 586
biografía, 117-121; notas manuscritas sobre el cálculo, 121-127; *Nova methodus pro maximis et minimis,* 127-128; otros trabajos de Leibniz, 128-131; célebre controversia entre Newton y Leibniz, 132-133
L'Hospital, Guillaume François de (1661-1704), 130, 140, 143, 147, 150, 151, 160, 179, 180
biografía, 151-152; *análisis de los infinitamente pequeños,* 152-155
Lie, Sophus (1842-1899), 275, 494, 575
Lindemann, Ferdinand (1852-1939), 358, 360-361, 571
Liouville, Joseph (1809-1882), 282, 358-359, 391, 535
Listing, Johann Benedikt (1808-1882), 277, 471, 495
Lobachevski, Nicolai Ivanovich (1793-1856), 177, 276, 282, 287, 290, 305, 337, 443 472, 473, 474-479, 489, 541, 581
Lucas, Henry (1610-1663), 92

Maclaurin, Colin (1698-1746), 90, 142, 143, 171, 182, 417
biografía, 166-168; geometría, 168; análisis, 169-170; álgebra, 170-171
Maxwell, James Clerk (1832-1879), 278, 337, 413-415
Mengoli, Pietro (1626-1686), 80-81, 88, 145
Méray, Charles (1835-1911), 364-365
Mercator, Nicolaus (1620-1687), 81, 88, 91, 109, 119
Méré, Antoine Gombaud, Caballero de (1610-1685), 36, 54
Mersenne, Marin (1588-1648), 4, 5, 34, 37, 39, 45, 50, 59
Möbius, Augustus Ferdinand (1790-1868), 249, 276, 277, 408, 412,

450, 453, 463-465, 468, 471, 491, 495, 496, 502
Mohr, Georg (1640-1697), 67, 77, 78, 79, 80
Monge, Gaspard, conde de Péluse (1746-1818), 62, 140, 141, 228, 229, 257, 261, 264, 277, 309, 441, 443, 444, 445, 448, 450, 452, 460
biografía, 242-246; geometría descriptiva, 246-247; geometría analítica, 248-250; otros trabajos matemáticos, 250
Montmort, Pierre Raymond de (1678-1719), 150, 158
Moore, Eliakim H. (1862-1932), 500

Neile, William (1637-1670), 87
Nelson, Leonard (1882-1927), 555
Netto, Eugen E. (1846-1919), 501
Neumann, Karl Gottfried (1832-1925), 495, 530
Newton, Sir Isaac (1642-1727), 48, 71, 81, 85, 90, 91, 92, 93, 96, 100, 118, 128, 132, 133, 139, 140, 141, 143, 144, 147, 151, 152, 160, 161, 162, 164, 165, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 176, 179, 180, 181, 182, 191, 192, 208, 215, 218, 223, 229, 238, 255, 262, 264, 287, 312, 342, 363, 395, 586
biografía, 101-104; teorema del binomio, 104-107; *De analysi,* 107-108; método de las fluxiones, 108-112; *De quadratura curvarum,* 112-114; *Principia,* 114-117
Nieuwentijt, Bernard (1654-1718), 144, 179, 342
Noether, Emmy (1882-1935), 539

Oldenburg, Henry (hacia 1615-1677), 104, 119
Ostrogradsky, Miguel (1801-1861), 336, 337-338

Pascal, Blaise (1623-1662), 4, 7, 32, 34, 36, 39, 59, 62, 75, 80, 82, 87, 120, 125, 152, 168, 441, 445
biografía, 50-52; *Ensayo sobre las cónicas,* 52-53; Máquina aritmética, 53-54; Probabilidades, 54-56; Análisis infinitesimal, 56-58
Peacock, George (1791-1858), 395, 396-399, 400, 401, 428, 534
Peano, Giuseppe (1858-1932), 277, 376, 436, 480, 483, 550, 553, 554, 557, 564, 580
biografía, 497; trabajos de análisis, 497-501; fundamentos de las matemáticas, 502-503; lógica matemática, 503-507
Peirce, Benjamin (1809-1880), 282, 413, 427
Peirce, Charles Sanders (1839-1914), 277, 427, 430, 435, 523
Pell, John (1611-1685), 119, 205
Playfair, John (1748-1819), 472
Ploucquet, Gottfried (1716-1790), 429
Plücker, Julius (1801-1868), 168, 249, 276, 443, 450, 456, 465-471, 491
Poincaré, Jules-Henri (1854-1912), 278, 382, 471, 480, 483, 484, 550, 553, 555, 557, 560, 562, 567, 569, 570, 571, 572, 573, 577, 580
biografía, 524-526; teoría de las funciones fuchsianas, 526-529; método del barrido, 529-530; teoría de los problemas de contorno, 531; teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, 531-534; teoría de las series asintóticas, 534-536; topología

combinatoria, 537-539; otras contribuciones, 539-540; obra filosófica, 540-544; creación matemática, 544-549
Poisson, Siméon-Denis (1781-1840), 149, 159, 252, 256, 278, 334-336, 337, 349, 389, 391, 535, 536
Poncelet, Jean-Victor (1788-1867), 276, 443, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 454, 456, 460, 466, 469, 486, 491
Pontrjagin, Lev. S. (1908-1960), 539
Poretski, Platon Sergeyevich (1846-1907), 436

Riccati, Jacopo Francesco, conde de (1676-1754), 157, 174, 175
Riccati, Vincenzo (1707-1775), 222
Riemann, Bernhard (1826-1866), 177, 191, 276, 277, 289, 291, 303, 349-354, 356, 377, 443, 444, 471, 479, 480, 489, 495, 499, 527, 529, 530, 539, 540, 578
Roberval, Gilles Personne de (1602-1675), 7, 34, 42, 44, 46, 50, 54, 74, 75, 88, 141
  biografía, 36-37; geometría de los indivisibles, 38; cicloide, 39-40; método de las tangentes, 40-41; geometría analítica, 42
Robins, Benjamin (1797-1751), 182
Rolle, Michel (1652-1719), 144, 179, 180, 342
Russell, Bertrand (1872-1970), 277, 382, 432, 437, 484, 503, 504, 505, 506, 513, 524, 550, 553, 554, 555, 556, 558, 561, 562, 563, 577
  biografía, 563; *Principia mathematica,* 564-570

Saccheri, Girolamo (1667-1733), 144, 177, 222, 258, 259, 472
  biografía, 176; postulado de las paralelas, 176-177
Saint-Vincent, Grégoire de (1584-1667), 79, 80, 81, 88, 89, 96, 120
Salmon, George (1819-1904), 443, 471
Sclegel, Victor (1843-1905), 413
Scherk, Heinrich F. (1798-1885), 419
Schickard, Wilhelm (1592-1635), 54
Schläfi, Ludwig (1814-1895), 496
Schoenflies, Arthur M. (1853-1928), 500
Schröder, Ernst (1841-1902), 277, 435-436, 502, 504
Schwarz, Hermann Amandus (1843-1921), 531
Schweikart, Ferdinand Kail (1780-1859), 472, 473
Serret, Joseph Alfred (1819-1885), 488
Servois, François-Joseph (1767-1847), 399
Simpson, Thomas (1710-1761), 112
Skolem, Thoralf (1887-), 560, 562
Staudt, Kail Georg Christian von (1798-1867), 443, 457-459, 486
Steiner, Jacob (1796-1863), 276, 349, 443, 453, 455
Stieltjes, Thomas Jan (1856-1894), 535, 536
Stirling, James (1692-1770), 143, 162, 164, 165
  geometría analítica, 165; serie de, 165-166
Stokes, George Gabriel (1819-1903), 278, 337, 356, 535
Stolz, Otto (1842-1905), 495
Sturm, Charles (1803-1855), 389, 463
Swift, Jonathan (1667-1745), 181

Sylvester, James Joseph (1814-1897), 417-419, 420, 421, 422, 491

Tait, Peter Guthrie (1831-1901), 406, 413
Taurinus, Franz Adolf (1794-1874), 473
Taylor, Brook (1685-1731), 143, 154, 169, 171, 172, 238, 239, 275
serie, 172-174
Torricelli, Evangelista (1608-1647), 4, 5, 38, 51, 74, 80, 88, 94, 147
biografía 42; cálculo diferencial e integral, 43-45; método de las tangentes, 45-49

Vandermonde, Alexandre - Théophile (1735-1796), 237, 243, 244, 256, 387, 417, 495
Van Schooten, Frans (1615-1660), 67, 69, 70, 71, 73, 81, 82, 102
Varignon, Pierre (1654-1722), 143, 150, 157, 180, 212
Veblen, Oswald (1880-1960), 539
Volterra, Vito (1860-1940), 551

Wallis, John (1616-1703), 82, 88, 91, 96, 100, 102, 105, 107, 132, 145, 162, 176, 194, 210
biografía, 83; geometría analítica, 83-84; cálculo diferencial e integral, 84-86; números complejos, 87
Waring, Edward (1734-1793), 187, 220, 221, 237
Watson, George N. (1886-1965), 535
Weber, Wilhelm (1804-1891), 291, 292
Weierstrass, Karl Wilhelm Theodor (1815-1897), 281, 313, 332, 350, 354-357, 367, 368, 376, 377, 420, 499, 527, 582
biografía, 354-357; teoría de los números irracionales, 365-367
Wessel, Gaspar (1745-1818), 229, 265, 266-268, 305, 306, 397, 402
Weyl, Hermann (1885-1955), 382, 484, 551, 561, 569, 575-577, 585
Whitehead, Alfred North (1861-1947), 277, 437, 484, 503, 506, 524, 554, 556, 557, 561, 563
biografía, 563; *Principia mathematica,* 564-570
Wilson, John (1741-1793), 221, 237
Woodhouse, Robert (1773-1827), 395-396, 428
Wren, Christopher (1632-1723), 87

Zermelo, Ernst (1871-1953), 382, 484, 556, 557-560, 562

INDICE TEMATICO

Ad locos planos et solidos isagoge, 22-26, 68
álgebras de dimensión finita, 387, 407, 426-428
de Lie, 494
Análisis de los infinitamente pequeños, 152-155
análisis vectorial, 415-417
Aperçu historique sur l'origine et le développment des méthodes en géométrie, 451-452
aritmetización del análisis, 342-382
Ars conjectandi, 148-150, 159, 287
axioma de elección, 557-558, 560
extensionalidad, 559
reductibilidad, 568
sustitución, 560
axiomas de Peano, 505-506
axiomatización
de la geometría por Hilbert, 559
de la teoría de conjuntos, 484, 557-560

bicuaterniones, *véase* cuaterniones
binomio, *véase* teorema del binomio
Borrador, el, 60-62
botella de Klein, 496
braquistócrona, 132, 147, 208

cálculo de diferencias finitas, 90, 122-127, 172-174, 254
cálculo de probabilidades, 35-36, 54-56, 82, 148-150, 162-163, 216, 223-224, 241, 253-255, 278, 335, 542-543
cálculo de variaciones, 147, 208, 233-235, 329, 531, 578
caracol de Pascal, 50
cicloide, 39-40, 45, 51-52, 58, 82, 87, 128, 147
cisoide, 41, 106
concoide, 41, 111
conjetura de Goldbach, 220, 221
constante de Euler, 201-202, 361
controversia de Newton-Leibniz, 132-133, 180-181
convergencia, 414
convergencia uniforme, 356
cortadura de Dedekind, 363, 374-375, 544
cuárticas, 11
cuaterniones, 386-387, 403-407, 414-415
bicuaterniones, 426-427
hipercuaterniones, 426-427
curva de Jordan, 499-500
de Peano, 500-501
curl, *véase* rotacional

De arte combinatoria, 121
De ratiociniis in ludo aleae, 82, 148, 161
determinantes funcionales jacobianos, 327-328

Discurso del método, 9-18
Disquisitiones aritmethicæ, 194, 285, 288
distribución de Poisson, 335
divergencia, 406, 415

ecuación de Pell, 35, 205, 237
Ecuación diferencial ordinaria
de Bernoulli, 147
de Clairaut, 218-219
de Legendre, 261
de Ricatti, 158, 174-175, 207, 532
ecuaciones; fundamentos del cálculo de variaciones, 208
ciclotómica, 300, 324
abeliana, 324, 326
del potencial de Laplace, 335, 336
ecuaciones de Cauchy-Riemann, 216, 318
enteros complejos, 301, 360
escuelas de pensamiento (*véase* logicismo, intuicionismo y formalismo), 484, 561-586
espiral aritmética (E), 88
espiral logarítmica, 47, 147-148

fluentes, 108-114
fluxiones, 103, 107, 108-112, 113, 114, 132, 143
notación de las, 108-112, 113, 114
folio de Descartes, 20
formalismo, 577-586
fórmula,
de aproximación de Newton, 112
de Euler, 9, 309
de Gregory-Newton, 90, 172
de Ostrogradsky (o de Green), 336, 337-338
de Stirling, 162, 164-166
de sumación de Euler-Maclaurin, 203
Formulario de matemáticas, 503, 504, 507
función; historia del concepto de, 191-193, 343-344
de Bessel, 349
función dsda, 353
función gamma, 85, 209-210, 260, 307
función zeta, 329
funciones
abelianas, 326
automorfas, 484-485, 527-529
elípticas, 325, 329, 359, 360, 527, 528
eulerianas, 307
fuchsianas, 485, 526-529
kleineanas, 485
funciones especiales
de Bolzano, 331-332
de Dirichlet, 323, 499
de Riemann, 350-351
de Weierstrass, 356
fundamentos
de aritmética, 507, 518-524
de geometría, 578, 581
de matemáticas, 550-552

geometría
analítica, 10-18, 22-29, 68-75, 117, 167-169, 171, 208-211, 217
proyectiva, 52-53, 60-63, 76-77, 264-265, 444-459
geometrías; no euclídeas
de Bolyai, 474
de Gauss, 304-305
de Lobachevski, 474-479, 541, 581
de Riemann, 479-480
modelos de, 479-480, 550
gradiente, 406, 415

hipernúmeros, 386, 426; *véase* también álgebras de dimensión finita y cuaterniones

hipótesis cosmogónica de Laplace, 256
hipótesis del continuo, 553, 560, 580, 582
Horologium oscillatorium, 81

indivisibles
de Roberval, 38
de Torricelli, 43-44
inducción matemática, 55-56, 203
principio, 505-506
Institutiones calculi differencialis, 190
Institutiones calculi integralis, 190
integral
elípticas, 260, 292-293, 309, 325-326, 328-329, 353
euleriana, 210-211, 260
de Fourier, 335, 349
de Lebesgue, 499
de Riemann, 351, 353, 499
interlingua, 507
Introductio in analisim infinitorum, 186, 189, 194, 206, 208
intuicionismo, 570-577
involución, 61, 76

lemniscata de Bernoulli, 147, 175-176
ley de continuidad de Poncelet, 447-448
ley de reciprocidad cuadrática, 205-206, 259, 287, 296-297, 307
bicuadrática, 301, 329
leyes de De Morgan, 430
Liber de Ludo Aleae, 35
lógica matemática, 387, 428-437, 502-518, 564-570
logicismo, 562-570

máquinas de calcular
de Babbage, 398
de Leibniz, 118-119
de Pascal, 53-54
de Schickard, 54
matrices, 386-387
teoría de, 420-426
Mecánica celeste, 229, 252
metamatemática, 584
método
de barrido de Poincaré, 529-531
de descenso infinito de Fermat, 33-34, 203-204
de los mínimos cuadrados, 254, 261, 288, 307
dialítico de Sylvester, 418-419
monódroma, 320
monógena, 320
función monógena, 359

números
algebraicos, 294, 358, 361, 380, 386
cardinales, 380-382, 518-524, 553-557, 560-569, 573
ordinales, 380-382, 552-554
trascendentes, 358, 361, 579-580
números complejos, 131, 163, 199-200, 206-207, 215-216, 300, 306-307, 325-326, 401-403
logaritmo, 131, 198-200, 213-214
representación geométrica de, 87, 265, 305-306, 401-402
números de Bernoulli, 149, 166, 203, 334
de Cayley, 427
números hipercomplejos, 276, 405-407
números primos, 204-205
de Fermat, 204-205, 300-301

operador de Laplace, 415
óvalos de Descartes, 16, 20, 69

paradoja
de Burali-Forti, 553

de Cantor, 553
de Cramer, 168, 467
de Grelling-Nelson, 555
de Russell, 483, 523, 554, 556, 562
de San Petersburgo, 157-158, 216, 223
del barbero, 556
paradojas de la teoría de conjuntos, 381-382, 484, 552-557, 562, 582-583
Philosophiae naturalis principia mathematica, 103, 114-117, 287, 312
polinomios de Legendre, 261, 349
postulado de las paralelas, 176-177, 221-222, 258-259, 276, 472-473, 474-477, 540, 580-581
Principia mathematica, 437, 503, 524, 564-570
principio de Dirichlet, 529-530, 578
problema de la aguja de Buffon, 223-224, 254
problema de lugar de Pappus, 14, 15, 69
programa de Erlangen, 480, 485-495
pseudoesfera, 490

quantics; *véase* teoría de las formas, 487

rectificación de curvas, 87-88
Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal, 262
regla
de Bayes, 255
de Cramer, 170-171
de las probabilidades compuestas, 162
de L'Hospital, 153-155
de los signos de Descartes, 16
rosas de Grandi, 178
rotacional, 406, 414
serie
de Dirichlet, 323
de Maclaurin, 169, 317
de Peano, 499
de Stirling, 165-166, 534
de Taylor, 172-174, 234, 238, 239, 311, 312, 317, 348
serie zeta de Poincaré, 529
series asintóticas, 534-536
armónicas, 201-202
trigonométricas, 211, 335
series de Fourier, 158, 211, 345-348, 350-352, 353, 376, 536
condiciones de convergencia, 323
sumabilidad, 335, 536
d'Abel, 335
superficie de Riemann, 353

teorema
de Bernoulli, 149, 162, 254
de Bolzano-Weierstrass, 333
de Brianchon, 445, 454
de Carnot, 265
de Cayley-Hamilton, 426
de De Moivre, 163-164, 300
de Désargues, 62
de Fermat (pequeño), 296
de Fermat (último), 35, 323, 361
de Green, 336, 337-338
de Heine-Borel, 536
de la divergencia, 338
de los números primos, 259
de Menelao, 265
de Rolle, 179-180
de Waring, 221
de Wilson, 221, 237, 296
del binomio, 102, 104-107, 148-149
fundamental del álgebra, 207, 213, 214, 288, 293-294
fundamental del cálculo, 128, 275
Teoría analítica del calor, 345, 347

Teoría analítica de las probabilidades, 253
teoría
de congruencias, 294-296
de la medida, 498-499, 550
de las formas, 204-205, 237, 259, 294, 297-299, 418
de los determinantes, 129-130, 170-171, 256, 320-321, 327-328, 417-420
de superficies, 209
general de las funciones circulares, 300
teoría de conjuntos, 376-378
de Bolzano, 333
de Cantor, 368, 378-382, 552-553
teoría de la resolubilidad de las ecuaciones, 387-388
de Galois, 391-394
teoría de los números irracionales
de Cantor-Heine, 369-371
de Dedekind, 372-376
de Hamilton, 362-364
de Méray, 364-365
teoría de números, 32-35, 203-206, 220, 259, 294-302, 357-359, 361-367, 369-371, 372-376
transformada de Laplace, 253, 334
trascendencia de e y de π, 360-361
triángulo de Pascal, 55
tridente, 15



impreso en cled y asociados
calle 85, núm.19, col. puebla
cp 15020 - méxico, d.f.
quinientos ejemplares y sobrantes
30 de septiembre de 2000

HISTORIA DE LAS MATEMATICAS. I

JEAN-PAUL COLLETTE

INDICE

Prefacio

Introducción

1. LA PREHISTORIA
2. LA CIVILIZACIÓN BABILÓNICA
3. LA CIVILIZACIÓN EGIPCIA
4. EL NACIMIENTO DE LAS MATEMÁTICAS GRIEGAS
5. DE PLATÓN A EUCLIDES
6. ARQUÍMEDES Y LOS MAESTROS DE LA ESCUELA DE ALEJANDRÍA
7. LAS CIVILIZACIONES CHINA E INDIA
8. LAS MATEMÁTICAS DEL ISLÁM
9. LAS MATEMÁTICAS DE LA EUROPA MEDIEVAL: 500-1400
10. EL RENACIMIENTO EUROPEO
11. EL COMIENZO DE LAS MATEMÁTICAS MODERNAS

Temas de trabajo

Indice alfabético

HISTORIA DE LA TECNOLOGIA

T. K. DERRY y T. I. WILLIAMS

Vol. 1. Desde la Antigüedad hasta 1750

Vol. 2. Desde 1750 hasta 1900 (I)

Vol. 3. Desde 1750 hasta 1900 (II)

T. I. WILLIAMS

Historia de la tecnología del siglo XX (en preparación)

HISTORIA DE LA FILOSOFIA SIGLO XXI

1. El pensamiento prefilosófico y oriental.
2. La filosofía griega.
3. Del mundo romano al Islam medieval.
4. La filosofía medieval en Occidente.
5. La filosofía en el Renacimiento.
6. Racionalismo. Empirismo. Ilustración.
7. La filosofía alemana, de Leibniz a Hegel.
8. La filosofía en el siglo XIX.
9. Las filosofías nacionales. Siglos XIX y XX.
10. La filosofía en el siglo XX.
11. La filosofía en Oriente (la filosofía islámica, india y china hasta nuestros días).

Esta obra es el complemento natural de nuestro tomo I, porque cubre todo el período que se extiende desde el comienzo del siglo XVII hasta las grandes escuelas del pensamiento del siglo XX. Se trata de iniciar al lector en la historia de las matemáticas y, para ello, hemos creído conveniente, una vez más, presentar un manual de historia de las matemáticas más que un tratado, con el fin de exponer, sobre todo, la vida de los matemáticos y las nociones históricas comúnmente aceptadas por los historiadores, con el fin manifiesto de facilitar la comprensión de su contenido.

Está dividida en once capítulos repartidos en tres grandes períodos: el siglo XVII, el siglo XVIII y el XIX y comienzos del XX. Se encontrará en la introducción a cada período un estado de la evolución de las matemáticas en la época correspondiente, así como un balance sumario de las realizaciones principales. Los once capítulos presentan el contenido en orden cronológico, y cada capítulo comprende una introducción que pone de manifiesto los puntos importantes y las principales ideas que se tratan en él; el desarrollo que sigue se presenta bajo la forma de parágrafos señalados con un título, nombre propio o tema particular, y el capítulo se termina con una bibliografía abundante y ejercicios de recapitulación.

968-23-1363-5
9 789682 313639

